LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN
FAKULTÄT FÜR BIOLOGIE

PROF. ANDREAS HERZ, DR. STEFAN HÄUSLER
DEPARTMENT BIOLOGIE II
GROSSHADERNERSTR. 2
82152 PLANEGG-MARTINSRIED

EMAIL: HAEUSLER@BIOLOGIE.UNI-MUENCHEN.DE
TELEFON: 089-2180-74800
FAX: 089-2180-74803

7. Übung/Lösung— Mathematik für Studierende der Biologie — 4.12.2019

Abgabe am 10.12.2019 vor der Vorlesung. Die Aufgaben werden in den Tutorien vom 12. und 13. Dezember besprochen. Aktuelle Infos und Übungszettel finden Sie unter:
`http://neuro.bio.lmu.de/teaching/mathe-bio_ws19-20/index.html`

---

1. (Differentialgleichungen, qualitative Analyse) [1 P]
Gegeben ist die Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = -x^4 + 2x^2 + a.$$

(a) Um was für eine Differentialgleichung handelt es sich (Ordnung, Linearität)?

(b) Berechnen Sie alle stationären Lösungen x^* der Differentialgleichung in Abhängigkeit von a. Dazu muss die rechte Seite der Gleichung null gesetzt werden. Überlegen Sie, durch welche Substitution dieses Problem auf eine quadratische Gleichung zurückgeführt und damit gelöst werden kann.

(c) Diskutieren Sie für $a = -0.5$ welche der stationären Lösungen stabil und welche instabil sind.

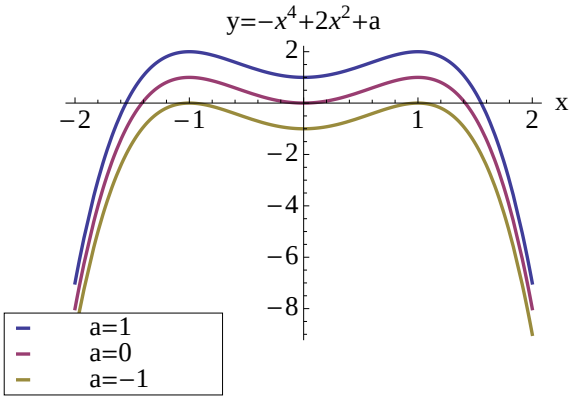
(d) Überlegen Sie für welche Werte von a stationäre Lösungen verschwinden bzw. auftauchen. Für welche Bereiche von a gibt es wieviele stationäre Lösungen? Ändert sich die Stabilität der stationären Lösungen? Skizzieren Sie mit Hilfe dieser Überlegungen die Werte der stationären Lösungen als Funktion von a und markieren Sie Bereiche unterschiedlicher Stabilität.

Lösung:

(a) Nichtlinear, 1. Ordnung.

(b) Berechnen Sie alle stationären Lösungen x^* der DGL in Abhängigkeit von $a \in \mathbf{R}$.

$-x^4+2x^2+a = -(x^2-1)^2+1+a \Rightarrow x^2 = 1\pm\sqrt{1+a}$.
$\Rightarrow \quad x^* = \pm\sqrt{1 \pm \sqrt{1+a}}$
Für $a < -1$ gibt es *keine* reellen stationären Lösungen.
Für $a = -1$ gibt es genau zwei stationäre Lösungen.
Für $-1 < a < 0$ gibt es vier reelle stationäre Lösungen.
Für $a = 0$ gibt es genau drei stationäre Lösungen.
Für $a > 0$ gibt es zwei stationäre Lösungen.



(c) Diskutieren Sie welche der stationären Lösungen stabil und welche instabil sind.
Mit $f(x) = -x^4 + 2x^2 + a \qquad \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = -4x^3 + 4x = 4x(-x^2+1)$;
Also, für $x^* = -\sqrt{1+\sqrt{1+a}}$,
$\left.\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x^*} = 4\sqrt{1+\sqrt{1+a}}\sqrt{1+a} = -4(\sqrt{1+a})x^* > 0$, da $x^* < 0$. $\Rightarrow$ instabil
Für $x^* = -\sqrt{1-\sqrt{1+a}}$,
$\left.\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x^*} = -4\sqrt{1-\sqrt{1+a}}\sqrt{1+a} = 4(\sqrt{1+a})x^* < 0$, da $x^* < 0$. $\Rightarrow$ asymptotisch stabil

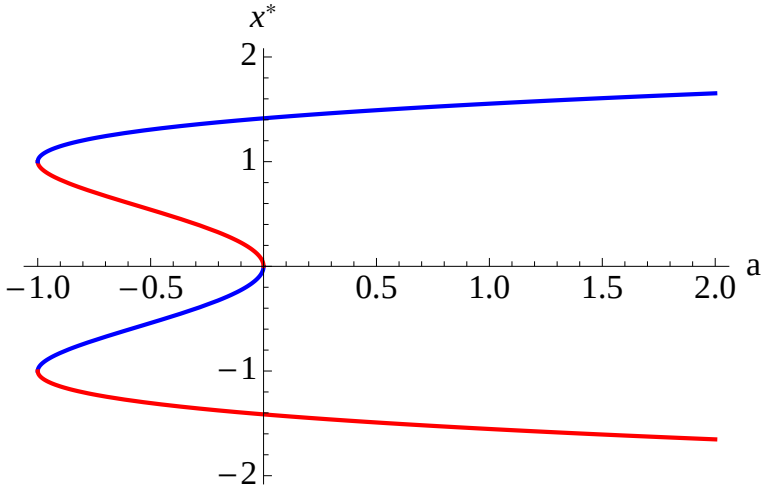
Für $x^* = \sqrt{1-\sqrt{1+a}}$,
$\left.\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x^*} = 4\sqrt{1-\sqrt{1+a}}\sqrt{1+a} = 4(\sqrt{1+a})x^* > 0$, da $x^* > 0$. $\Rightarrow$ instabil

Für $x^* = \sqrt{1+\sqrt{1+a}}$,
$\left.\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x^*} = -4\sqrt{1+\sqrt{1+a}}\sqrt{1+a} = -4(\sqrt{1+a})x^* < 0$, da $x^* > 0$. $\Rightarrow$ asymptotisch stabil

Für $a = 0$ lautet die Differentialgleichung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x = -x^4 + 2x^2$, mit stationären Lösungen $x^* = 0, \pm\sqrt{2}$. Eine Linearisierung um den Fixpunkt $x^* = 0$ mit $x = x^* + \delta x$ führt zu $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta x(t) = 0$. Dieser Marginalfall ist aber nicht asymptotisch stabil. Das Gleiche gilt bei $a = -1$ für die stationären Lösungen $x^* = \pm 1$. Bei den anderen beiden stationären Lösungen für $-1 < a < 0$ gilt eine ähnliche Analyse.

Oder einfacher: Man bemerke, daß die Extrema (Nullstellen von $\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = -4x^3 + 4x = 4x(-x^2+1)$) bei $x = \pm 1$ und $x = 0$ liegen, egal, wie groß a ist. Der Punkt $x = 0$ ist immer ein Minimum, die beiden anderen Extrema sind Maxima (so wie in der Abbildung). Beim negativsten Fixpunkt $x^* = -\sqrt{1+\sqrt{1+a}}$ wächst $f(x)$, also ist dieser Fixpunkt instabil. Hingegen fällt $f(x)$ beim positivsten Fixpunkt $x^* = \sqrt{1+\sqrt{1+a}}$, also ist der entsprechende Fixpunkt asymptotisch stabil.

(d) Zeichnen Sie die stationären Lösungen als Funktion von a und markieren Sie deren Stabilität.
Beachtung der Bifurkationen bei $a = -1$ und $a = 0$ und der Symmetrie der stationären Lösungen ist wichtig, um eine qualitative Skizze anzufertigen.



Stabile stationäre Lösungen in blau, instabile stationäre Lösungen in rot.

---

2. (Differentialgleichungen) [2 P]
Gegeben sei die Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = -\beta \cdot x + \gamma \cdot e^{-\alpha t}$$

mit den Konstanten $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^+$. Als Anfangsbedingung sei $x(0) = 0$. Die Differentialgleichung beschreibt die Aufnahme und den Abbau eines Medikaments, wobei $x(t)$ die Wirkstoffmenge im Blut darstellt. In der Vorlesung wurde bereits gezeigt, dass für $\alpha \neq \beta$ die Lösung

$$x(t) = \frac{\gamma}{\beta - \alpha}\left[e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}\right]$$

lautet.

(a) Führen Sie eine Kurvendiskussion von $x(t)$ durch und berechnen Sie die Taylorentwicklung von $x(t)$ um $t = 0$ bis zur quadratischen Ordnung.

(b) Was geschieht, wenn Sie α und β vertauschen? Was bedeutet dies für die Interpretation der Lösung?

(c) Welche Lösung hat die Differentialgleichung im Spezialfall $\alpha = \beta$.

(d) Diskutieren Sie die Lösung für $\alpha = \beta$.

Lösung:

(a) Inhomogene linear DGL erster Ordnung.

$x(t) = \frac{\gamma}{\beta-\alpha}\left[\mathrm{e}^{-\alpha t} - \mathrm{e}^{-\beta t}\right]$

Wie verhält sie sich für kleine t?
$\lim_{t\to 0} x(t) = 0$

Wie verhält sich $x(t)$ für $t \to \infty$?
$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0 - 0 = 0$

Wo hat sie ihr Maximum?
Extremwert bei $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\gamma}{\beta-\alpha}\left[\mathrm{e}^{-\alpha t} - \mathrm{e}^{-\beta t}\right]\right) = \frac{\gamma}{\beta-\alpha}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^{-\alpha t} - \mathrm{e}^{-\beta t}\right) = \frac{\gamma}{\beta-\alpha}\left(-\alpha\mathrm{e}^{-\alpha t} + \beta\mathrm{e}^{-\beta t}\right) = \frac{\gamma}{1-\frac{\beta}{\alpha}}\mathrm{e}^{-\alpha t} + \frac{\gamma}{1-\frac{\alpha}{\beta}}\mathrm{e}^{-\beta t} = 0$.
Falls $\beta < \alpha$ erhalten wir $\frac{1}{1-\frac{\beta}{\alpha}}\mathrm{e}^{-\alpha t} = \frac{1}{\frac{\alpha}{\beta}-1}\mathrm{e}^{-\beta t} > 0$ und
$\ln\left(\frac{1}{1-\frac{\beta}{\alpha}}\mathrm{e}^{-\alpha t}\right) = \ln\left(\frac{1}{\frac{\alpha}{\beta}-1}\mathrm{e}^{-\beta t}\right)$
$t = \frac{1}{\alpha-\beta}\ln(\frac{\alpha}{\beta})$.
Falls $\beta > \alpha$ erhalten wir $-\frac{1}{1-\frac{\beta}{\alpha}}\mathrm{e}^{-\alpha t} = -\frac{1}{\frac{\alpha}{\beta}-1}\mathrm{e}^{-\beta t} > 0$ und mittels $\ln$ ebenfalls
$t = \frac{1}{\alpha-\beta}\ln(\frac{\alpha}{\beta})$.

Maximum, da $x_E > 0$ (siehe nächster Punkt) und $\lim_{t\to 0} x(t) = \lim_{t\to\infty} x(t) = 0$.

Wie groß ist x_{max}?
$x_E = x(\frac{1}{\alpha-\beta}\ln(\frac{\alpha}{\beta})) = \frac{\gamma}{\beta-\alpha}\left[\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{\alpha-\beta}\ln(\frac{\alpha}{\beta})} - \mathrm{e}^{-\frac{\beta}{\alpha-\beta}\ln(\frac{\alpha}{\beta})}\right] = \frac{\gamma}{\beta-\alpha}\left[(\frac{\beta}{\alpha})^{\frac{\alpha}{\alpha-\beta}} - (\frac{\beta}{\alpha})^{\frac{\beta}{\alpha-\beta}}\right] > 0$, da $\alpha, \beta, \gamma > 0$.

Wie groß ist die Fläche zwischen t-Achse und $x(t)$?
$\int_{t_0=0}^{\infty} x(t)\mathrm{d}t = \frac{\gamma}{\beta-\alpha}\int_0^\infty \left[\mathrm{e}^{-\alpha t} - \mathrm{e}^{-\beta t}\right]\mathrm{d}t = \frac{\gamma}{\beta-\alpha}\left[-\frac{1}{\alpha}\mathrm{e}^{-\alpha t} + \frac{1}{\beta}\mathrm{e}^{-\beta t}\right]_0^\infty = \frac{\gamma}{\beta-\alpha}(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}) = \frac{\gamma}{\alpha\beta}$

Taylorentwicklung von $x(t)$ um $t = 0$ bis zur quadratischen Ordnung:
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = \frac{\gamma}{1-\frac{\beta}{\alpha}}\mathrm{e}^{-\alpha t} + \frac{\gamma}{1-\frac{\alpha}{\beta}}\mathrm{e}^{-\beta t}$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(0) = \frac{\gamma}{1-\frac{\beta}{\alpha}} + \frac{\gamma}{1-\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{\gamma(\alpha-\beta)}{\alpha-\beta} = \gamma$
$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}x(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\gamma}{1-\frac{\beta}{\alpha}}\mathrm{e}^{-\alpha t} + \frac{\gamma}{1-\frac{\alpha}{\beta}}\mathrm{e}^{-\beta t}\right) = -\frac{\alpha\gamma}{1-\frac{\beta}{\alpha}}\mathrm{e}^{-\alpha t} - \frac{\beta\gamma}{1-\frac{\alpha}{\beta}}\mathrm{e}^{-\beta t}$
$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}x(0) = -\frac{\alpha\gamma}{1-\frac{\beta}{\alpha}} - \frac{\beta\gamma}{1-\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{(\alpha^2-\beta^2)\gamma}{\beta-\alpha} = \frac{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)\gamma}{\beta-\alpha} = -(\alpha+\beta)\gamma$

$x(t) = \gamma t - \frac{(\alpha+\beta)\gamma}{2}t^2 + ...$

(b) Die Lösung $x(t)$ bleibt unverändert bei Vertauschung von α und β.

(c) Inhomogene linear DGL erster Ordnung: Lösung durch Variation der Konstanten.

Dazu betrachten wir zuerst die zugeordnete homogene Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_h(t) = -\beta x_h(t) \ , \tag{1}$$

deren allgemeine Lösung wir schon kennen,

$$x_h(t) = c\,\mathrm{e}^{-\beta t} \qquad \text{mit} \qquad c \in \mathbb{R} \ . \tag{2}$$

Um die inhomogene Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = -\beta x(t) + \gamma\,\mathrm{e}^{-\alpha t} \tag{3}$$

zu lösen machen wir den Ansatz

$$x(t) = z(t)x_h(t) = z(t)c\,\mathrm{e}^{-\beta t} \ . \tag{4}$$

Setzen wir diesen Ansatz in (3) ein, so erhalten wir die Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} z(t) = \frac{y(t)}{x_h(t)} = \frac{\gamma \mathrm{e}^{-\alpha t}}{c\ \mathrm{e}^{-\beta t}} = \frac{\gamma}{c} \mathrm{e}^{(\beta-\alpha)t}\ . \tag{5}$$

Diese Differentialgleichung kann exakt integriert werden, wobei allerdings zwei unterschiedliche Fälle getrennt zu betrachten sind.

(A) Der Fall $\alpha \neq \beta$ wurde bereits in der Vorlesung behandelt.

(B) Falls $\alpha = \beta$, so kann

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} z(t) = \frac{y(t)}{x_h(t)} = \frac{\gamma}{c} \tag{6}$$

ebenfalls elementar integriert werden mit folgender Lösung.

$z(t) = \frac{\gamma}{c}(t - t_0) + z(t_0) = \frac{\gamma}{c} t$,
da $t_0 = 0, x(t_0) = 0$ und $z(t_0) = 0$, und daher
$x(t) = \gamma \cdot t \cdot e^{-\beta t}$.

(d) Wie verhält sich $x(t)$ für kleine t?
$\lim_{t\to 0} x(t) = 0$

Wie verhält sich $x(t)$ für $t \to \infty$?
$\lim_{t\to\infty} x(t) = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{t\to\infty} \frac{\gamma}{\beta e^{\beta t}} = 0$

Wo hat sie ihr Maximum?
Extremwert bei $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\gamma \cdot t \cdot e^{-\beta t}\right) = \gamma \cdot e^{-\beta t} - \beta \cdot \gamma \cdot t \cdot e^{-\beta t} = e^{-\beta t}\left(\gamma - \beta \cdot \gamma \cdot t\right) = 0 \implies t = \frac{1}{\beta}$.
Maximum, da $x(\frac{1}{\beta}) > 0$ (siehe nächster Punkt) und $\lim_{t\to 0} x(t) = \lim_{t\to\infty} x(t) = 0$.

Wie groß ist x_{max}?
$x_E = x(\frac{1}{\beta}) = \frac{\gamma}{\beta} \cdot e^{-1} > 0$, da $\gamma, \beta > 0$.

Wie groß ist die Fläche zwischen t-Achse und $x(t)$?
$\int_{t_0=0}^{\infty} x(t)\mathrm{d}t = \gamma \int_0^{\infty} t \cdot e^{-\beta t}\mathrm{d}t$. Partielle Intergration mit $u = t, u' = 1, v' = e^{-\beta t}$ und $v = -\frac{1}{\beta} e^{-\beta t}$ ergibt
$\int_0^{\infty} t \cdot e^{-\beta t}\mathrm{d}t = \left[-\frac{t}{\beta} e^{-\beta t}\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -\frac{1}{\beta} e^{-\beta t}\mathrm{d}t = \left[-\frac{t}{\beta} e^{-\beta t} - \frac{1}{\beta^2} e^{-\beta t}\right]_0^{\infty} = -0 - 0 + 0 + \frac{1}{\beta^2} = \frac{1}{\beta^2}$ und
$\int_{t_0=0}^{\infty} x(t)\mathrm{d}t = \frac{\gamma}{\beta^2}$.

---

3. (Differentialgleichungen) [2 P]
Gegeben ist die Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x = \frac{1}{k\ \cos(l\, x)}$$

mit $k,\ l \in \mathbb{R}$ und $k,\ l \neq 0$.

(a) Um was für eine Differentialgleichung handelt es sich (Ordnung, Linearität)?

(b) Führen Sie eine qualitative Analyse der Differentialgleichung durch.

(c) Welches Verfahren kann man zum Lösen einer solchen Differentialgleichung verwenden?

(d) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

(e) Ist diese Lösung für alle $t > 0$ definiert? Interpretieren Sie Ihr Ergebnis.

Lösung:

(a) Nicht-lineare DLG, 1. Ordnung

(b) $f(x) = \frac{1}{k\,\cos(l\,x)}$ ist nur für $\cos(l\,x) \neq 0$ definiert. Daraus folgt $x \in ((n+1/2)\pi, (n+3/2)\pi)$ für $n \in \mathbb{Z}$, wobei $\lim_{x\to(n+1/2)\pi} f(x) = \pm\infty$. Keine stationäre Lösung vorhanden, da $f(x) \neq 0$ für alle x.

(c) Separation der Variabeln

(d) $$\int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t = k \int_{x(t_0)}^{x(t_1)} \cos(l\,x)\mathrm{d}x$$
$$t_1 - t_0 = \frac{k}{l}\left\{\sin\left[l\,x(t_1)\right] - \sin\left[l\,x(t_0)\right]\right\}$$
$$x(t_1) = \frac{1}{l}\arcsin\left(\frac{l\,(t_1-t_0)}{k} + \sin\left[l\,x(t_0)\right]\right)$$
Wenn man möchte kann man noch (wie in den Übungen oft gemacht) das Ergebnis mit $t := t_1$, $t_0 = 0$ darstellen. Dies soll aber nicht explizit verlangt sein: $x(t) = \frac{1}{l}\arcsin\left(\frac{l\,t}{k} + \sin\left[l\,x(t_0)\right]\right)$.

(e) Die Lösung ist nur auf einem Interval definiert, sodass $\left(\frac{l\,t}{k} + \sin\left[l\,x(t_0)\right]\right)$ im Interval $[-1, 1]$ liegt, da dies dem Defintionsbereich des Arkussinus entspricht.

---

4. (Differentialgleichungen, lineare Stabilitätsanalyse) [2 P]
Betrachten Sie die Differentialgleichungen

A) $\tau \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x(t) = x^2 - 1$

B) $\tau \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x(t) = -\frac{1}{x^3}$

mit der Anfangsbedingung $x(0) = x_0 > 0$ und der Konstanten $\tau > 0$.

(a) Um was für Differentialgleichungstypen handelt es sich (Ordnung, Linearität)?

(b) Skizzieren Sie die Funktionen $f(x) = x^2 - 1$ und $g(x) = -\frac{1}{x^3}$ (mit Beschriftung der Achsen!).

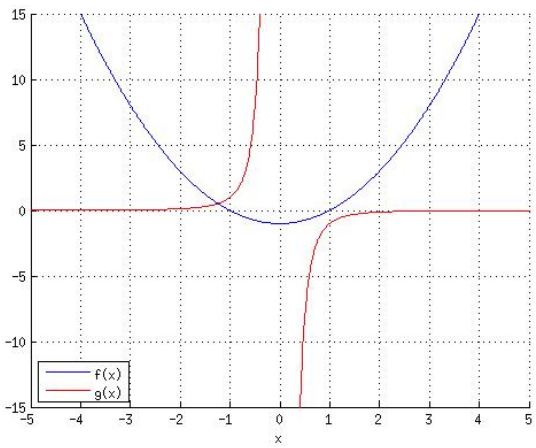
(c) Führen Sie eine qualitative Analyse der Differentialgleichungen durch.

(d) Diskutieren Sie die Stabilität der stationären Lösungen (lineare Stabilitätsanalyse). Versuchen Sie zu ergründen, warum die *lineare* Stabilitätsanalyse für Differentialgleichung B nicht funktioniert. Vergleichen Sie die Ergebnisse mit den Resultaten zur qualitativen Analyse.

Lösung:

(a) A) 1. Ordnung, nichtlinear. B) 1. Ordnung, nichtlinear.

(b)



(c) A) Stationäre Lösung bei $x^* = \pm 1$. Instabil für $x^* = 1$, da $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} > 0$, und asymptotisch stabil für $x^* = -1$, da $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} < 0$. $f(x)$ und $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ sind stetig für alle x und t, daher gibt es eine eindeutige Lösung.

B) Keine stationäre Lösung, da $g(x) \neq 0$ für $x \neq 0$ und für $x = 0$ nicht definiert ist. Für $x \in (-\infty, 0)$ oder $x \in (0, \infty)$ sind $f(x)$ und $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ stetig und es gibt eine eindeutige Lösung.

(d) A) Die allgemeine Lösung der Linearisierung (siehe Skriptum 14.48) lautet für $x^* = -1$

$$x(t) = -1 + Ce^{-\frac{2t}{\tau}}.$$

Man erhält eine exponentiell relaxierende (asymptotisch stabile) Lösung. Für $x^* = 1$:

$$x(t) = 1 + Ce^{\frac{2t}{\tau}}.$$

Man erhält eine exponentiell anwachsende Lösung. Zusätzlich zum qualitativen Verhalten erhält man eine quantitative Beschreibung von x in der Nähe der stationären Lösungen.

B) Es gibt keine stationäre Lösung, daher auch keine Linearisierung um eine stationäre Lösung. Die Ableitung von $g(x)$ divergiert für $x \to 0$ gegen $\pm\infty$ und ist für $x = 0$ nicht definiert.

---

5. (Gedämpfter harmonischer Oszillator) [3 P]

In der Vorlesung wurde die Differentialgleichung des gedämpften harmonischen Oszillators

$$m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}x(t) + \gamma\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) + k \cdot x(t) = 0$$

mit Hilfe eines Exponentialansatzes, $x(t) = A \cdot e^{\lambda t}$, gelöst, wobei sich ergab:

$$\lambda_{1/2} = \frac{1}{2m}\left[-\gamma \pm \sqrt{D}\right] \qquad \text{mit } D = \gamma^2 - 4mk.$$

(a) Für $D < 0$ ergeben sich zwei komplexwertige Lösungen. Formen Sie diese mit Hilfe der Identitäten $e^{ia} = \cos(a) + \mathrm{i}\sin(a)$ und $e^{-ia} = \cos(a) - \mathrm{i}\sin(a)$ in physikalisch sinnvolle reellwertige Lösungen um.

(b) Für $D = 0$ fallen beide Lösungen zusammen und es gilt $\lambda = -\frac{\gamma}{2m}$. Um in diesem Fall eine zweite Lösung zu erhalten (ansonsten kann man die unabhängigen Anfangsbedingungen an x und $\dot{x}$ nicht erfüllen) versuchen wir den Ansatz

$$x(t) = y(t) \cdot e^{\lambda t}.$$

Setzen Sie diesen in die ursprüngliche Differentialgleichung ein, und zeigen Sie unter Verwendung von $m\lambda^2 + \gamma\lambda + k = 0$ und $\lambda = -\frac{\gamma}{2m}$, dass $y(t)$ die Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y(t) = 0$$

erfüllt. Wie lautet die Lösung $y(t)$? Geben Sie damit die Lösung $x(t)$ an.

Lösung:

(a) Für $D < 0$ besitzt die Differentialgleichung zwei *komplexwertige* Lösungen

$$\lambda_{1/2} = \frac{-\gamma \pm \mathrm{i}\sqrt{4mk - \gamma^2}}{2m}\ . \tag{7}$$

Auf den ersten Blick mag das Auftreten komplexer Zahlen verwundern, da $x(t)$ beispielsweise die Auslenkung eines Federpendels beschreibt, und damit eine *reellwertige* Größe ist. Da jedoch die beiden komplexen Zahlen λ_1 und λ_2 zueinander konjugiert-komplexe Zahlen sind, kann man sie auch als

$$\lambda_{1/2} = \kappa \pm \mathrm{i}\omega \quad \text{mit} \quad \kappa = \frac{-\gamma}{2m} \quad \text{und} \quad \omega = \frac{\sqrt{4mk - \gamma^2}}{2m} \tag{8}$$

schreiben. Greift man auf das Superpositionsprinzip zurück und addiert beziehungsweise subtrahiert die beiden entsprechenden Lösungen x_1 und x_2,

$$x_1(t) = \mathrm{e}^{\kappa t + \mathrm{i}\omega t} \quad \text{und} \quad x_2(t) = \mathrm{e}^{\kappa t - \mathrm{i}\omega t} \ , \tag{9}$$

so kann man die Beziehungen zwischen Sinus, Cosinus und komplexer Exponentialfunktion ausnützen. Es gilt nämlich

$$\cos(a) = \frac{\exp(\mathrm{i}a) + \exp(-\mathrm{i}a)}{2}$$

und

$$\sin(a) = \frac{\exp(\mathrm{i}a) - \exp(-\mathrm{i}a)}{2\mathrm{i}} \ .$$

Damit lassen sich zwei *reellwertige* Lösungen formulieren,

$$\tilde{x}_1(t) = \frac{1}{2}[x_1(t) + x_2(t)] = \cos(\omega t)\mathrm{e}^{\kappa t} \tag{10}$$

und

$$\tilde{x}_2(t) = \frac{1}{2\mathrm{i}}[x_1(t) - x_2(t)] = \sin(\omega t)\mathrm{e}^{\kappa t} \ . \tag{11}$$

Damit sind zwei spezielle reellwertige Lösungen gefunden. Die allgemeine Lösung wird dann wieder als $x(t) = C_1\tilde{x}_1(t) + C_2\tilde{x}_2(t)$ geschrieben, die reellen Konstanten C_1 und C_2 aus den jeweiligen Anfangsbedingungen bestimmt.

Physikalisch gesehen treten also bei kleiner Dämpfung des Systems ($\gamma^2 < 4mk$) exponentiell gedämpfte Sinus- bzw. Cosinus-Schwingungen auf. Dabei wird eine Schwingung umso langsamer abklingen, je kleiner die Dämpfungskonstante γ ist. Für den idealisierten Fall $\gamma = 0$ bleibt die Schwingung für alle Zeiten erhalten und die Schwingungsfrequenz ω ist nach (8) durch $\sqrt{k/m}$ gegeben. Mit zunehmender Dämpfung γ verringert sich schließlich die Schwingungsfrequenz ω.

(b) Verschwindet im obigen Beispiel die Diskriminante, so liefert der Ansatz $x(t) = C_1\mathrm{e}^{\lambda t}$ nur *eine* Lösung. Die Differentialgleichung ist aber weiterhin von zweiter Ordnung, so dass zwei Anfangsbedingungen frei gewählt werden können, beispielsweise $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\big|_{t=0}$ und $x(0)$. Die Lösung $x(t) = C_1\mathrm{e}^{\lambda t}$ enthält jedoch mit C_1 nur einen freien Parameter. Was ist zu tun?

Wählt man den Ansatz der Form $x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t} \cdot y(t)$, erhält man mit

$$\begin{aligned}
\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}x(t) &= \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\left(y(t)\cdot e^{\lambda t}\right) = \left(\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}y(t)\right)e^{\lambda t} + y(t)\lambda e^{\lambda t} \\
\frac{\mathsf{d}^2}{\mathsf{d}t^2}x(t) &= \left(\frac{\mathsf{d}^2}{\mathsf{d}t^2}y(t)\right)e^{\lambda t} + 2\left(\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}y(t)\right)\lambda e^{\lambda t} + y(t)\lambda^2 e^{\lambda t} \\
&= \left(\frac{\mathsf{d}^2}{\mathsf{d}t^2}y(t)\right)e^{\lambda t} + 2\lambda\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}x(t) - \lambda^2 x(t)
\end{aligned}$$

mit $m\lambda^2 + \gamma\lambda + k = 0$ (Einsetzen des Exponentialansatzes in die ursprüngliche Differentialgleichung), $\lambda = -\frac{\gamma}{2m}$ und $\gamma^2 = 4mk$ (folgt aus $D = 0$) die Differentialgleichung

$$\begin{aligned}
m\frac{\mathsf{d}^2}{\mathsf{d}t^2}x(t) + \gamma\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}x(t) + k\cdot x(t) &= 0 \\
m\left(\frac{\mathsf{d}^2}{\mathsf{d}t^2}y(t)\right)e^{\lambda t} + (\gamma + 2m\lambda)\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}x(t) + (k - m\lambda^2)\cdot x(t) &= 0 \\
m\left(\frac{\mathsf{d}^2}{\mathsf{d}t^2}y(t)\right)e^{\lambda t} + 0\cdot\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}x(t) + 0\cdot\cdot x(t) &= 0 \\
\frac{\mathsf{d}^2}{\mathsf{d}t^2}y(t) &= 0.
\end{aligned}$$

Definiert man $v(t) = \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}y(t)$ erhält man die Differentialgleichung erster Ordnung $\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}v(t) = 0$ und die Lösungen $v(t) = C_2$, $y(t) = C_1 + C_2 t$ und $x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}(C_1 + C_2 t)$. Für $C_2 = 0$ entspricht dies genau der schon bekannten Lösung, für $C_2 \neq 0$ hat man die gesuchte zweite Lösung gefunden. Physikalisch nennt man diese spezielle Situation auch "aperiodischen Grenzfall", da hier gerade keine Oszillationen mehr auftreten.

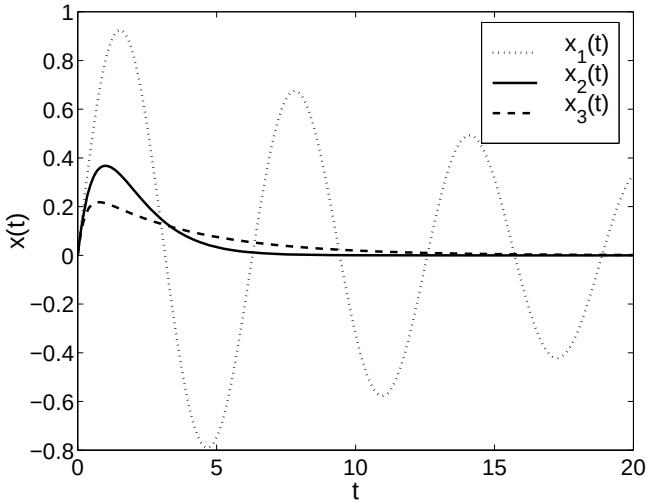


Illustration der verschiedenen Lösungstypen eines gedämpften harmonischen Oszillators. Drei Lösungen der Differentialgleichung $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}x(t) + \gamma\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = -x(t)$ mit $m = k = 1$ zum Anfangswert $x(0) = 0$ und $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\big|_{t=0} = 1$ sind dargestellt. Der Lösungstyp hängt vom Wert der Diskrimante D ab (hier $D = \gamma^2 - 4$). Für $\gamma^2 < 4$ ist die Diskrimante negativ und man erhält eine gedämpfte harmonische Schwingung wie $x_1(t)$ (mit $\gamma = 0.1$). Für $\gamma^2 = 4$ verschwindet die Diskriminante. Die entsprechende Lösung $x_2(t)$ wird auch als aperiodischer Grenzfall bezeichnet. Ist schließlich $\gamma^2 > 4$, so ist die Diskrimante positiv. Das Beispiel $\gamma = 4$ führt zur stark überdämpften Lösung $x_3(t)$. Der qualitative Unterschied zwischen den beiden letzten Lösungen — $x_2(t)$ ist eine Lösung der Form $te^{\lambda t}$, $x_3(t)$ ist die Differenz zweier Exponentialfunktionen — ist nicht sichtbar, aus dem Vergleich aller drei Lösungen wird jedoch deutlich, dass die maximal erreichte Schwingungsamplitude stark von der Dämpfung γ abhängt.