LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

BIOZENTRUM DER LMU
DEPARTMENT BIOLOGIE II
LEHRSTUHL FÜR COMPUTATIONAL NEUROSCIENCE

Skript zur Vorlesung
Mathematik für Biologen

Dieses Skript ist in mehr als fünfzehn Jahren im Rahmen einer gleichlautenden Vorlesung an der Humboldt-Universität zu Berlin und der Ludwig-Maximilians-Universität München entstanden. Mit außergewöhnlichem Engagement haben viele wissenschaftliche Mitarbeiter, Tutoren und Studenten dazu beigetragen, wie auch meine Kollegen Prof. Dr. Hanspeter Herzel und Prof. Dr. Richard Kempter vom Institut für Theoretische Biologie der HU Berlin; in München haben Dr. Stefan Häusler und Dr. Kay Thurley das Skript weiter ausgearbeitet.

Ihnen allen herzlichen Dank!

Über weitere Anregungen inhaltlicher und gestalterischer Art sowie Hinweise zu den sicher noch nicht restlos aufgedeckten Druckfehlern würde ich mich sehr freuen.

Planegg-Martinsried, im Oktober 2019

Prof. Dr. Andreas V.M. Herz

Prof. Dr. Andreas V.M. Herz
Lehrstuhl für Computational Neuroscience
Ludwig-Maximilians-Universität München
Großhaderner Str. 2, D-82152 Planegg-Martinsried

Tel: 089-2180-74800
e-mail: herz@bio.lmu.de

Wozu Mathematik in der Biologie?

Gejubelt haben wohl nur wenige, als sie Mathematik im Pflichtprogramm des Biologiestudiums entdeckten. Endlich fertig mit der Schule, endlich fertig mit der Mathematik und nun das. Wozu überhaupt Mathematik, wenn man doch Biologie studieren möchte?

Zum Erbsenzählen a la Gregor Mendel (1822-1884, Naturforscher, Mönch und studierter Mathematiker) genügen die in der Grundschule erworbenen Rechenfähigkeiten. Aber schon bei der statistischen Analyse seiner Messungen gerät man rasch an die Grenzen von erst in der Oberstufe behandelten mathematischen Methoden.

Warum aber überhaupt Statistik? Wir wollen diese Frage hier nicht im Detail beantworten, uns jedoch kurz mit den Grundideen der Statistik vertraut machen. In der Statistik werden Daten von experimentellen Messungen oder Beobachtungen analysiert. Solch ein Datensatz kann aus Schnabellängen von Vögeln, Geschlechterverhältnissen bei Ameisen oder den bekannten Mendelschen Erbsen bestehen. Aus diesem Datensatz versucht man Gesetzmäßigkeiten abzulesen. Dazu stellt man eine Hypothese auf. Die Statistik gibt dann Auskunft darüber, ob die gemessenen Daten mit der Hypothese verträglich sind oder nicht. So sind auch die Mendelschen Gesetze zuerst als Hypothese formuliert und anschliessend durch statistische Analysen bestätigt worden.

Ein Grundproblem jeder statistischen Analyse besteht darin, dass gemessene Daten immer mehr oder weniger zufällig sind. Deshalb kann es passieren, dass bestimmte Datensätze vollkommen falsche Gesetzmäßigkeiten suggerieren. In der Statistik wird der Begriff Zufall nun mathematisiert. Man rechnet mit Wahrscheinlichkeiten. Als Ergebnis einer statistischen Analyse erhält man beispielsweise, dass ein Datensatz die Mendelschen Gesetze mit einer Wahrscheinlichkeit von 99% bestätigt.

Erst die Statistik befähigt uns, derartig konkrete Aussagen zu treffen und damit auch quantitativ abzuschätzen, wie wirksam beispielsweise ein Medikament ist, ob sich die Erde aufgrund des Einflusses von Treibhausgasen erwärmt, oder ob in der Nähe von Kernkraftwerken Leukämieerkrankungen mit signifikanter Häufung auftreten ...

Mathematik in der Biologie bedeutet jedoch mehr als "nur" Statistik. Ein Grund dafür besteht darin, dass viele biologische Prozesse nicht mehr intuitiv verständlich sind. Bei der Beschreibung eines biologischen Prozesses kommt man deshalb oft gar nicht umhin, ein mathematisches Modell aufzustellen. Erst dadurch ist ein Verständnis des Prozesses und damit auch eine Vorhersage über seine zukünftige Entwicklung möglich. Und erst dies ermöglicht es, Prozesse in der Biotechnologie oder der Medizin kontrolliert ablaufen zu lassen. Mit einem mathematischen Modell kann man auch simulieren, welche Auswirkungen Eingriffe in die Natur haben. Es ist deshalb nicht verwunderlich, dass die Mathematik ein wichtiges Hilfsmittel der modernen Biowissenschaften geworden ist, von der Biotechnologie bis hin zur nachhaltigen Bewirtschaftung biologischer Ressourcen.

Schließlich erlaubt die mathematische Modellierung formaläquivalente Beschreibungen von auf den ersten Blick höchst unterschiedlichen Phänomenen. So sind auf mathematischer Ebene viele Aspekte der Dynamik von Bakterienpopulationen, biochemischen Reaktionen und neuronalen Systemen nahezu identisch. Die mathematische Abstraktion ermöglicht hier einen sonst nicht denkbaren Transfer von theoretischen Resultaten über die Grenzen einzelner biologischer Fachgebiete hinweg. Die Mathematik hat deshalb eine wichtige Brückenfunktion sowohl zwischen experimentellen und theoretischen Ansätzen, als auch zwischen verschiedenen biologischen Einzeldisziplinen.

In der Vorlesung "Mathematik für Biologen" wollen wir Ihnen aus den genannten Gründen die wichtigsten mathematischen Konzepte und Begriffe nahebringen. Wo es sich anbietet, werden wir biologische Anwendungen diskutieren. Erwarten Sie aber nicht zu viel: Es wäre nicht sinnvoll, jede Definition, jede Rechenregel, jeden Lehrsatz mit einem mehr oder weniger aufgezwungenen Beispiel zu garnieren. Vielmehr haben wir versucht, ausgesuchte Beispiele, die für Ihr weiteres Biologiestudium relevant sind, im Detail zu besprechen. Falls Sie trotzdem an der einen oder anderen Stelle gerne weitere Beispiele sehen würden, oder falls sie anderweitig Verbesserungsvorschläge haben, dann lassen Sie uns dies bitte wissen: der nächste Jahrgang wird es Ihnen mit Sicherheit danken!

Lehrbücher

Die folgenden zwei Listen sollen interessierten Studenten Anhaltspunkte geben, um nach alternativen wie auch tiefergehenden Darstellungen mathematischer Methoden zu suchen, die für Biologen relevant sind. Ein Anspruch auf Vollständigkeit wird nicht erhoben.

Einführende Werke

Klaus Fritzsche:
Mathematik für Einsteiger.
Spektrum Akademischer Verlag

Arnfried Kemnitz:
Mathematik zum Studienbeginn.
Vieweg

Christian B. Lang & Norbert Pucker:
Mathematische Methoden in der Physik.
Spektrum Akademischer Verlag

Lothar Papula:
Mathematische Formelsammlung.
Viewegs Fachbücher der Technik

Adolf Riede:
Mathematik für Biologen.
Vieweg

Wolfgang Schäfer, Kurt Georgi & Gisela Trippler:
Mathematik–Vorkurs.
Teubner Studienbücher

Werner Timischl:
Biomathematik – Eine Einführung für Biologen und Mediziner.
Springer-Verlag

Herbert Vogt:
Grundkurs Mathematik für Biologen.
Teubner Studienbücher

Weiterführende Werke

Ilja N. Bronstein, K.A. Semendjajew, Gerhard Musiol, Heiner Muehlig:
Taschenbuch der Mathematik.
Verlag Harri Deutsch

Leah Edelstein-Keshet:
Mathematical Models in Biology.
Birkhäuser-Verlag

Helmut Fischer & Helmut Kaul:
Mathematik für Physiker.
Teubner-Verlag

Karl Peter Hadeler:
Mathematik für Biologen.
Springer-Verlag

Robert M. May:
Stability and Complexity in Model Ecosystems.
Princeton University Press

James D. Murray:
Mathematical Biology.
Springer-Verlag

Lee A. Segel:
Modeling dynamic phenomena in molecular and cellular biology.
Cambridge University Press

Werner Timischl:
Biostatistik –
Eine Einführung für Biologen.
Springer-Verlag

Edward K. Yeagers, Ronald W. Shonkwiler & James V. Herod:
An Introduction to the Mathematics of Biology (with Computare Algebra Models).
Birkhäuser-Verlag

Inhaltsverzeichnis

Wozu Mathematik in der Biologie? **III**

Lehrbücher **V**

Inhaltsverzeichnis **VII**

1 Grundlagen **1**
1.1 Natürliche, ganze und rationale Zahlen . . . 1
1.2 Ungleichungen . . . 2
1.3 Rationale und reelle Zahlen . . . 3
1.3.1 Rationale Zahlen . . . 3
1.3.2 Reelle Zahlen . . . 4
1.3.3 Intervalle . . . 6
1.4 Betrag einer reellen Zahl . . . 6
1.5 Summen . . . 7
1.5.1 Eine Anwendung: Die geometrische Reihe . . . 9
1.6 Vollständige Induktion . . . 10
1.7 Produkte . . . 10
1.8 Aufgaben . . . 11

2 Funktionen und ihre graphische Darstellung **15**
2.1 Funktionen . . . 15
2.2 Komposition von Funktionen . . . 20
2.2.1 Translation . . . 20
2.2.2 Streckung und Stauchung . . . 22
2.2.3 Spiegelung . . . 22
2.2.4 Allgemeine Kompositionen . . . 24
2.3 Einfache spezielle Funktionen . . . 24
2.3.1 Lineare Funktionen . . . 24
2.3.2 Quadratische Funktionen . . . 25
2.4 Quadratische Gleichungen . . . 26
2.5 Aufgaben . . . 28

3 Potenzen und verwandte Funktionen **31**
3.1 Einfache Potenzen und Wurzeln . . . 32
3.1.1 Potenzen natürlicher Zahlen . . . 32
3.1.2 Potenzfunktion . . . 32
3.1.3 Wurzelfunktion . . . 33
3.2 Polynome . . . 33
3.3 Potenzen mit beliebigen reellen Exponenten . . . 34
3.3.1 Mathematik und Biologie: Skalengesetze . . . 36
3.4 Exponentialfunktion und Logarithmus . . . 36
3.4.1 Exponentialfunktion . . . 36
3.4.2 Logarithmus . . . 38

3.4.3 Umrechnung zwischen verschiedenen Basen . . . 39
3.4.4 Mathematik und Biologie: Exponentieller Zerfall . . . 40
3.5 Der Binomische Satz . . . 41
3.5.1 Anwendungen des binomischen Satzes . . . 45
3.6 Aufgaben . . . 46

4 Folgen **51**
4.1 Einführung . . . 51
4.2 Monotonie und Beschränktheit . . . 54
4.3 Aufgaben . . . 56

5 Grenzwerte **59**
5.1 Konvergenz und Divergenz . . . 60
5.2 Eigenschaften von Grenzwerten . . . 62
5.3 Monotone Konvergenz . . . 64
5.4 Reihen . . . 67
5.5 Divergenz gegen Unendlich . . . 68
5.6 Aufgaben . . . 70

6 Iterierte Abbildungen **71**
6.1 Lineare Iterierte Abbildungen 1. Ordnung . . . 75
6.1.1 Homogene Iterierte Abbildungen 1. Ordnung . . . 75
6.1.2 Inhomogene Iterierte Abbildungen 1. Ordnung . . . 76
6.2 Mathematik und Biologie: Populationsmodelle . . . 79
6.2.1 Zellpopulation mit exponentiellem Wachstum . . . 79
6.2.2 Holzschlag im Wald I . . . 80
6.2.3 Holzschlag im Wald II . . . 81
6.2.4 Nochmals: Das Populationsmodell von Fibonacci . . . 82
6.3 Aufgaben . . . 84

7 Nichtlineare Iterierte Abbildungen **87**
7.1 Aufgaben . . . 91

8 Grenzwerte von Funktionen und Stetigkeit **93**
8.1 Grenzwerte reeller Funktionen . . . 93
8.1.1 Definitionen . . . 93
8.1.2 Rechenregeln . . . 96
8.1.3 Grenzwert von $f(x)$ für x gegen ∞ und $-\infty$ . . . 97
8.2 Stetigkeit . . . 98
8.2.1 Sätze über stetige Funktionen . . . 99
8.3 Aufgaben . . . 102

9 Differentiation **105**
9.1 Definition und geometrische Interpretation . . . 105
9.1.1 Geometrische Interpretation und Tangentengleichung . . . 108
9.1.2 Zusammenhang von Stetigkeit und Differenzierbarkeit . . . 109
9.2 Ableitungsregeln . . . 110
9.2.1 Summen-, Produkt- und Quotientenregel . . . 110
9.2.2 Ableitung von Funktion und Umkehrfunktion . . . 112
9.2.3 Kettenregel . . . 114
9.3 Exponential- und Logarithmusfunktion . . . 115
9.3.1 Ableitung der Exponentialfunktion . . . 115
9.3.2 Potenzreihenentwicklung der Exponentialfunktion . . . 117
9.3.3 Ableitung der Logarithmusfunktion . . . 118
9.4 Höhere Ableitungen . . . 119

9.5 Taylor-Entwicklung . . . 119
9.6 Kurvendiskussion . . . 122
9.6.1 Ein Beispiel zur Kurvendiskussion: $f(x) = (1+x)\sqrt{1-x^2}$ . . . 125
9.7 Aufgaben . . . 126

10 Trigonometrische Funktionen **131**
10.1 Winkelmessung und ebene Dreiecke . . . 131
10.2 Sinus und Cosinus . . . 134
10.2.1 Näherungsformeln für kleine Winkel . . . 135
10.2.2 Sinus . . . 135
10.2.3 Cosinus . . . 136
10.2.4 Werte von Sinus und Cosinus für spezielle Argumente . . . 137
10.2.5 Additionstheoreme . . . 138
10.2.6 Ableitung von Sinus und Cosinus . . . 140
10.2.7 Taylorentwicklung der Sinus- und Cosinus-Funktion . . . 141
10.3 Tangens und Cotangens . . . 142
10.4 Umkehrfunktionen . . . 143
10.4.1 Arcussinus . . . 143
10.4.2 Arcuscosinus . . . 143
10.4.3 Arcustangens und Arcuscotangens . . . 144
10.5 Aufgaben . . . 145

11 Komplexe Zahlen **147**
11.1 Definition der Imaginären Einheit . . . 147
11.2 Arithmetische Darstellung und Gaußsche Zahlenebene . . . 148
11.3 Addition und Subtraktion . . . 149
11.4 Polarkoordinatendarstellung . . . 150
11.5 Multiplikation . . . 151
11.6 Division . . . 152
11.6.1 Taylorentwicklung der komplexen Exponentialfunktion . . . 154
11.7 Aufgaben . . . 155

12 Integralrechnung **159**
12.1 Einführung und Definition . . . 159
12.2 Eigenschaften des bestimmten Integrals . . . 160
12.3 Integration und Differentiation . . . 162
12.4 Integrale spezieller Funktionen . . . 164
12.5 Rechenbeispiele zur Integration . . . 165
12.6 Uneigentliche Integrale . . . 166
12.7 Partielle Integration . . . 167
12.8 Substitution . . . 168
12.9 Aufgaben . . . 170

13 Differentialgleichungen **173**
13.1 Qualitative Analyse von Differentialgleichungen . . . 176
13.2 Lösung durch Separation der Variablen . . . 181
13.3 Weitere Differentialgleichungstypen . . . 183
13.3.1 Gekoppelte Differentialgleichungen . . . 183
13.3.2 Differentialgleichungen höherer Ordnung . . . 183
13.3.3 Partielle Differentialgleichungen . . . 185
13.4 Ausblick . . . 185
13.4.1 Eindeutigkeit von Lösungen . . . 185
13.4.2 Fortsetzbarkeit von Lösungen . . . 186
13.4.3 Numerische Integration von Differentialgleichungen . . . 187

13.5 Aufgaben 188

14 Lineare Differentialgleichungen 189
14.1 Homogene Gleichungen: Separation der Variablen 191
14.2 Inhomogene Gleichungen: Variation der Konstanten 192
14.3 Lösung homogener und inhomogener Gleichungen 196
14.4 Exponentialansatz 196
14.5 Lineare Stabilitätsanalyse 201
14.6 Aufgaben 202

15 Lineare Gleichungen 203
15.1 Lineare Gleichungen 205
15.1.1 Homogene und Inhomogene Gleichungssysteme 207
15.1.2 Lösung für ein System mit zwei Gleichungen 208
15.2 Gaußsches Eliminationsverfahren 209
15.3 Aufgaben 211

16 Matrizen 213
16.1 Quadratische Matrizen 215
16.2 Rechenregeln für Matrizen 217
16.2.1 Addition und Subtraktion 217
16.2.2 Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar 218
16.2.3 Multiplikation eines Vektors mit einer Matrix 219
16.2.4 Ein Spezialfall: Das Skalarprodukt zweier Vektoren 220
16.2.5 Geometrische Interpretation der Multiplikation eines Vektors mit einer Matrix 222
16.2.6 Multiplikation zweier Matrizen 224
16.2.7 Rechenregeln der Matrizenmultiplikation 228
16.3 Aufgaben 229

17 Determinanten 233
17.1 Determinanten: Eigenschaften, Rechenregeln 237
17.2 Matrixinversion 238
17.3 Cramersche Regel 239
17.4 Eigenwertproblem 241
17.5 Reellwertige, symmetrische Matrizen 243
17.6 Aufgaben 245

18 Funktionen mehrerer Variabler 249
18.1 Einführung 249
18.1.1 Beispiele für Funktionen mehrerer Variabler 249
18.1.2 Visualisierung von Funktionen mehrerer Variabler 250
18.1.3 Dynamik 251
18.1.4 Wichtige Teilmengen des $\mathbf{R}^n$ 252
18.1.5 Schlussbemerkung 252
18.2 Folgen, Grenzwert und Stetigkeit 253
18.3 Partielle Ableitungen 254
18.4 Potenzreihen und Taylorentwicklung im $\mathbf{R}^n$ 258
18.5 Totales Differential und Richtungsableitung 260
18.6 Lokale Extrema in $D = 2$ Dimensionen 262
18.6.1 Diskussion des Satzes (18.37) 263
18.7 Ausblick 266
18.8 Aufgaben 266

A Lösungen der Aufgaben 271

A.1 Aufgaben zu Kapitel 1 271
A.2 Aufgaben zu Kapitel 2 276
A.3 Aufgaben zu Kapitel 3 286
A.4 Aufgaben zu Kapitel 4 297
A.5 Aufgaben zu Kapitel 5 300
A.6 Aufgaben zu Kapitel 6 304
A.7 Aufgaben zu Kapitel 7 312
A.8 Aufgaben zu Kapitel 8 312
A.9 Aufgaben zu Kapitel 9 317
A.10 Aufgaben zu Kapitel 10 333
A.11 Aufgaben zu Kapitel 11 340
A.12 Aufgaben zu Kapitel 12 350
A.13 Aufgaben zu Kapitel 13 360
A.14 Aufgaben zu Kapitel 14 366
A.15 Aufgaben zu Kapitel 15 367
A.16 Aufgaben zu Kapitel 16 371
A.17 Aufgaben zu Kapitel 17 380
A.18 Aufgaben zu Kapitel 18 391

Kapitel 1

Grundlagen

1.1 Natürliche, ganze und rationale Zahlen

Zahlen veranschaulicht man sich am besten mit Hilfe von Punkten auf einer geraden Linie, der **Zahlengeraden**. Dazu setzt man einen beliebigen Punkt dieser Geraden als Nullpunkt 0 fest, einen zweiten als den Punkt 1. Die Punkte $2, 3, \ldots$ findet man, indem man 2-mal, 3-mal etc. die Strecke von 0 nach 1 vom Nullpunkt aus über die 1 hinaus abträgt. Die negativen Zahlen werden in gleicher Weise in der entgegengesetzten Richtung abgetragen.

Die Zahlen $1, 2, 3, \ldots$ werden **natürliche Zahlen** genannt. Zusammen mit den Zahlen $0, -1, -2, -3, \ldots$ bilden sie die **ganzen Zahlen**. Brüche bezeichnet man in der Mathematik auch als **rationale Zahlen**. Auf der Zahlengerade können sie mit Hilfe des Strahlensatzes eingetragen werden — siehe Abbildung 1.1.

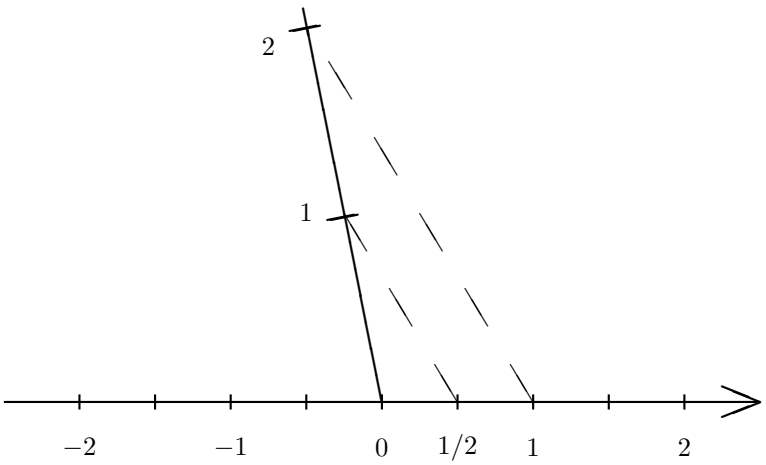


Abbildung 1.1: Die Zahlengerade und das Einzeichnen von Brüchen.

Damit erhalten wir bis jetzt die folgenden Zahlenmengen:

N Menge der **natürlichen Zahlen**: $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$

$\mathbf{N}_0$ Menge der **natürlichen Zahlen inklusive 0**

Z Menge der **ganzen Zahlen**: $\mathbf{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$

Q Menge der **rationalen Zahlen**. Eine rationale Zahl r ist ein Bruch der Form $r = p/q$ mit $p, q \in \mathbf{Z}$ und $q \neq 0$.

BEMERKUNG: Wie schon an den obigen Beispielen sichtbar, können Mengen in der Mathematik dadurch angegeben werden, dass man alle ihre Elemente mit einer geschweiften Klammer zusammenfaßt. Will man bei der Betrachtung einer Zahlenmenge M eine bestimmte Zahl x *nicht* miteinbeziehen, so schreibt man für die resultierende Zahlenmenge $M\backslash\{x\}$. So ist beispielsweise $\mathbf{Z}\backslash\{0\}$ die Menge aller ganzen Zahlen ohne die Null.

Rechenregeln für Brüche:
Die Zahlen a, b, c, d seien ganze Zahlen mit $b \neq 0$ und $d \neq 0$. In Gleichung (1.4) sei zusätzlich $c \neq 0$. Dann gilt:

Multiplikation
$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \tag{1.1}$$

insbesondere: **Erweitern**
$$\frac{a}{b} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} \tag{1.2}$$

und: **Kürzen**
$$\frac{a \cdot d}{b \cdot d} = \frac{a}{b} \tag{1.3}$$

Division
$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \tag{1.4}$$

Addition
$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d} \tag{1.5}$$

Subtraktion
$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d} \tag{1.6}$$

SELBSTTEST: Was ist die Summe von 1/3 und 1/4? Weiterhin: Wie lauten die Differenz, das Produkt und der Quotient dieser beiden Zahlen?

BEMERKUNG: In Zukunft werden wir statt $a \cdot b$ auch einfach ab schreiben.

1.2 Ungleichungen

Rationale Zahlen können auf der Zahlengeraden dargestellt werden. Sie lassen sich also ihrer Größe nach **ordnen**, wobei für je zwei Zahlen x und y genau eine der folgenden drei Relationen gilt: $x < y$, $x = y$ oder $y < x$.[1]

Statt $y < x$ kann man auch $x > y$ schreiben. Der Ausdruck $x \leq y$ und der zu ihm äquivalente Ausdruck $y \geq x$ bedeuten, dass $x < y$ oder $x = y$.

Aus der Möglichkeit, Zahlen zu ordnen, folgt die Möglichkeit, sie durch **Ungleichungen** in Verbindung zu setzen. Es gelten die folgenden

[1] Auf den ersten Blick mag dies trivial erscheinen: Auf der Zahlengerade liegt eine Zahl x nun eben entweder links von einer zweiten Zahl y, oder rechts von ihr, oder beide Zahlen sind identisch. Wenn Sie Zahlen aber beispielsweise auf einer Kreislinie anordnen würden, wäre es nicht mehr möglich von "links" und "rechts" zu sprechen ...

Rechenregeln für Ungleichungen:
Sei $x, y, v, w \in \mathbf{Q}$ und $n \in \mathbf{N}$. Dann gilt:

$$x < y \quad \text{und} \quad y < z \quad \Longrightarrow \quad x < z \tag{1.7}$$

$$x < y \quad \Longrightarrow \quad x + v < y + v \tag{1.8}$$

$$x < y \quad \text{und} \quad 0 < v \quad \Longrightarrow \quad vx < vy \tag{1.9}$$

$$x < y \quad \text{und} \quad 0 > v \quad \Longrightarrow \quad vx > vy \tag{1.10}$$

$$(1.10) \text{ mit } v = -1: \quad x < y \quad \Longrightarrow \quad -x > -y \tag{1.11}$$

$$0 < x < y \quad \Longrightarrow \quad 0 < x^n < y^n \tag{1.12}$$

Hierbei steht die Symbolfolge "$A \Longrightarrow B$" für "Aus Aussage A folgt Aussage B". Entsprechend bedeutet "$A \Longleftrightarrow B$": "Aussage A gilt genau dann wenn Aussage B gilt." In diesem Fall nennt man die Aussagen A und B auch gleichwertig oder **äquivalent** (von lateinisch "aequus": gleich und "valere": Wert sein).

Die obigen Rechenregeln erscheinen auf den ersten Blick sehr einfach, da wir intuitiv mit dem Begriff 'Zahl' das Konzept 'Zahlengerade' verbinden.[2] Trotzdem schleichen sich hier immer wieder Flüchtigkeitsfehler ein, gerade bei Umformungen, in denen Regel (1.10) verwendet werden müsste, man aber übersehen hat, dass $v < 0$ und deshalb fälschlicherweise Regel (1.9) angewendet hat → Üben!

BEISPIEL:

$$-x > 7 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x < -7$$

1.3 Rationale und reelle Zahlen

1.3.1 Rationale Zahlen

Um uns eine Vorstellung von der Mächtigkeit der rationalen Zahlen zu machen, stellen wir folgende Frage: Wie viele rationale Zahlen liegen zwischen zwei vorgegebenen rationalen Zahlen x und y mit $x < y$?

Antwort: Die beiden vorgegebenen rationalen Zahlen seien $x = a/b$ und $y = c/d$. Dann gilt für das **arithmetische Mittel** $z = (x + y)/2$ der beiden Zahlen:

$$z = \frac{x+y}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) = \frac{ad+bc}{2bd} \ .$$

[2] Die zur Beschreibung von mit einer Richtung behafteten Größen heißen **Vektoren** und lassen sich *nicht* ordnen. Dies sieht man rasch anhand des aus der Physik bekannten Kraftvektors: Wenn eine Kraft konstanter Größe einmal nach vorne, ein anderes Mal nach unten wirkt, ergeben sich zwei unterschiedliche Kraftvektoren, ohne dass man sagen könnte, welcher der beiden Vektoren "größer" ist. Auch die sogenannten **komplexen Zahlen** lassen sich nicht auf einer Zahlengerade anordnen — wir werden darauf in einem späteren Kapitel zurückkommen. Jedem Vektor läßt sich jedoch eine skalare Größe, seine Länge, zuordnen, die wieder eine geordnete Größe ist. Information über die Richtung des Vektors geht dabei allerdings verloren. Gleiches gilt für komplexe Zahlen, wobei man hier statt von der Länge vom "Betrag" spricht.

Also ist z ebenfalls eine rationale Zahl. Als arithmetisches *Mittel* erfüllt $z = (x + y)/2$ für $x < y$ auch

$$x < z < y \ ,$$

wie man durch Einsetzen von $z = (x + y)/2$ sieht.

Wir halten fest: Das arithmetische Mittel zweier rationaler Zahlen x und y ist wieder eine rationale Zahl und liegt *zwischen* x und y. Wiederholen wir das Argument mit x und z, so können wir schlußfolgern, dass auch das arithmetische Mittel von x und z wieder eine rationale Zahl ist, die zwischen den beiden ursprünglichen Zahlen x und y liegt. Da man diesen Schritt beliebig oft wiederholen kann, muss gelten:

Satz:
Zwischen zwei rationalen Zahlen liegen unendlich viele weitere rationale Zahlen.

SELBSTTEST: Versuchen Sie, sich den Inhalt des letzten Satzes bildlich vorzustellen. Nehmen Sie dazu als Ausgangszahlen $x = 1$ und $y = 2$. Welche Folge von arithmetischen Mitteln erhalten Sie?

Welche Schlussfolgerung ziehen Sie für die Struktur der rationalen Zahlen auf der Zahlengerade? Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem folgenden Resultat:

1.3.2 Reelle Zahlen

Es existieren unendlich viele (!) Punkte auf der Zahlengerade, die *keine* rationalen Zahlen sind. Beispielsweise gilt:

Satz:
Es gibt keine rationale Zahl x mit $x^2 = 2$. Oder: $\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl.

Beweis:

Vorbemerkung: Zwei ganze Zahlen $p, q \in \mathbf{N}$ heißen **teilerfremd**, wenn ihre Zerlegung in Primzahlfaktoren keine gleichen Faktoren enthält. Ein Beispiel: 15 ($= 3 \times 5$) und 8 ($= 2 \times 2 \times 2$) sind teilerfremd. 15 und 25 ($= 5 \times 5$) sind nicht teilerfremd.

1. Schritt: x ist keine ganze Zahl.
Beweis: x kann keine ganze Zahl sein, da das Quadrat einer Zahl mit dem Betrag der Zahl wächst. Es gilt:

$$\begin{aligned} 1 \cdot 1 &= 1 < 2 \ , \\ 2 \cdot 2 &= 4 > 2 \ , \\ 3 \cdot 3 &= 9 > 2 \quad \text{etc. und} \\ -1 \cdot -1 &= 1 < 2 \ , \\ -2 \cdot -2 &= 4 > 2 \ , \\ -3 \cdot -3 &= 9 > 2 \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

2. Schritt: x ist keine rationale Zahl.
Beweis durch Widerspruch: Wir nehmen an, x sei eine rationale Zahl, $x \in \mathbf{Q}$. Wegen (1) wissen wir schon, dass x keine ganze Zahl ist. Nach Primzahlzerlegung und Kürzen muß x deshalb als Quotient $x = p/q$ zweier teilerfremder Zahlen $p, q \in \mathbf{N}$ geschrieben werden können. Dann ist aber $x^2 = p^2/q^2$ ebenfalls teilerfremd, also sicher keine ganze Zahl wie 2. Widerspruch! Also kann die Wurzel aus 2, $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl sein. [3] □

[3] Dieser zweite Schritt ist als *Widerspruchsbeweis* geführt, und zeigt deutlich die zwingende Logik einer mathematischen Beweisführung. Wir werden an einigen wichtigen Stellen weitere mathematische Beweise anführen — nicht zuletzt, um die Struktur mathematischer Schlussfolgerungen zu beleuchten — uns im Allgemeinen jedoch auf Ergebnisse und (biologische) Anwendungen konzentrieren.

Es läßt sich also bei weitem nicht jede Zahl als Bruch zweier ganzer Zahlen schreiben, eine Tatsache, die schon den alten Griechen bekannt war.

SELBSTTEST: Das Verhältnis von Länge zu Breite eines Din-A4 Blattes ist gerade so gewählt, dass es beim Falten zu einem Din-A5 Blatt erhalten bleibt. Und so weiter. (Diese Eigenschaft haben beispielsweise US-Formate nicht!) Wie gross ist deshalb dieses Verhältnis von Länge zu Breite?

Alle Punkte der Zahlengerade zusammen heißen **reelle Zahlen**. Die Menge der reellen Zahlen wird mit dem Symbol $\mathbf{R}$ bezeichnet. Die einzelnen jetzt definierten Zahlenmengen bilden jeweils Teilmengen: $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$. Reelle Zahlen wie $\sqrt{2}$, π oder e, die keine rationalen Zahlen sind, heißen **irrationale Zahlen**.

BEMERKUNG: Es gibt einen fundamentalen Unterschied zwischen den rationalen und den reellen Zahlen, der eng mit $\sqrt{2}$ zusammenhängt. Zuerst sollte man sich klar machen, weshalb man überhaupt so großen Wert auf Zahlen wie $\sqrt{2}$ legt.
Vielleicht erinnern Sie sich noch an den Satz von Phythagoras. Er besagt, dass in einem rechtwinkligen Dreieck die Summe der Quadrate der Katheten gleich dem Quadrat der Hypothenuse ist ($a^2+b^2 = c^2$). Wir betrachten nun ein Dreieck, bei dem die Katheten die Länge Eins haben ($a = b = 1$). Aus dem Satz von Pythagoras folgt, dass die Hypothenuse die Länge $\sqrt{2}$ hat. Mit anderen Worten: $\sqrt{2}$ ist eine geometrisch motivierte Größe. Wenn wir eine vollständige Zahlengerade haben wollen, sollte $\sqrt{2}$ auch dazugehören.
Wir haben gezeigt, dass $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl sein kann. In diesem Sinne sind die rationalen Zahlen unvollständig. Auf der anderen Seite nennt man die reellen Zahlen **vollständig**. Sie umfassen $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \pi$ und all die anderen Größen, die zwar auf der Zahlengeraden liegen sollten, von denen sich aber zeigen lässt, dass sie keine rationalen Zahlen sein können.

Bei den reellen Zahlen werden wir oft die positiven reellen Zahlen spezifisch betrachten und mit $\mathbf{R}^+$ bezeichnen, oder $\mathbf{R}_\mathbf{0}^+$, die nicht-negativen reellen Zahlen (die positiven reellen Zahlen zusammen mit der Null).

BEMERKUNG: Die Rechenregeln (1.7) – (1.12) für Ungleichungen sind darin begründet, dass rationale Zahlen ihrer Größe nach angeordnet werden können, und gelten deshalb auch für alle reellen Zahlen.

Schlußbemerkung: Auch wenn die reellen Zahlen vollständig sind, gibt es dennoch Rechenoperationen, die keine Lösungen innerhalb dieser Zahlenmenge haben. So kann die Wurzel aus minus Eins *keine* reelle Zahl sein, $\sqrt{-1} \notin \mathbf{R}$, da das Quadrat jeder reellen Zahl nicht-negativ ist. Diese Beobachtung führt im Kapitel 11 auf die Definition der **komplexen Zahlen C**.

1.3.3 Intervalle

Abschnitte der Zahlengerade werden auch als **Intervalle** bezeichnet. Abhängig davon, ob die Grenzen im Intervall enthalten sind oder nicht, unterscheidet man dabei:

Definition (Intervalle):
Seien a und b zwei reelle Zahlen mit $a < b$. Dann heißt:

$$\textbf{abgeschlossenes Intervall}: \quad [a,b] = \{x | a \leq x \leq b\} \tag{1.13}$$

$$\textbf{offenes Intervall}: \quad (a,b) = \{x | a < x < b\} \tag{1.14}$$

$$\textbf{rechts halboffenes Intervall}: \quad [a,b) = \{x | a \leq x < b\} \tag{1.15}$$

$$\textbf{links halboffenes Intervall}: \quad (a,b] = \{x | a < x \leq b\} \tag{1.16}$$

BEMERKUNG: Die Schreibweise $\{x|x > a\}$ bedeutet: die Menge aller x mit der Eigenschaft $x > a$.

BEMERKUNG: Ein Intervall kann sich auf einer (oder beiden) Seiten auch bis Unendlich (∞) erstrecken, wobei man "Unendlich" selbst nie als eigentliche Zahl auffasst. Man schreibt also beispielsweise (a, ∞) für $\{x|a < x\}$. Damit gilt auch: $\mathbf{R} = (-\infty, \infty)$, $\mathbf{R_0^+} = [0, \infty)$ und $\mathbf{R}^+ = (0, \infty)$.

1.4 Betrag einer reellen Zahl

Interessiert man sich für den Temperaturunterschied zwischen zwei Körpern oder den Konzentrationsunterschied von zwei Lösungen, so will man oft nicht wissen, ob die entsprechende Größe positiv oder negativ ist, sondern nur, welchen Wert sie unabhängig von ihrem Vorzeichen hat.

Mathematisch gesehen bedeutet dies, dass man sich in diesen Fällen nur für den Abstand zweier Zahlen auf der Zahlengerade interessiert, nicht aber dafür, welche der beiden Zahlen die größere und welche die kleinere Zahl ist. Dies führt auf folgende

Definition (Betrag):

Sei $x \in \mathbf{R}$. Der **Betrag** $|x|$ ist definiert als $|x| = \begin{cases} x \text{ für } x \geq 0 \\ -x \text{ für } x < 0 \end{cases}$

BEMERKUNG: Auf der Zahlengerade entspricht der Betrag einer Zahl genau ihrem Abstand vom Nullpunkt.

Eigenschaften des Betrages:
Sei $x, y \in \mathbf{R}$. Dann gilt:

$$|x| \geq 0 \tag{1.17}$$

$$|x| = 0 \iff x = 0 \tag{1.18}$$

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y| \tag{1.19}$$

$$(1.19) \text{ mit } y = -1: \quad |-x| = |x| \tag{1.20}$$

$$\text{Für } y \neq 0: \quad \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|} \tag{1.21}$$

$$-|x| \leq x \leq |x| \tag{1.22}$$

$$\textbf{Dreiecksungleichung}: \quad |x+y| \leq |x| + |y| \tag{1.23}$$

Der Name "Dreiecksungleichung" rührt daher, dass (1.23) auch gilt, wenn x und y Vektoren sind (wir kommen darauf in einem späteren Kapitel zurück). In diesem Fall bedeutet die Dreiecksungleichung (1.23), dass die Summe der Längen von zwei Dreiecksseiten immer größer als die Länge der dritten Seite ist. Das Gleichheitszeichen gilt für das entartete Dreieck (Höhe gleich Null).

1.5 Summen

Oft möchte man die Summe mehrerer, vielleicht sogar (unendlich) vieler Summanden bilden und mit derart "langen" Ausdrücken bequem rechnen können. Bezeichnet a_1 den ersten Summanden, a_2 den zweiten Summanden ... und a_n den n-ten Summanden, so möchte man also gerne eine kompakte Schreibweise für $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ zur Verfügung haben.

Als Beispiel betrachten wir die Summe $1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + n^2$. Wir summieren hier also n Glieder, wobei das ν-te Glied die Form ν^2 hat. Diesen Vorgang kürzen wir von nun an mit der Symbolfolge $\sum_{\nu=1}^{n} \nu^2$ ab. Lies: "Summe über ν^2 von ν gleich Eins bis n".

Das ν-te Glied einer Summe wird natürlich nicht immer die Form ν^2 haben. Die Summe $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$ wird zum Beispiel durch $\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu}$ abgekürzt. Im allgemeinen Fall bezeichne a_ν das ν-te Glied. Es folgt:

Definition (Summensymbol):
Sei $n \geq 1$. Dann setzt man

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n \tag{1.24}$$

Um also die linke Seite von (1.24) auszuwerten, setzt man den Index ν sukzessive auf ganze Zahlen, von der unteren Grenze $\nu = 1$ bis zur oberen Grenze (hier $\nu = n$), berechnet jeweils den Ausdruck hinter dem Summenzeichnen, und addiert die einzelnen Beiträge.

Wichtig:
Da der Laufindex nur als "Markierung" der einzelnen Terme fungiert, kann er durch ein *beliebiges* anderes Symbol ersetzt werden, wenn dies gleichzeitig an allen Stellen geschieht, an denen der Index auftaucht:

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu = \sum_{\mu=1}^{n} a_\mu \tag{1.25}$$

Im Englischen wird der Laufindex deshalb auch "**dummy index**" genannt.

BEISPIELE:

$\sum_{\nu=1}^{5} \nu^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55$
$\sum_{\mu=1}^{3} \mu^{-2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9}$
$\sum_{\rho=1}^{4} 2^{-\rho} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$

Betrachtet man verallgemeinernd Summen, bei denen die Summation nicht bei 1, sondern bei einer anderen ganzen Zahl $m < n$ beginnt, so schreibt man entsprechend

$$\sum_{\nu=m}^{n} a_\nu = a_m + a_{m+1} + \ldots + a_{n-1} + a_n \ . \tag{1.26}$$

BEISPIELE:

$\sum_{\nu=0}^{5} \nu = 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$
$\sum_{\nu=2}^{3} \ 5 = 5 + 5 = 10$
$\sum_{\mu=-2}^{1} \ \mu^3 = (-2)^3 + (-1)^3 + 0^3 + 1^3 = -8 + (-1) + 0 + 1 = -8$

Aus der Definition (1.24) erhält man direkt folgende Rechenregeln für das Summensymbol:

Rechnen mit dem Summensymbol:

Verschiebung des Index :
$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu = \sum_{\nu=m}^{n+m} a_{\nu-m} \tag{1.27}$$

Addition :
$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu + \sum_{\nu=0}^{n} b_\nu = \sum_{\nu=0}^{n} (a_\nu + b_\nu) \tag{1.28}$$

Subtraktion :
$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu - \sum_{\nu=0}^{n} b_\nu = \sum_{\nu=0}^{n} (a_\nu - b_\nu) \tag{1.29}$$

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu + \sum_{\nu=n+1}^{m} a_\nu = \sum_{\nu=0}^{m} a_\nu \tag{1.30}$$

Distributivgesetz :
$$\left(\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \right) \left(\sum_{\mu=0}^{m} b_\mu \right) = \sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu b_\mu \tag{1.31}$$

speziell :
$$c \cdot \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu = \sum_{\nu=0}^{n} (c a_\nu) \tag{1.32}$$

Vertauschungsregel :
$$\sum_{\mu=0}^{m} \left(\sum_{\nu=0}^{n} a_{\nu\mu} \right) = \sum_{\nu=0}^{n} \left(\sum_{\mu=0}^{m} a_{\nu\mu} \right) \tag{1.33}$$

SELBSTTEST: Verifizieren Sie die obigen Regeln dadurch, dass Sie jeweils die linken und rechten Seiten explizit ausschreiben. Als Beispiel führen wir dies für (1.28) vor: $\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu + \sum_{\nu=0}^{n} b_\nu = (a_0 + a_1 + \ldots + a_n) + (b_0 + b_1 + \ldots + b_n) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) + \ldots + (a_n + b_n) = \sum_{\nu=0}^{n}(a_\nu + b_\nu)$.

1.5.1 Eine Anwendung: Die geometrische Reihe

Derzeit werden weltweit jährlich circa 2% der bekannten Ölreserven verbraucht. Falls keine nennenswerten neuen Vorkommen gefunden werden und der Verbrauch konstant bleibt, sind die Reserven in ungefähr 50 Jahren erschöpft. Falls es jedoch gelänge, den Verbrauch in jedem Jahr durch technische Verbesserungen und sparsamere Nutzung zu verringern, könnten die Reserven viel länger halten.

Um das Einsparpotential abzuschätzen, wollen wir annehmen, dass der Verbrauch in Zukunft in jedem Jahr um einen *konstanten Faktor* f gesenkt wird, so dass er im nächsten Jahr noch $1 - f$ beträgt, im übernächsten Jahr noch $(1 - f)^2$, im darauffolgenden Jahr $(1 - f)^3$, und so weiter. Wie hoch ist dann der akkumulierte Verbrauch nach n Jahren?

Kürzen wir den Ausdruck $1-f$ mit q ab, beträgt der in n Jahren akkumulierte Verbrauch:

$$1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n = \sum_{\nu=0}^{n} q^\nu \tag{1.34}$$

Diese Summe wird in der Mathematik als **endliche geometrische Reihe** bezeichnet und ist dadurch charakterisiert, dass der *Quotient* zweier aufeinanderfolgender Summanden konstant ist. Dieser Quotient entspricht in unserem Beispiel gerade dem Wert q.

Für alle natürlichen Zahlen n und $q \neq 1$ gilt:

$$\begin{aligned} 1 + q + q^2 + \ldots + q^n &= \frac{(1 + q + q^2 + \ldots + q^n)(1 - q)}{1 - q} \\ &= \frac{1 - q + q - q^2 + q^2 - \ldots - q^n + q^n - q^{n+1}}{1 - q} \\ &= \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \end{aligned} \tag{1.35}$$

Verringert sich beispielsweise der Verbrauch in jedem Jahr um 1%, so entspricht dies einem Wert von q von 0.99. In diesem Fall hätten wir in 50 Jahren einen akkumulierten Verbrauch in Höhe von $(1 - 0.99^{50})/(1 - 0.99) \approx 39.49$ derzeitigen Jahresverbräuchen. Dennoch wären die Reserven nach einigen weiteren Jahren erschöpft.

Wir können uns aber umgekehrt fragen, wie stark der Verbrauch gedrosselt werden müsste, damit sich die Reserven zumindest in diesem Modell *nie* erschöpfen.[4] Dazu suchen wir denjenigen Wert von q, für den der akkumulierte Verbrauch auch für beliebig hohes n nicht den 50-fachen gegenwärtigen Verbrauch übersteigt. Mathematisch bedeutet dies, dass wir die **unendliche geometrische Reihe** $\sum_{\nu=0}^{\infty} q^\nu$ betrachten und uns dann die Frage stellen, für welchen Wert von q gilt, dass $\sum_{\nu=0}^{\infty} q^\nu = 50$ ist.

Dazu müssen wir die letzte Gleichung nach q auflösen. Dies gelingt uns mit Hilfe von Gleichung (1.35). Wir stellen dabei fest, dass der Term q^{n+1} für $0 < q < 1$ mit wachsendem n immer kleiner wird. Alle anderen Terme hängen dagegen nicht von n ab. Wenn n immer größer und größer wird, können wir deshalb den Term q^{n+1} vernachlässigen

[4] Die folgende Analyse geht über den bisher behandelten Stoff hinaus. Wegen der interessanten Thematik wollen wir Ihnen aber schon hier einen Vorgeschmack auf mathematische Methoden geben, die wir in den nächsten Kapiteln systematisch entwickeln werden.

und erhalten $\sum_{\nu=0}^{\infty} q^\nu = 1/(1-q)$. Angewandt auf unsere Frage erhalten wir also die Bedingung $1/(1-q) = 50$. Diese Gleichung läßt sich einfach nach q auflösen und wir erhalten $q = 0.98$.

Dies ist ein höchst erstaunliches Resultat. Es besagt nichts anderes, als dass die Ölreserven *beliebig* lange halten würden, wenn der weltweite Verbrauch konsequent jedes Jahr um 2% (oder mehr) verringert würde!

SELBSTTEST: Sie teilen einen Kuchen in zwei Hälften, eine der beiden Hälften wiederum in zwei Hälften, etc. Damit erhalten Sie eine Folge von immer kleineren Kuchenstücken, deren *insgesamte* Größe im Vergleich zu der des ursprünglichen Kuchens durch $1/2 + 1/4 + 1/8 + \ldots = 1/2 \cdot (1 + 1/2 + 1/4 + \ldots)$ gegeben ist. Welche Gesamtgröße erhalten Sie nach n Schnitten, und welcher Zahl strebt dieser Wert zu, wenn Sie n beliebig anwachsen lassen? Wundert Sie Ihr Ergebnis?

1.6 Vollständige Induktion

Am Beispiel der geometrischen Reihe soll noch ein wichtiges Beweisverfahren eingeführt werden, die *vollständige Induktion*. Diese lässt sich beim Beweis der Allgemeingültigkeit von Aussagen anwenden, deren freie Variable eine natürliche Zahl ist.

In vohergehenden Abschnitt wurde *direkt* bewiesen, dass für die geometrische Reihe $\sum_{\nu=0}^{n} q^\nu = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ gilt. Setzt man diese Lösung als gegeben voraus (Induktionsvoraussetzung) kann man deren Wahrheit beweisen, indem man zuerst zeigt, dass die Vorraussetzung für $\nu = 0$ erfüllt ist (Induktionsanfang). Danach muss bewiesen werden, dass die Vorraussetzung auch für $\nu = n + 1$ richtig ist, sofern sie für $\nu = n$ zutrifft. Gelingt dies ist die Vorraussetzung für alle natürlichen Zahlen ν wahr.

Beweis mittels vollständiger Induktion:
Induktionsvoraussetzung: $\sum_{\nu=0}^{n} q^\nu = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$
Induktionsbehauptung: $\sum_{\nu=0}^{n+1} q^\nu = \frac{1-q^{n+2}}{1-q}$
Induktionsanfang: $\sum_{\nu=0}^{0} q^\nu = 1 = \frac{1-q}{1-q} = \frac{1-q^{0+1}}{1-q}$
Induktionsschritt: $\nu \to \nu + 1$

$$\begin{aligned}
\sum_{\nu=0}^{n+1} q^\nu &= \sum_{\nu=0}^{n} q^\nu + q^{n+1} \\
&= \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1} \\
&= \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + \frac{1-q}{1-q} q^{n+1} \\
&= \frac{1-q^{n+1}+q^{n+1}-q^{n+2}}{1-q} = \frac{1-q^{n+2}}{1-q}
\end{aligned}$$

□

HINWEIS: Im vorletzten Schritt des Beweises haben wir auf das Kapitel 3 vorgegriffen und uns eine Eigenschaft von Potenzfunktionen zu Nutze gemacht, indem wir $q \cdot q^{n+1} = q^{n+2}$ gesetzt haben.

1.7 Produkte

In gleicher Weise wie Summen durch das Symbol $\sum$ kompakt geschrieben werden können, kürzt man Produkte mit dem Symbol $\prod$ ab,

$$\prod_{\mu=k}^{l} x_\mu = x_k \cdot x_{k+1} \cdot x_{k+2} \cdot \ldots \cdot x_{l-1} \cdot x_l \ . \tag{1.36}$$

BEISPIELE:

$\prod_{\mu=1}^{5} \mu = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$
$\prod_{\nu=1}^{3} \nu^2 = 1 \cdot 4 \cdot 9 = 36$

Rechenregeln:

Verschiebung des Index :
$$\prod_{\nu=0}^{n} a_\nu = \prod_{\nu=m}^{n+m} a_{\nu-m} \tag{1.37}$$

Multiplikation :
$$\prod_{\nu=0}^{n} a_\nu \cdot \prod_{\nu=0}^{n} b_\nu = \prod_{\nu=0}^{n} (a_\nu \cdot b_\nu) \tag{1.38}$$

Division :
$$\frac{\prod_{\nu=0}^{n} a_\nu}{\prod_{\nu=0}^{n} b_\nu} = \prod_{\nu=0}^{n} \frac{a_\nu}{b_\nu} \tag{1.39}$$

$$\prod_{\nu=0}^{n} a_\nu \cdot \prod_{\nu=n+1}^{m} a_\nu = \prod_{\nu=0}^{m} a_\nu \tag{1.40}$$

Vertauschungsregel :
$$\prod_{\mu=0}^{m} \left(\prod_{\nu=0}^{n} a_{\nu\mu} \right) = \prod_{\nu=0}^{n} \left(\prod_{\mu=0}^{m} a_{\nu\mu} \right) \tag{1.41}$$

1.8 Aufgaben

1. (Bruchrechnen) Berechnen Sie folgende Brüche und kürzen Sie wenn möglich!

(a) $\frac{6}{5} \cdot \frac{10}{3} =$
(b) $\frac{2}{197} \cdot \frac{197}{3} =$
(c) $\frac{3^2}{2} \cdot \frac{1}{3} =$
(d) $\frac{3}{2} + \frac{5}{2} =$
(e) $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} =$
(f) $\frac{3}{2} - \frac{2}{3} =$
(g) $\frac{2}{3} - \frac{5}{4} =$
(h) $\frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{10}} =$
(i) $\frac{\frac{5}{7}}{\frac{10}{21}} =$

2. (Summen) Berechnen Sie folgende Summen:

(a) $\sum_{k=1}^{5} k$
(b) $\sum_{\alpha=2}^{4} \alpha^2$
(c) $\sum_{n=4}^{6} (n-2)^2$

3. (Betrag, Ungleichung) Für welche x sind folgende Ungleichungen erfüllt?

(a) $|x| < 2$
(b) $|x-1| > 2$
(c) $|x+2| \leq 4$

4. (Summen) Berechnen Sie folgende Summen:

(a) $\sum_{i=1}^{4} i =$ (d) $\sum_{\mu=1}^{N} a =$ (g) $\sum_{q=3}^{5}(q-2)^2 =$

(b) $\sum_{m=0}^{3}(m+1) =$ (e) $\sum_{q=1}^{4} 2^q =$ (h) $\sum_{a=0}^{4} a - \sum_{b=0}^{4} b =$

(c) $\sum_{\nu=2}^{5} 3 =$ (f) $\sum_{n=1}^{3} n^2 =$ (i) $\sum_{\nu=0}^{4} \nu^2 - \sum_{\mu=0}^{3} \mu^2 =$

5. (Summen) Schreiben Sie folgende Summen ohne Summenzeichen:

(a) $\sum_{\alpha=2}^{6} x^\alpha$ (b) $\sum_{k=1}^{5}(-1)^k \frac{x^k}{k}$

6. (Summen) Schreiben Sie folgende Summen mit dem Summenzeichen:

(a) $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots + x^{20}$

(b) $x + 4x^2 + 9x^3 + 16x^4 + \ldots + 100x^{10}$

(c) $1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots + x^8$

(d) $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots - \frac{x^{12}}{12}$

7. (Summen, Mittelwert, Varianz) Werden bei einem Experiment n Meßwerte x_1, x_2, $\ldots$, x_n gemessen, dann heißt

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \quad \text{“arithmetisches Mittel” und} \tag{1.42}$$

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \quad \text{“Varianz”.} \tag{1.43}$$

Zeigen Sie:

$$\sigma_x^2 = \overline{x^2} - \overline{x}^2 \tag{1.44}$$

wobei

$$\overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \tag{1.45}$$

Bemerkung: $\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2}$ heißt “Standardabweichung”.

8. (Betrag, Ungleichung) Für welche x sind folgende Ungleichungen erfüllt?

(a) $3|x-1| < 4$ (c) $|x| \leq \frac{1}{2}x + 1$

(b) $\Big|x - |1|\Big| \geq 2$ (d) $|2x - 4| > 8x + 1$

9. (Beispiel aus der Gewässerbiologie) Die Köcherfliegenlarven der Gattung *Hydropsyche* leben am Boden von Fließgewässern. Dort bauen sie kleine Netze (durchschnittliche Anströmfläche $\overline{A}_H = 48$ mm^2), die das in dem Wasser driftende organische Material (sog. Seston: Plankton, kleine Makroinvertebraten (z.B. Insekten), abgestorbenes Pflanzenmaterial) herrausfiltern, wovon sie sich dann ernähren. Um abschätzen zu können, welche Nahrungsmenge den Larven pro Tag zur Verfügung steht, wird an einem Tag alle 2 Stunden eine Driftmessung durchgeführt. Dazu wird ein Driftnetz mit kreisrunder Öffnung (Durchmesser $d = 11.3$ cm) für jeweils eine halbe Stunde ($= \Delta t$) in dem Fließgewässer aufgestellt. Dabei wurden folgende Mengen m_i an Seston aus dem Wasser gefiltert:

Uhrzeit	1:00	3:00	5:00	7:00	9:00	11:00	13:00	15:00	17:00	19:00	21:00	23:00
m_i/g	1.1	2.8	1.5	1.1	1.8	1.7	1.6	1.7	1.2	1.4	1.2	1.5

Die Fließgeschwindigkeit betrug $v = 40$ cm/s.

(a) Welche Anströmfläche A hat das Driftnetz?

(b) Wieviel Trockengewicht (TG) Seston $\overline{m}$ wurde im Durchschnitt in einer halben Stunde mit dem Driftnetz aus dem Wasser gefiltert? Wie groß ist die zugehörige Standardabweichung?

(c) Wie groß ist die Sestonflussdichte $j = \frac{\overline{m}}{A\Delta t}$ (Sestontrockenmasse pro Querschnittsfläche und Zeit in $\frac{\text{mg}}{\text{cm}^2\text{min}}$?

(d) Welche Strecke legt ein Wassermolekül in diesem Fließgewässer in einer halben Stunde zurück? Welches Wasservolumen V (in Litern) ist in einer halben Stunde durch das Netz geflossen?

(e) Wie groß ist die Sestonkonzentration ρ (Milligramm Seston TG pro Liter Wasser)?

(f) Die Tiere des 5. Larvenstadiums von *Hydropsyche pellucidula* haben ein Trockengewicht von durchschnittlich 7.6 mg. Um zu überleben, benötigen sie täglich 85% ihres Körpergewichtes an Nahrung. Reicht also die in ihr Netz gedriftete Menge an Seston aus?

Kapitel 2

Funktionen und ihre graphische Darstellung

2.1 Funktionen

Ein zentraler Aspekt wissenschaftlicher Untersuchungen besteht darin, systematische Beziehungen zwischen verschiedenen Messgrößen aufzudecken: "Die Anzahl der Insekten wuchs während des Beobachtungszeitraums exponentiell an." Oder: "Die Photosyntheseaktivität variierte im Tagesverlauf näherungsweise wie eine Sinusfunktion." Oder: "Die Immunantwort verhielt sich in Abhängigkeit von der Viruskonzentration wie die Funktion ..."

Mathematisch werden derartige Zusammenhänge einer **abhängigen Variablen** (z.B. Größe einer Insektenpopulation) von einer anderen, **unabhängigen Variablen** (z.B. der Zeit) durch den für alle weiteren Überlegungen zentralen Begriff der **Funktion** beschrieben. Dabei können sowohl die abhängige Variable als auch die unabhängige Variable kontinuierliche oder diskrete Werte annehmen. Statt Funktion spricht man oft auch von einer **Abbildung**:

Definition (Funktion):
X und Y seien beliebige nichtleere Mengen. Eine **Abbildung** (oder **Funktion**) f von X nach Y,

$$f : X \to Y \ , \tag{2.1}$$

ordnet jedem Element $x \in X$ genau ein Element $y \in Y$ zu,

$$x \mapsto y = f(x) \ . \tag{2.2}$$

Hierbei heißt x **Argument der Funktion** f oder **unabhängige Variable**, y heißt **abhängige Variable** und $f(x)$ wird **Funktionswert von** f **an der Stelle** x genannt.
X wird als **Definitionsbereich** von f bezeichnet, Y als **Zielmenge** von f. Der **Wertebereich** W einer Funktion f ist die Menge aller $y \in Y$, für die ein $x \in X$ existiert, so dass $y = f(x)$.

Die Zielmenge Y ist also die Menge aller zugelassenen möglichen Funktionswerte, der Wertebereich W die Menge der tatsächlich angenommenen Funktionswerte. Damit ist der Wertebereich eine Teilmenge der Zielmenge, was man formal als $W \subseteq Y$ schreibt. Je nach Funktion und Definition der Zielmenge ist W mit Y identisch oder aber eine echte Teilmenge von Y.

Statt (2.1) und (2.2) schreibt man oft kurz:

$$y = f(x) \tag{2.3}$$

Begrifflich muß man zwischen der Funktion f als für alle $x \in X$ geltenden *Zuordnungsvorschrift* und dem Wert $f(x)$ als speziellem *Funktionswert* von f an der Stelle x unterscheiden.

BEMERKUNG: Eine Funktion f ist erst dann vollständig bestimmt, wenn Abbildungsvorschrift, Definitionsbereich und Zielmenge angegeben werden. Solche Exaktheit ist oft unübersichtlich. Sind Definitionsbereich und Zielmenge aus dem Zusammenhang klar, werden wir Funktionen nur durch die Abbildungsvorschrift, etwa $y = x^2$, beschreiben.

Definition (Reellwertige und reelle Funktion):
Eine Funktion f heißt **reellwertig**, wenn Y eine Teilmenge der reellen Zahlen ist, und **reell**, wenn zusätzlich auch X eine Teilmenge der reellen Zahlen ist.

In dieser Vorlesung werden X und Y meist $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}^+$, $\mathbf{R}_\mathbf{0}^+$ oder Intervalle sein.

BEISPIELE:

Für $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}_\mathbf{0}^+, f(x) = x^2$ gilt $X = \mathbf{R}$, $Y = W = \mathbf{R}_\mathbf{0}^+$.

Für $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = 3x$ gilt $X = W = Y = \mathbf{R}$.

Für $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+, f(x) = 3x$ gilt $X = W = Y = \mathbf{R}^+$.

Für $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = x^2$ gilt $X = Y = \mathbf{R}$, $W = \mathbf{R}_\mathbf{0}^+$.

Funktionen kann man gut durch eine *Wertetabelle* veranschaulichen.

BEISPIEL:

Die Funktion $y = 2x + 1$ ergibt als Wertetabelle

x	0	1	2	3	4	5
y	1	3	5	7	9	11

Zur Anschauung gut geeignet sind auch *graphische Darstellungen.* Dabei ist der **Graph** G einer Funktion die Menge aller geordneten Paare (x, y) mit $y = f(x)$ und $x \in X$. Zur Darstellung trägt man die unabhängige Variable auf der **Abszisse**, die abhängige Variable auf der **Ordinate** eines rechtwinkligen Koordinatensystems auf — siehe Abbildung 2.1.

SELBSTTEST: Warum entspricht die Funktion $y = 2x + 1$ graphisch einer *Geraden* durch die beiden Punkte $(0, 1)$ und $(1, 3)$?

Durch eine Funktion können mehrere Elemente $x \in X$ auf das gleiche Element $y \in Y$ abgebildet werden. So wird bei der quadratischen Funktion $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2$ beispielsweise sowohl die Zahl $+2$ als auch die Zahl -2 auf die Zahl $+4$ abgebildet.

Es kann auch Elemente $y \in Y$ geben, die keinem Element $x \in X$ mittels der Funktion f zugeordnet sind. Dies trifft bei der gerade angegebenen Funktion auf alle negativen y-Werte zu. (Dagegen wird nach Definition bei *jeder* Funktion jedes Element x auf genau einen Wert y abgebildet.)

Diese Beobachtungen geben Anlaß zu den folgenden Begriffen:

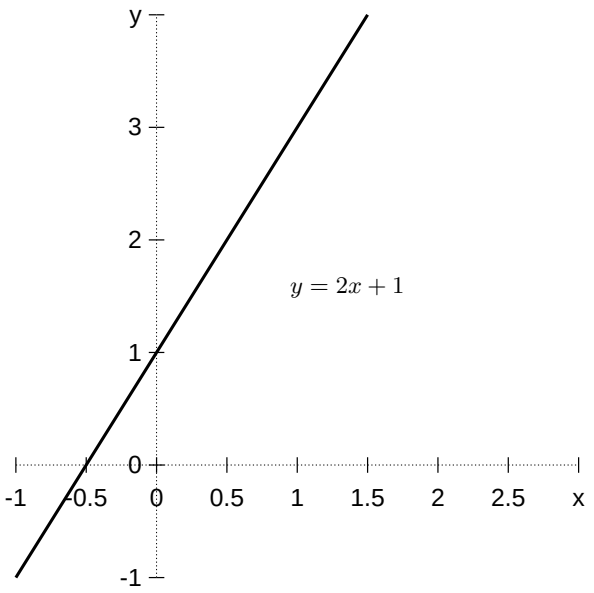


Abbildung 2.1: Graph der Funktion $y = 2x + 1$.

Definition (injektiv, surjektiv, bijektiv):
Eine Abbildung f heißt **injektiv**, wenn zwei verschiedenen Elementen $x_1 \neq x_2$ immer zwei verschiedene Elemente $y_1 \neq y_2$ zugeordnet werden.
Eine Abbildung f heißt **surjektiv**, wenn es zu jedem Element $y \in Y$ ein $x \in X$ gibt, so dass $y = f(x)$ gilt.
Eine Abbildung f heißt **bijektiv**, wenn sie injektiv und surjektiv ist.

BEISPIELE:

Die Funktionen $f_1 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f_1(x) = 2$ und $f_2 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f_2(x) = x^2$ sind weder injektiv noch surjektiv.

Die Funktion $f_3 : \mathbf{R_0^+} \to \mathbf{R_0^+}$, $f_3(x) = x^2$ ist jedoch sowohl injektiv als auch surjektiv, also bijektiv.

Auch die Funktionen $f_4 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f_4(x) = 4x$ und $f_5 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f_5(x) = x^3$ sind bijektiv.

Siehe auch Abbildung 2.2!

SELBSTTEST: Begründen Sie die obigen Aussagen!

Definition (Monotonie von Funktionen):
Eine Funktion $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ heißt **monoton wachsend**, wenn für alle Zahlen x_1, x_2 gilt:

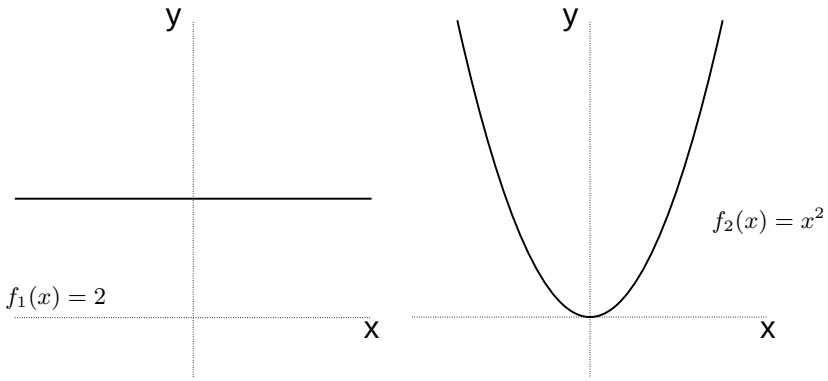
Aus $x_1 < x_2$ folgt stets $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Die Funktion heißt **streng monoton wachsend**, wenn gilt:

Aus $x_1 < x_2$ folgt stets $f(x_1) < f(x_2)$.

Die Begriffe **monoton fallend** und **streng monoton fallend** werden entsprechend definiert.

Beispiele für Funktionen, die weder injektiv noch surjektiv sind für $X = Y = \mathbf{R}$:



Beispiele bijektiver Funktionen:

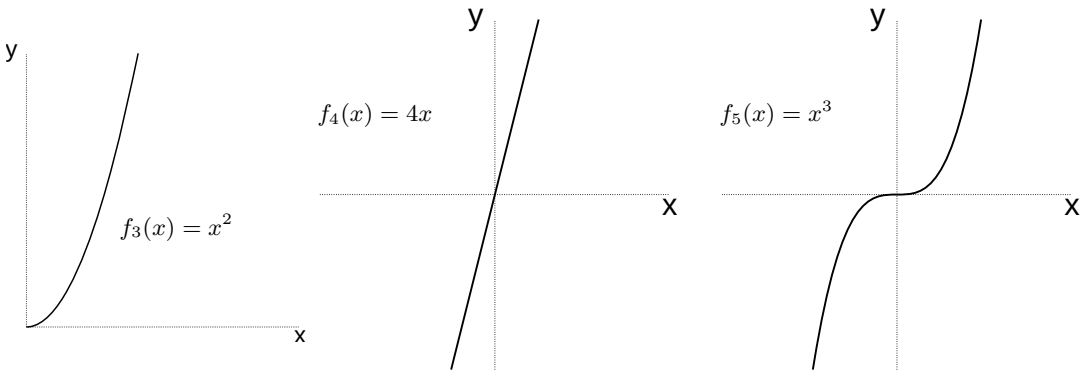


Abbildung 2.2: Graphen der Funktionen f_1 bis f_5.

SELBSTTEST: Zeigen Sie, dass jede streng monotone Funktion injektiv ist.

SELBSTTEST: Zeigen Sie, dass eine monotone Funktion nicht unbedingt injektiv sein muß.

Grundidee der Umkehrfunktion: Wir betrachten die Quadratfunktion

$$\begin{aligned} f : \mathbf{R}_\mathbf{0}^+ &\to \mathbf{R}_\mathbf{0}^+ \\ x &\mapsto x^2 \, . \end{aligned} \tag{2.4}$$

Diese Funktion ist bijektiv. Damit können wir jedem y genau ein x zuordnen,

$$x = \sqrt{y} \, . \tag{2.5}$$

Vertauschen wir nun x mit y, dann erhalten wir als **Umkehrfunktion** f^{-1} der Quadratfunktion die Quadratwurzelfunktion (siehe auch Abb. 2.4)

$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathbf{R}_\mathbf{0}^+ &\to \mathbf{R}_\mathbf{0}^+ \\ x &\mapsto \sqrt{x} \, . \end{aligned} \tag{2.6}$$

Das Beispiel von Quadratfunktion und Quadratwurzelfunktion können wir verallgemeinern zur

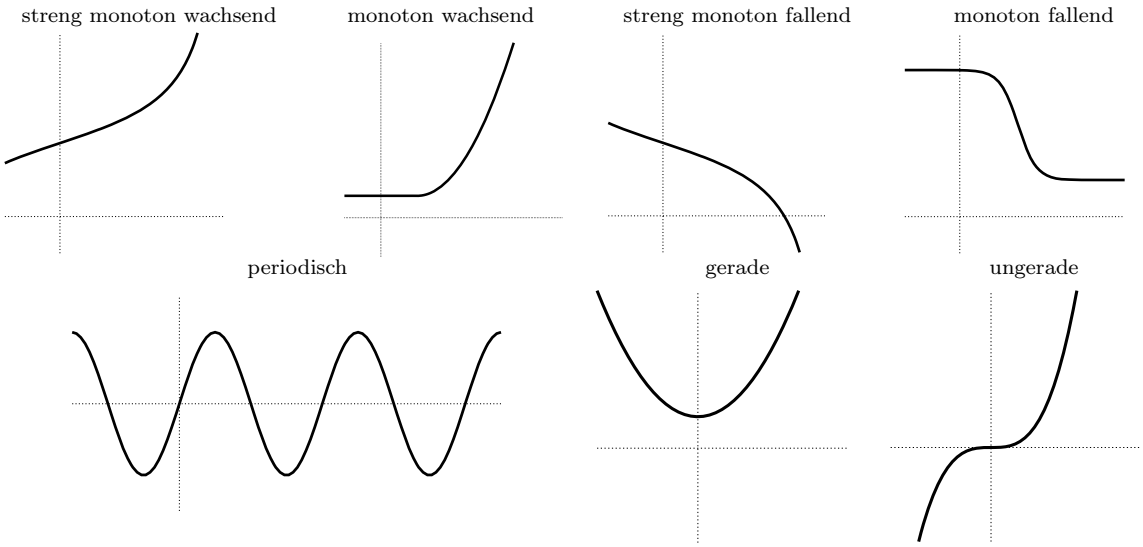


Abbildung 2.3: Schematische Darstellung wichtiger Eigenschaften von Funktionen. *Oben:* Monotonie von Funktionen (siehe Definition auf S. 17). *Unten links:* Periodizität von Funktionen (siehe Definition auf S. 21). *Unten rechts:* Beispiele für gerade und ungerade Funktionen (siehe Definition auf S. 23).

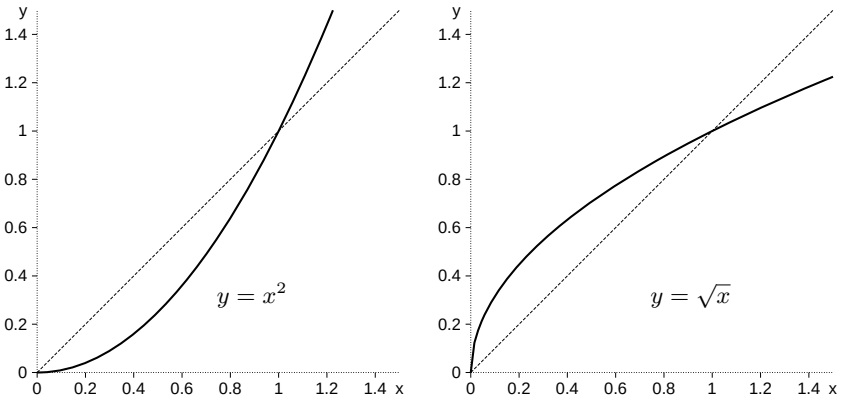


Abbildung 2.4: Die Quadratfunktion und ihre Umkehrfunktion — die Quadratwurzelfunktion.

Definition (Umkehrfunktion):
X und Y seien beliebige nichtleere Mengen. Wenn $f : X \to Y$ eine eine bijektive Funktion ist, dann bezeichnet $f^{-1} : Y \to X$ die **Umkehrfunktion** (oder **Umkehrabbildung**).

Beim Bilden der Umkehrfunktion wird also der Definitionsbereich X von f zur Zielmenge von f^{-1} und die Zielmenge Y von f zum Definitionsbereich von f^{-1}.

Notiz:
Wichtig: Im allgemeinen gilt $f^{-1} \neq \dfrac{1}{f}$. Ein Beispiel: $\sqrt{x} \neq \frac{1}{x^2}$.

Das Vertauschen von x und y entspricht einer Spiegelung des Graphen an der Geraden

$x = y$, die auch als Hauptdiagonale bezeichnet wird. Damit gilt ganz allgemein:

Notiz:
Aus dem Graph einer invertierbaren Funktion erhält man den Graph ihrer Umkehrfunktion durch Spiegelung an der Hauptdiagonalen.

Auch für $y = \sqrt{x}$ können wir eine Umkehrfunktion bilden. Dies ist wieder die Funktion $y = x^2$. Man beachte jedoch, dass $\mathbf{R}_0^+$ die Zielmenge von $y = \sqrt{x}$ ist und somit der Definitionsbereich von $y = x^2$ als Umkehrfunktion von $y = \sqrt{x}$ auf $\mathbf{R}_0^+$ eingeschränkt ist. Allgemein gilt:

Notiz:
Eine umkehrbare Funktion ist identisch mit der Umkehrfunktion ihrer Umkehrfunktion.

Für jede bijektive Funktion kann eine Umkehrfunktion in eindeutiger Weise mit Hilfe der hier skizzierten Konstruktion definiert werden.

Notiz:
Bijektivität ist eine hinreichende und notwendige Bedingung dafür, dass eine Funktion umkehrbar ist.

Auf diese Weise erhält man viele wichtige Funktionen als Umkehrfunktionen von schon bekannten Funktionen. So ist beispielsweise die Logarithmusfunktion die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion.

Falls eine Ausgangsfunktion nicht bijektiv ist, kann man sie in einem ersten Schritt durch geeignete Einschränkung des Definitionsbereiches und/oder der Zielmenge zu einer bijektiven Funktion machen. Dies haben wir bei der Quadratfunktion dadurch erreicht, dass wir den Definitionsbereich auf die nichtnegativen reellen Zahlen eingeschränkt haben. Wir werden später noch mehrere andere derartige Beispiele diskutieren.

2.2 Komposition von Funktionen

Unterschiedliche Funktionen können miteinander wie im Fall $y = [\sin(x)]^2$ kombiniert werden. In den nächsten Unterkapiteln werden wir zunächst die dadurch erreichbare Vielfalt an Funktionen an einfachen Beispielen diskutieren. Dabei betrachten wir vor allem die Graphen der Funktionen, um uns damit vertraut zu machen, was einfache Kompositionen anschaulich bedeuten.

2.2.1 Translation

Translation in y-Richtung: Den Graph der Funktion

$$y = f(x) + b \tag{2.7}$$

erhält man aus dem Graph der Funktion $y = f(x)$ durch eine Translation, bei der jeder Punkt (x, y) in den Punkt $(x, y + b)$ übergeht.

Translation in x-Richtung: Den Graph der Funktion

$$y = f(x - a) \tag{2.8}$$

erhält man aus dem Graph der Funktion $y = f(x)$ durch eine Translation, bei der jeder Punkt (x, y) in den Punkt $(x + a, y)$ übergeht.

SELBSTTEST: Warum erscheint das Minus-Zeichen in Gleichung (2.8)?

Setzt man beide Translationen zusammen, so erhält man die

Notiz (Translation):
Den Graph der Funktion

$$y = f(x - a) + b \tag{2.9}$$

erhält man aus dem Graph der Funktion $y = f(x)$, indem man jeden Punkt (x, y) in $(x + a, y + b)$ verschiebt.

BEISPIEL:

Der Graph der Funktion $y = (x - 1)^2 + 1$ ergibt sich durch eine Translation aus der Funktion $y = x^2$, wobei der Punkt $(0, 0)$ in den Punkt $(1, 1)$ übergeht (Abbildung 2.5b).

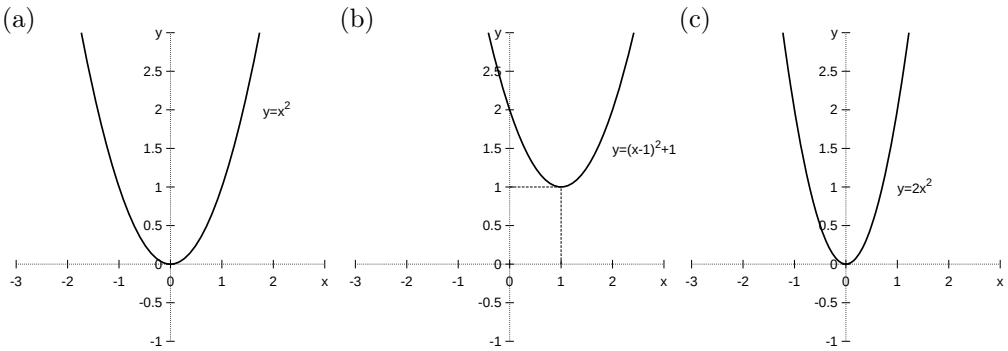


Abbildung 2.5: (a) Die Quadratfunktion, (b) um Eins nach rechts und oben verschoben (siehe Abschnitt 2.2.1) oder (c) um den Faktor zwei in y-Richtung gestreckt (siehe Abschnitt 2.2.2).

Viele Abläufe in der Physik und Biologie wiederholen sich (nahezu) regelmäßig. Dies führt auf die folgende

Definition (periodische Funktion): Eine Funktion ist **periodisch** mit **Periode** P, wenn

$$f(x + P) = f(x) \tag{2.10}$$

für alle reellen x gilt.

Der Graph einer periodischen Funktion verändert sich also nicht, wenn er um den Betrag P in Richtung der x-Achse verschoben wird (siehe zum Beispiel Abbildung 2.3 rechts unten).

BEISPIEL:

Die Funktion $y = \sin(x)$ hat die Periode 2π.

BEMERKUNG: Eine Funktion mit Periode P hat nach der Definition (2.10) auch die Periode $2P$, $3P$, etc., womit deutlich wird, dass der Begriff "Periode" in der Mathematik mit einer anderen Bedeutung als in der Umgangssprache verwendet wird. Das umgangssprachliche Konzept "Periode" wird in der Mathematik mit dem präziseren Begriff "kleinste Periode" beschrieben.

2.2.2 Streckung und Stauchung

Streckung/Stauchung in x-Richtung: Den Graph der Funktion

$$y = f(cx) \qquad \text{mit } c > 0 \tag{2.11}$$

erhält man aus dem Graph der Funktion $y = f(x)$, indem man jeden Punkt (x, y) in $(x/c, y)$ überführt. Für $c > 1$ entspricht dies einer Stauchung, für $c < 1$ einer Streckung in x-Richtung.

SELBSTTEST: Warum muß man den Punkt (x, y) in $(x/c, y)$ überführen – und *nicht* in (cx, y)?

Streckung/Stauchung in y-Richtung: Den Graph der Funktion

$$y = d\, f(x) \qquad \text{mit } d > 0 \tag{2.12}$$

erhält man aus dem Graph der Funktion $y = f(x)$, indem man jeden Punkt (x, y) in (x, dy) überführt. Für $d > 1$ entspricht dies einer Streckung, für $d < 1$ einer Stauchung in y-Richtung.

Notiz (Streckung oder Stauchung):
Den Graph der Funktion

$$y = df(cx) \qquad \text{mit } c, d > 0 \tag{2.13}$$

erhält man aus dem Graphen von $y = f(x)$, indem man die x-Achse um den Faktor $1/c$ und die y-Achse um den Faktor d skaliert.

BEISPIELE:

Die Funktion $y = 2x^2$ erhält man aus $y = x^2$ durch Streckung der y-Achse um den Faktor 2 (Abbildung 2.5c).

Die Funktion $y = \sin(2x)$ erhält man aus $y = \sin(x)$ durch Streckung der x-Achse um den Faktor $1/2$.

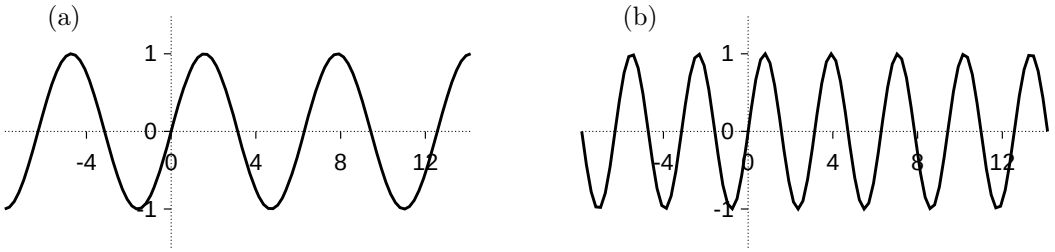


Abbildung 2.6: Sinusfunktionen. (a) Funktion $\sin(x)$ mit Periode 2π. (b) Funktion $\sin(2x)$ mit Periode π.

2.2.3 Spiegelung

Notiz:
Den Graphen von $y = f(-x)$ erhält man durch **Spiegelung** des Graphen von f **an der y-Achse**, den Graphen von $y = -f(x)$ durch **Spiegelung an der x-Achse**.

BEISPIEL:

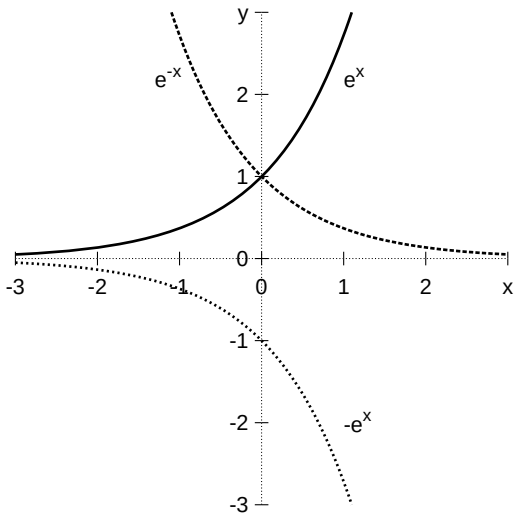


Abbildung 2.7: Die Exponentialfunktion und zwei Spiegelungen.

Der Graph von $y = e^{-x}$ ergibt sich aus dem Graphen von $y = e^x$ durch Spiegelung an der y-Achse (Siehe auch Abbildung 2.7).

SELBSTTEST: Wie sieht der Graph von $y = -e^{-x}$ aus?

SELBSTTEST: Wir haben bisher bei Streckungen und Stauchungen nur positive Faktoren zugelassen. Welchen Wert von c bzw. d müßte man wählen, um eine Spiegelung an der x- oder y-Achse formal als Streckung zu beschreiben? Allgemeiner: Welche Bedeutung hätten beliebige negative Werte von c?

Definition (Gerade und ungerade Funktion): Eine Funktion $y = f(x)$ heißt **gerade**, wenn

$$f(-x) = f(x) \tag{2.14}$$

für alle x gilt, und sie heißt **ungerade**, wenn

$$f(-x) = -f(x) \tag{2.15}$$

für alle x gilt.

Gerade Funktionen zeichnen sich also dadurch aus, dass sich ihr Graph durch eine Spiegelung an der y-Achse *nicht* verändert. Ungerade Funktionen sind dagegen dadurch gekennzeichnet, dass sich ihr Graph *nicht* verändert, wenn er an der x-Achse *und* der y-Achse gespiegelt wird. Für ein Beispiel einer geraden und einer ungeraden Funktion siehe Abbildung 2.3 unten.

Notiz:
Die nacheinander ausgeführte Spiegelung an x- und y-Achse ist mit einer **Punktspiegelung** am **Ursprung** — dem Punkt $(0, 0)$ — identisch.

SELBSTTEST: Verifizieren Sie die Aussage dieser Notiz!

Im allgemeinen sind Funktionen jedoch weder gerade noch ungerade.

BEISPIEL:

Die Funktion $y = x^2$ ist gerade, die Funktion $y = x^3$ ist ungerade und die Funktion $y = (x-2)^2$ ist weder gerade noch ungerade, sie ist jedoch symmetrisch bezüglich einer zur y-Achse parallelen Gerade durch den Punkt $(2, 0)$.

BEMERKUNG: Streckungen und Translationen können auch miteinander kombiniert werden. Dabei ist zu beachten, dass im Allgemeinen ein Unterschied besteht, ob man eine Funktion zuerst streckt und dann verschiebt, oder zuerst verschiebt und dann streckt, wie die Umformung $f[c(x+b)] = f[cx+cb] \neq f[cx+b]$ zeigt. Bei der Rückführung komplizierter Funktionen auf einfache Prototypen gehe man deshalb sorgfältig vor und mache sich Schritt für Schritt bewusst, welche Operation man im Moment gerade ausführt.

BEISPIEL:

Sei $c = 2$, $b = 3$ und $f(x) = x^2$. Dann ist

$$f\left(c(x+b)\right) = \left[2(x+3)\right]^2 = \left[2x+6\right]^2 \ .$$

Umgekehrt gilt jedoch

$$f(cx+b) = \left[2x+3\right]^2 \ .$$

2.2.4 Allgemeine Kompositionen

Im letzten Kapitel haben wir zusammengesetzte Funktionen betrachtet, in denen eine neue Funktion durch Verschiebung oder Skalierung aus einer bekannten Funktion hervorging. So wurde beispielsweise die unabhängige Variable um einen festen Betrag vergrößert oder mit einem festen Faktor multipliziert und erst nach dieser ersten Operation als Argument einer Funktion verwendet.

Verallgemeinert man diese Idee, so kann man auch Funktionen von Funktionen betrachten:

Definition (Komposition von Funktionen):
Als **Komposition** zweier reeller Funktionen f und g wird die Hintereinanderausführung $x \to g(f(x))$ bezeichnet. Diese Funktion, die jedem x den Wert $g(f(x))$ zuordnet, wird oft mit $g \circ f$ bezeichnet, das heißt $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

BEMERKUNG: Nach der obigen Definition gilt im Allgemeinen: $g \circ f \neq f \circ g$ und $(g \circ f)(x) \neq g(x) \cdot f(x)$.

BEISPIEL:

Mit $f(x) = x + a$ und $g(x) = x^2$ erhalten wir

$$(g \circ f)(x) = (x+a)^2 \ ,$$

$$(f \circ g)(x) = x^2 + a \text{ und}$$

$$g(x) \cdot f(x) = x^3 + ax^2 \ .$$

2.3 Einfache spezielle Funktionen

2.3.1 Lineare Funktionen

Die lineare Funktion

$$y = mx + b \tag{2.16}$$

stellt eine **Gerade** mit dem Anstieg m dar, die die y-Achse im Punkt b schneidet.

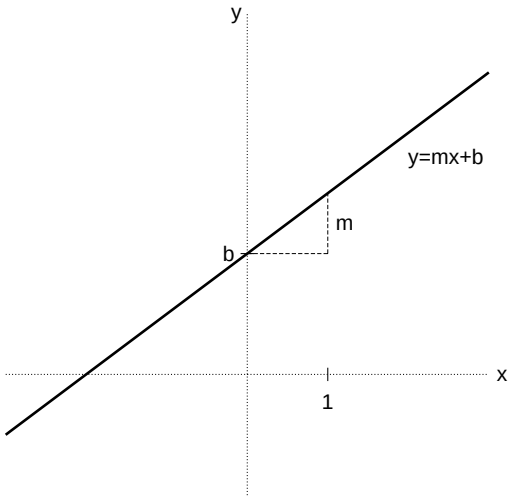


Abbildung 2.8: Graph der Geradengleichung $y = mx + b$.

2.3.2 Quadratische Funktionen

Die einfachste quadratische Funktion lautet

$$y = x^2 \tag{2.17}$$

und stellt eine nach oben geöffnete Parabel mit dem Scheitelpunkt $(0, 0)$ dar.

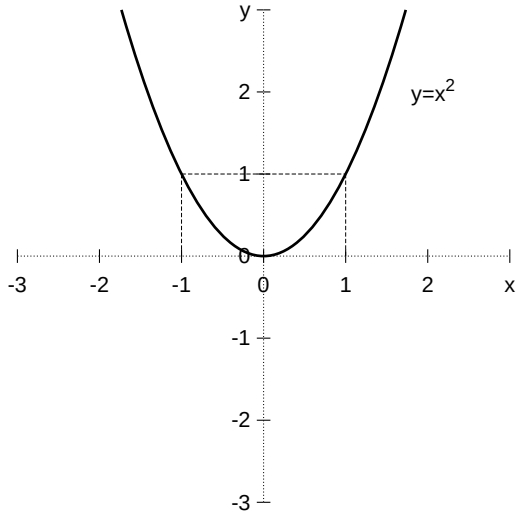


Abbildung 2.9: Die Parabel $y = x^2$.

Die allgemeine quadratische Funktion

$$y = ax^2 + bx + c \qquad \text{mit } a, b, c \in \mathbf{R} \tag{2.18}$$

läßt sich für $a \neq 0$ durch **quadratische Ergänzung** auf die Form

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{a} \qquad \text{mit} \quad D = \frac{b^2}{4} - ac \tag{2.19}$$

bringen, wobei die Größe D als **Diskriminante** bezeichnet wird.

SELBSTTEST: Überprüfen Sie diese Umformung indem Sie den quadratischen Term in Gleichung (2.19) explizit ausrechnen.

Der große Vorteil von (2.19) gegenüber (2.18) besteht zum einen darin, dass wir (2.19) leicht nach x auflösen können, wovon im nächsten Abschnitt Gebrauch gemacht wird. Zum anderen kann man an Gleichung (2.19) auch direkt die Verschiebung und Streckung ablesen: nach den Ergebnissen der letzten Kapitel stellt Gleichung (2.19) nämlich eine um den Faktor a in y-Richtung gestreckte Parabel dar, deren Scheitel im Punkt $(-b/2a, -D/a)$ liegt.

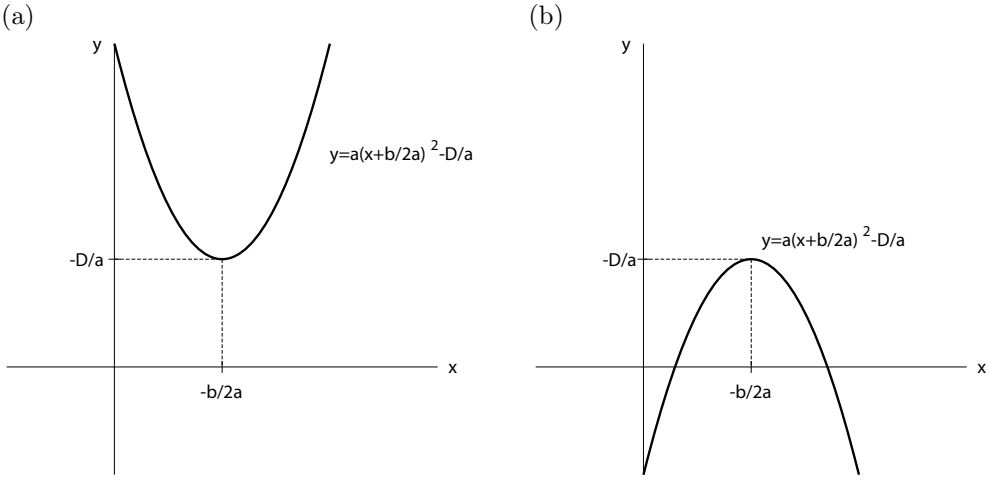


Abbildung 2.10: Graphen der allgemeinen quadratischen Funktion $y = ax^2 + bx + c$ mit (a) $a > 0$ und (b) $a < 0$.

2.4 Quadratische Gleichungen

Im letzten Abschnitt haben wir die allgemeine quadratische Funktion $y = ax^2 + bx + c$ betrachtet. In unzähligen Anwendungen trifft man auf das Problem, die Nullstellen dieser Funktion zu finden, das heißt diejenigen x-Werte, für die $ax^2 + bx + c = 0$ gilt. Man sucht also nach reellen Lösungen der **quadratischen Gleichung**

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad a \neq 0 \; . \tag{2.20}$$

SELBSTTEST: Warum wurde in Gleichung (2.20) $a \neq 0$ gesetzt?

Gleichung (2.19) zeigt, dass die Suche nach reellen Lösungen der quadratischen Gleichung (2.20) für negative Diskriminanten D *nicht* gelingen kann. Ist in diesem Fall nämlich a positiv, so ist der Term $a[x + b/(2a)]^2$ nicht-negativ, und der Term $-D/a$ ist positiv. Damit muss y für alle x positiv sein. Ist umgekehrt a negativ, so ist der Term $a[x+b/(2a)]^2$ nicht-positiv, und der Term $-D/a$ ist negativ. Damit muss y nun für all x negativ sein. In beiden Fällen existiert also keine Nullstelle $y = 0$.

Falls D jedoch nicht-negativ ist, so kann Gleichung (2.20) nach x aufgelöst werden. Ingesamt erhält man:

Satz (Lösungen der quadratischen Gleichung):
Die quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ besitzt für $a \neq 0$ die Lösungen

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{4D}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \ . \tag{2.21}$$

Drei Fälle sind zu unterscheiden:
Fall 1: $D > 0$. Es existieren zwei verschiedene Lösungen $x_1 \neq x_2$.
Fall 2: $D = 0$. x_1 und x_2 fallen zusammen, so dass genau eine Lösung existiert.
Fall 3: $D < 0$. Es existieren keine reellen Lösungen.

Bezogen auf den Graphen der quadratischen Funktion (2.18) entsprechen diese drei Fälle den drei möglichen verschiedenen geometrischen Situationen — zwei, ein oder kein Schnittpunkt der Parabel mit der x-Achse.

BEMERKUNG: Die aus der Schule bekannte p, q-Formel erhält man im Spezialfall $a = 1$, wenn man $p = b$ und $q = c$ setzt. Es gilt also:

Satz (Lösungen der quadratischen Gleichung in p, q-Form):
Die quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ besitzt die Lösungen

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \ . \tag{2.22}$$

Die Diskriminante lautet nun $D = \frac{p^2}{4} - q$.

BEISPIELE:

Die Gleichung $x^2 - 2x - 15$ besitzt die beiden Nullstellen

$$x_{1/2} = 1 \pm \sqrt{1 + 15} = 1 \pm 4 \ ,$$

d. h. $x_1 = -3, x_2 = 5$.

Die Gleichung $x^2 - 2x + 1 = 0$ besitzt die Nullstelle $x_{1/2} = 1 \pm \sqrt{1 - 1} = 1$.

Die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ besitzt keine reelle Nullstelle.

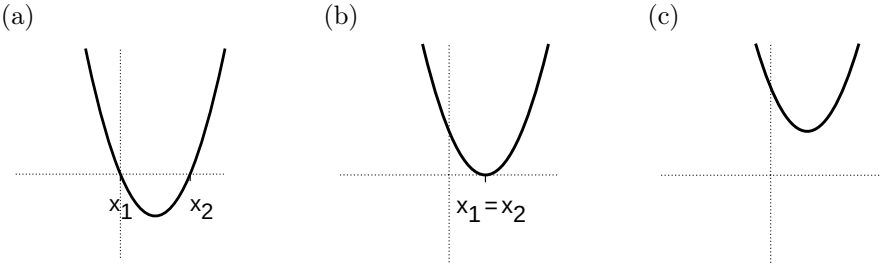


Abbildung 2.11: Die allgemeine quadratische Funktion besitzt (a) zwei Nullstellen, wenn die Diskriminante D größer als Null ist, (b) genau eine Nullstelle, wenn D Null ist und (c) keine Nullstelle, wenn die Diskriminante kleiner Null ist.

BEMERKUNG: Um Gleichung (2.20) auch für $D < 0$ lösen zu können, werden wir in einem späteren Kapitel die sogenannten **komplexen Zahlen** einführen.

2.5 Aufgaben

1. (Funktionen) Skizzieren Sie folgende Funktionen $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$:

(a)	$f(x) = x$	(e)	$f(x) = -2x + 3$	(i)	$f(x) = 2x^2$
(b)	$f(x) = 2x$	(f)	$f(x) = 2x - 3$	(j)	$f(x) = x^2/2$
(c)	$f(x) = x/2$	(g)	$f(x) = -2x - 3$	(k)	$f(x) = x^3$
(d)	$f(x) = 2x + 3$	(h)	$f(x) = x^2$	(l)	$f(x) = 1/x$

2. (quadratische Gleichungen) Lösen Sie nach x auf:

(a)	$(x-2)^2 = 0$	(d)	$x(x-1) = 0$	(g)	$x^2 + 2x - 3 = 0$
(b)	$2(x+3)^2 = 8$	(e)	$x^2 + 2x = 0$	(h)	$x^2 = 3x + 4$
(c)	$(x-1)(x+2) = 0$	(f)	$4x^2 - 3x = 0$	(i)	$\frac{1}{2}x^2 + x = 3$

3. (quadratische Gleichung) Eine Strecke soll so geteilt werden, daß der kürzere Teil sich zu dem längeren Teil so verhält, wie der längere Teil zur ganzen Strecke. Wie lang ist der längere Teil relativ zur ganzen Strecke? Dieses Verhältnis wird *Goldener Schnitt* genannt.

4. (Scheitelpunktgleichung) Wo liegt der Scheitel folgender Parabeln? Sind die Parabeln nach oben oder nach unten geöffnet?

(a)	$f(x) = 2(x+3)^2 - 2$	(e)	$f(x) = -2x^2 + 6x + 4$
(b)	$f(x) = x^2 + 2x$	(f)	$f(x) = (x-2)(x-4)$
(c)	$f(x) = -4x^2 + 12x$	(g)	$f(x) = 2(x-3)(x+5)$
(d)	$f(x) = x^2 + 2x - 3$	(h)	$f(x) = x(x-1) + 2$

5. (Beispiel aus der Physik: Wurfparabel) Wird am Ort $x_0 = 0$ ein Ball in die Luft geworfen, dann entspricht (bei Vernachlässigung der Luftreibung) seine Bewegung folgender Parabel:

$$h(x) = \frac{v_y}{v_x}x - \frac{1}{2}\frac{g}{v_x^2}x^2 \tag{2.23}$$

Darin ist g die Erdbeschleunigung, $v_x \neq 0$ die horizontale und v_y die vertikale Geschwindigkeitskomponente beim Loslassen des Balls. $h(x)$ ist die Höhe des Balls h in Abhängigkeit vom Ort x.

(a) Welche Höhe erreicht der Ball maximal? Wie weit ist er bis dahin geflogen?

(b) Wie weit fliegt der Ball insgesamt?

(c) Fertigen Sie eine Skizze der Wurfbahn an!

6. (Beispiel aus der Populationsökologie) Eine Population von z.B. Fruchtfliegen bestehe aus N Individuen. Die Anzahl der neugeborenen Fliegen pro Tag sei proportional zur Anzahl der Indviduen: $N_b = rN$. Dabei ist r die Geburtenrate. Die Anzahl der gestorbenen Tiere pro Tag N_d ist auf Grund von Nahrungsmangel bei zu großen Populationen größer als allein durch das Sterben alter Tiere. Dies kann in seiner einfachsten Form durch eine quadratische Abhängigkeit von der Populationsgröße berücksichtigt werden: $N_d = aN^2$.

Darin ist $a \in \mathbf{R}^+$ ein geeigneter Proportionalitätsfaktor. Bei welcher Populationsgröße N wird die Anzahl der Geburten pro Tag genau durch die Todesfälle ausgeglichen?

7. (Umkehrfunktion) Wie lauten die Umkehrfunktionen folgender Funktionen? Für welche x sind die Funktionen bzw. ihre Umkehrfunktionen überhaupt definiert?

(a) $y = 2(x+3)^2 - 2$

(b) $y = -2x^2 + 6x + 4$

(c) $y = 3\sqrt{x-2}$

(d) $y = \sqrt{x^2+4}$

8. (Umkehrfunktionen)

(a) Welche Geraden $y = mx + b$ sind identisch mir ihrer Umkehrfunktion?

(b) Welche Hyperbeln $y = \frac{c}{x-a} + b$ sind identisch mit ihrer Umkehrfunktion?

9. (Komposition von Funktionen) Um schnell einen Eindruck von dem Aussehen einer zusammengesetzten Funktion wie z.B. $f(x) = \sqrt{\sin^2(x)+1}$ zu bekommen, ohne die Funktion gleich zu diskutieren zu müssen, sollte man sich einfach Schritt für Schritt klar machen, was diese Funktion macht. Also:

(a) Wie sieht $y = \sin(x)$ aus?

(b) Was passiert mit $\sin(x)$, wenn seine Funktionswerte quadriert werden?

(c) Was bewirkt das $+1$?

(d) Wie wirkt sich schließlich die Wurzel darauf aus?

Veranschaulichen Sie sich in gleicher Weise die beiden Funktionen

$$g(x) = \frac{1}{x^2+2} \quad \text{und} \quad h(x) = (e^x - 1)^2 \ !$$

10. (Komposition von Funktionen) Skizzieren Sie die Funktion $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R},\ x \mapsto (x+1)\mathrm{e}^{-4x}$. Überlegen Sie sich dazu die Form der einzelnen Komponenten dieser Funktion. Welchen Definitionsbereich, welche Ziel- und Wertemenge hat die Funktion? Ist sie injektiv und/oder surjektiv? Kann man f umkehren?

11. (Komposition von Funktionen) Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen $f(x) = -x^3 + 4x$ und $g(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2x^2$! Überlegen Sie sich dazu, wie sich die Funktionen für sehr große und sehr kleine Werte von x verhalten, und berechnen Sie die Nullstellen. Sie sollen nicht die Lage eventueller Extremstellen berechnen!

Skizzieren Sie außerdem den Graphen der Gaußfunktion $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$. Kann diese Funktion Nullstellen haben?

12. (Beispiel aus der Neurobiologie) In den Membranen von Zellen sind Ionenpumpen eingebaut, die bestimmte Ionensorten durch die Membran pumpen. Dadurch ist z.B. die Konzentration von Kalium-Ionen innerhalb der Zelle um das zwanzigfache höher als im extrazellulären Medium. Die Natrium-Konzentration ist dagegen außerhalb der Zelle um das fünfzehnfache größer als innerhalb. Weiterhin gibt es Ionenkanäle, die spezifisch bestimmte Ionensorten durch die Membran fließen lassen. Wenn nur Ionenkanäle in die Zellmembran eingebaut sind, die für Kalium-Ionen durchlässig sind, dann stellt sich bei dem sogennanten Kalium-Gleichgewichtspotential E_K ein Gleichgewicht zwischen dem

durch den Konzentrationsunterschied hervorgerufenen Ionen-Rückfluß und dem diesen entgegenwirkenden elektrischen Feld ein, welches sich durch den Ionenfluß aufbaut. Für das Gleichgewichtspotential der Ionensorte X gilt allgemein die Nernst'sche Formel

$$E_X = 58\text{mV} \times \log_{10} \frac{[X]_o}{[X]_i} \ , \tag{2.24}$$

wobei $[X]_i$ die Ionenkonzentration innerhalb der Zelle und $[X]_o$ die Ionenkonzentration außerhalb der Zelle ist.

(a) Wo liegen die Gleichgewichtspotentiale von Kalium und Natrium (E_K und E_{Na})?

Für den elektrischen Strom I, den die Ionen beim Durchfließen eines Kanals verursachen, gilt näherungsweiße das Ohmsche Gesetz:

$$I = g(V - E) \ . \tag{2.25}$$

Dabei ist V die elektrische Spannung, die über der Membran anliegt, g die Leitfähigkeit des Kanals, durch den die Ionen fließen (der Widerstand ist $R = 1/g$) und E das Gleichgewichtspotential der entsprechenden Ionensorte.

Skizzieren Sie die Strom-Spannungskennlinien (d.h. $I(V)$) für folgende Fälle; zeichnen Sie für (b), (c), (d), (e) jeweils **ein** Diagramm):

(b) In einem Membranstück seien ein, zwei oder drei Kanäle geöffnet. Im offenen Zustand haben die Kanäle alle die gleiche konstante Leitfähigkeit von jeweils g. Ihr Gleichgewichtspotential sei bei 0 mV (3 Kurven). Beachten Sie: Die Leitfähigkeit von parallel geschalteten Kanälen addiert sich.

(c) Zwei Ionenkanäle haben die gleiche Leitfähigkeit g aber unterschiedliche Gleichgewichtspotentiale. Der erste Kanal hat ein negatives Gleichgewichtspotential E_1 (z.B. das von Kalium E_K), der zweite ein positives E_2 (z.B. das von Natrium E_{Na}) (2 Kurven).

(d) Die beiden Kanäle aus (c) haben nun eine spannungsabhängige Leitfähigkeit: Unterhalb einer Spannung V_g ($E_1 < V_g < E_2$) sei die Leitfähigkeit beider Kanäle klein, darüber ändert sie sich sprunghaft auf einen größeren Wert, d.h. ab der Spannung V_g öffnen sich die Kanäle. In Neuronen spielen solche Kanäle eine wichtige Rolle bei der Erzeugung von Aktionspotentialen (auch Spikes genannt). Das sind pulsartige Entladungen mit denen die Neurone miteinander kommunizieren. (2 Kurven).

(e) Nun soll sich die Leitfähigkeit der beiden Kanäle nicht sprunghaft wie in (d) sondern allmählich vom niedrigen zum hohen Wert ändern. Außerdem soll sich die Leitfähigkeit einmal bei niedriger (a) und einmal bei etwas höherer (b) Spannung ändern (4 Kurven).

Kapitel 3

Potenzen und verwandte Funktionen

Biologisch relevante Zahlen können rasch sehr unhandlich werden. So besteht beispielsweise das Genom des Menschen aus circa 3000000000 Basenpaaren, das menschliche Gehirn enthält mehr als 100000000000 Nervenzellen, die mit insgesamt ungefähr 100000000000000 Synapsen verbunden sind — ganz zu schweigen von der Zahl der Moleküle in einem Organismus.

Um mit derart großen Zahlen rasch und sicher umgehen zu können, schreibt man kompakt $100 = 10 \cdot 10 = 10^2$, $1000 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^3$, $10000 = 10^4$ etc. In diesen Beispielen wird die Zahl 10 als **Basis** bezeichnet, die hochgestellte Zahl 2, 3, 4 als **Exponent**. Mit diesen Definitionen ist eine kurze und übersichtliche Schreibweise gefunden: das Genom des Menschen besteht aus circa $3 \cdot 10^9$ Basenpaaren, das Gehirn aus gut 10^{11} Neuronen und 10^{14} Synapsen und selbst die geschätzte Zahl der Atome im Weltall erscheint mit 10^{80} noch halbwegs "greifbar".

Neben der Basis 10 spielen auch andere Basen eine wichtige Rolle in Technik und Wissenschaft — beispielsweise die Zahl 2 bei der Definition von bits und bytes. Wir werden deshalb zu Beginn des Kapitels den mathematischen Begriff der Potenz präzise definieren. Mittels dieses neuen Handwerkszeugs erhalten wir wichtige neue Funktionstypen. Zum einen die **Potenzfunktionen** wie $y = x^2$ und **Polynome** wie $y = x^4 + 3x$. Bei ihnen ist die Basis variabel, der Exponent jedoch fest. Beim zweiten Typ, den **Exponentialfunktionen**, ist hingegen die Basis fest und der Exponent variabel. Das wichtigste Beispiel ist hier die Exponentialfunktion zur Basis e, $f(x) = \mathrm{e}^x$. Zu beiden Funktionstypen lassen sich Umkehrfunktionen definieren. Man erhält so die **Wurzelfunktionen** und **Logarithmsusfunktionen**.

Am Ende des Kapitels geben wir mit dem **Binomischen Lehrsatz** noch eine Verallgemeinerung der aus der Schule bekannten Binomischen Formeln an. In diesem Zusammenhang werden auch die nicht zuletzt in der Statistik wichtigen Begriffe **Fakultät** und **Binomialkoeffizient** eingeführt.

3.1 Einfache Potenzen und Wurzeln

3.1.1 Potenzen natürlicher Zahlen

Definition (Potenzen natürlicher Zahlen):
Sei $a \in \mathbf{R}$ und $n \in \mathbf{N}$. Dann definiert man die **Potenz der Basis** a **zum Exponenten** n durch:

$$\begin{aligned} a^1 &= a \\ a^{n+1} &= a \cdot a^n \\ &= \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{(n+1)-mal} \end{aligned} \tag{3.1}$$

BEMERKUNG: Eine solche rückbezügliche Definition einer Größe x_{n+1} durch die schon bekannte Größe x_n nennt man **rekursiv**.

Mit dem Begriff der Potenz erhalten wir eine ganze Reihe neuer Funktionen.

3.1.2 Potenzfunktion

Definition (Potenzfunktion):
Sei $n \in \mathbf{N}$ mit $n \geq 2$. Eine **Potenzfunktion** ist eine Funktion $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, x \mapsto f(x) = y$ der Form

$$y = x^n \ . \tag{3.2}$$

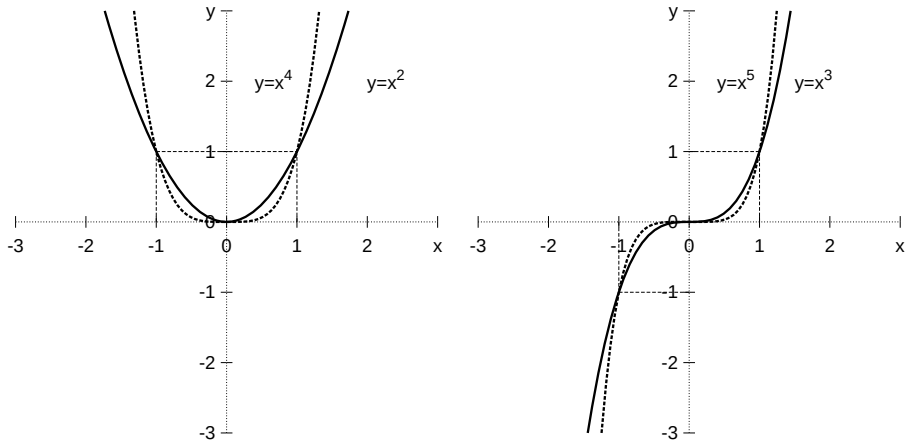


Abbildung 3.1: Potenzfunktionen mit $n = 2, 4$ (links) und $n = 3, 5$ (rechts).

Das Symmetrieverhalten von Potenzfunktionen ist sehr übersichtlich. Für gerades n ist eine Potenzfunktion eine gerade Funktion wie die Quadratfunktion $y = x^2$, für ungerades n ist eine Potenzfunktion eine ungerade Funktion wie die Funktionen $y = x$ oder $y = x^3$.

Weiterhin haben alle Potenzfunktionen der Form (3.2) an der Stelle $x = 1$ den Wert $y = 1$. Potenzfunktionen mit geradem n haben an der Stelle $x = -1$ ebenfalls den Wert $y = 1$, Potenzfunktionen mit ungeradem n haben an der Stelle $x = -1$ den Wert $y = -1$.

Schließlich gilt: Je größer n ist, um so geringer ist der Abstand des Graphen von f von der x-Achse für $-1 < x < 1$, und um so schneller entfernt sich die Funktion von der x-Achse für $x > 1$ beziehungsweise $x < -1$.

3.1.3 Wurzelfunktion

Für ungerade n ist die Potenzfunktion $y = x^n$ auf ganz $\mathbf{R}$ invertierbar, für gerade n jedoch nur auf $\mathbf{R}_0^+$ *oder* $\mathbf{R}_0^-$. Üblicherweise betrachtet man dabei den Fall $\mathbf{R}_0^+$. Die Umkehrfunktion wird **Wurzelfunktion** genannt:

Definition (Wurzelfunktion):
Sei $n \in \mathbf{N}$. Eine **Wurzelfunktion** ist eine Funktion $f : \mathbf{R_0^+} \to \mathbf{R}, x \mapsto f(x) = y$ der Form

$$y = \sqrt[n]{x}\,. \tag{3.3}$$

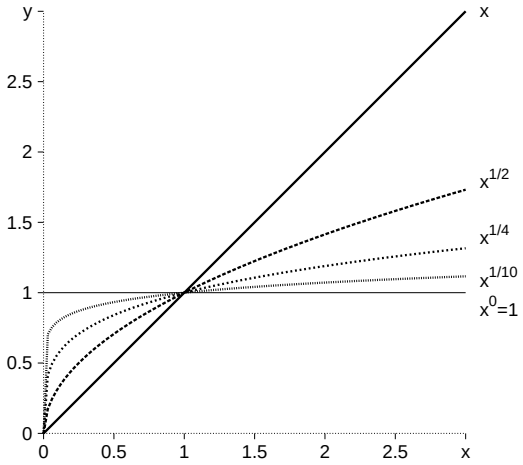


Abbildung 3.2: Wurzelfunktionen für verschiedene n. (Bem: $x^{1/n} := \sqrt[n]{x}$)

3.2 Polynome

Definition (Polynome):
Sei $n \in \mathbf{N}$. Ein **Polynom vom Grad** n ist eine Funktion $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, x \mapsto f(x) = y$ der Form

$$\begin{aligned} y &= \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu\,, \quad a_\nu \in \mathbf{R} \\ &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n\,, \end{aligned} \tag{3.4}$$

bei der der Koeffizient a_n nicht Null ist.

BEMERKUNG: Koeffizienten a_ν mit $\nu < n$ dürfen verschwinden. Der Grad des Polynoms bemisst sich allein nach der höchsten auftretenden Potenz.

BEISPIELE:

Die Funktion $y = 2x^4 + x^5$ ist ein Polynom fünften Grades.

Die Funktion $y = -x^3 + x$ ist ein Polynom dritten Grades.

Die Potenzfunktion $y = x^8$ ist ein Polynom achten Grades.

Polynome spielen in der Mathematik eine wichtige Rolle. Mit ihnen kann man überaus komplexe Phänomene beschreiben. Das kann man jedoch auch mit anderen Funktionstypen. Das Besondere an Polynomen ist, dass sie einfach zu handhaben sind. So lassen sich Polynome beispielsweise sehr einfach differenzieren und integrieren.

Da man Polynome so gut im Griff hat, analysiert man komplizierte Funktionen beispielsweise indem man sie durch Polynome approximiert. Wir werden darauf im Kapitel über Taylorreihen näher eingehen.

Von besonderer Bedeutung ist die Nullstellenbestimmung von Polynomen. So läßt sich das Lösen der auch in der Biologie wichtigen, hier noch nicht behandelten linearen Differenzen- und Differentialgleichungen auf die Bestimmung von Nullstellen eines Polynoms reduzieren. Wir werden dies in einem späteren Kapitel im Detail behandeln.

3.3 Potenzen mit beliebigen reellen Exponenten

Bisher haben wir als Exponenten nur natürliche Zahlen erlaubt. Wir wollen dies nun verallgemeinern:

Definition (Potenzen mit ganzzahligem Exponenten):
Sei $n \in \mathbf{N}$ und $a \in \mathbf{R}$. Dann setzen wir

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \text{für } a \neq 0 \tag{3.5}$$

$$a^0 = 1. \tag{3.6}$$

Potenzen mit ganzzahligen Exponenten: Potenzfunktionen mit negativem Exponenten sind für $a = 0$ nicht definiert. In der Nähe dieser Definitionslücke werden die Funktionswerte betragsmäßig beliebig groß. Man spricht von einer **Polstelle**.

Qualitativ ähnelt die Funktion $y = x^{-n}$ bei geradem n der Funktion $y = x^{-2}$ und bei ungeradem n der Funktion $y = x^{-1}$.

Definition (Potenzen mit rationalen Exponenten):
Sei $a > 0$ und $r = p/q$ mit $p \in \mathbf{Z}$ und $q \in \mathbf{N}$. Dann setzen wir

$$a^r = a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}\ . \tag{3.7}$$

BEMERKUNG: Diese Erweiterung auf beliebige rationale Exponenten ist nur für $a \geq 0$ möglich. Der Grund liegt darin, dass es keine reelle Zahl gibt, die die Wurzel einer negativen Zahl ist.

Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten: Funktionen der Form $y = x^r$ mit $r \in \mathbf{Q}$ schließen neben den Potenzfunktionen mit ganzen Zahlen auch die Wurzelfunktionen ein. Diese Vereinheitlichung ist sehr praktisch. Je nach dem Wert von r kann dabei der

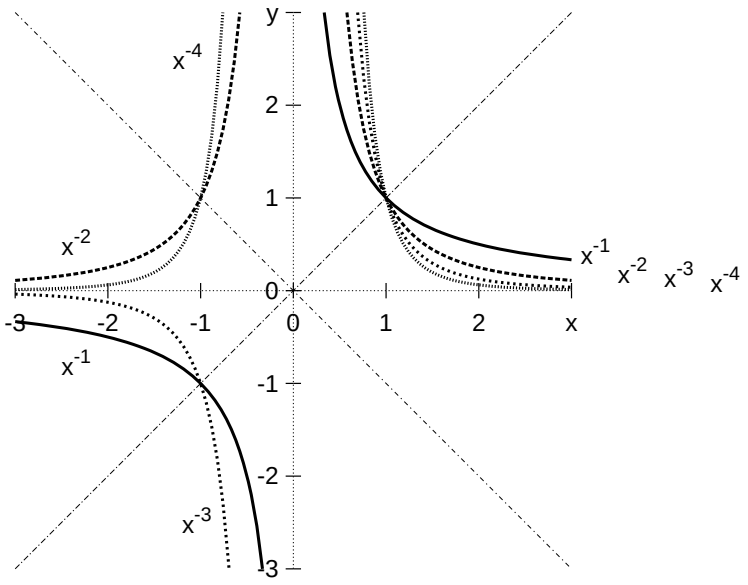


Abbildung 3.3: Hyperbeln — Potenzfunktionen mit negativem n.

Definitionsbereich ganz $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}\backslash\{0\}$ (die reellen Zahlen ohne die Null), $\mathbf{R}_0^+$ oder auch nur $\mathbf{R}^+$ sein.

Potenzen mit reellen Exponenten: Für die 'noch verbleibenden' irrationalen Exponenten $z \in \mathbf{R}$ definiert man die Potenz a^z, indem man z schrittweise durch rationale Zahlen z annähert. Für diese ist die Potenz ja schon definiert! Dieser Vorgang einer schrittweisen Annäherung ist in der Mathematik ganz allgemein von größter Bedeutung und wird Grenzwertprozeß genannt. Wir werden ihn ab Kapitel 5 eingehend diskutieren.

Potenzfunktionen mit reellem Exponenten: Funktionen der Form $y = x^r$ mit $r \in \mathbf{R}$ werden wie Potenzen mit reellen Exponenten gewonnen.

Insgesamt haben wir nun Potenzen für beliebige reelle Exponenten und positive reelle Basen eingeführt. Für diese gelten die aus der Schule bekannten Potenzgesetze.

Potenzgesetze:
Für positive reelle Zahlen x, y und reelle Zahlen v, w gilt:

$$x^v \cdot x^w = x^{v+w} \tag{3.8}$$

$$x^v \cdot y^v = (x \cdot y)^v \tag{3.9}$$

$$\frac{x^v}{y^v} = \left(\frac{x}{y}\right)^v \tag{3.10}$$

$$(x^v)^w = x^{v \cdot w} \tag{3.11}$$

$$x^{-v} = \frac{1}{x^v} \tag{3.12}$$

BEMERKUNG: Unter der Voraussetzung, dass v und w *ganze Zahlen* sind, gelten diese Gesetze auch für *beliebige* reelle Zahlen x, y.

3.3.1 Mathematik und Biologie: Skalengesetze

Mit den jetzt bekannten Begriffen kann man einige auch biologisch interessante Fragen beantworten. Wie stark wächst beispielsweise die Oberfläche einer Zelle, wenn sich ihr Durchmesser um ein Prozent vergrößert? Wie verändert sich ihr Volumen und wie das für viele Prozesse wichtige Oberflächen–zu–Volumen Verhältnis?

Lösung: Wenn der Zelldurchmesser um ein Prozent wächst, dann wächst die Oberfläche relativ zur Ausgangssituation auf den Wert $1.01 \times 1.01 = 1.01^2$, das Zellvolumen auf 1.01^3. Diese Zahlen können wir leicht per Taschenrechner oder mit Papier und Bleistift berechnen. Wir erhalten für die Oberfläche den Faktor 1.0201, für das Volumen 1.030301. Das Oberflächen-zu-Volumen Verhältnis hat sich auf $1.01^2/1.01^3 = 1.01^{(2-3)} = 1.01^{-1} \approx 0.99$ verringert. Dieses Ergebnis hätte man für allgemeine Größenveränderungen auch direkt aus folgender Überlegung schlußfolgern können: Die Oberfläche O eines "gewöhnlichen" Körpers **skaliert** wie das Quadrat x^2 seiner linearen Ausdehnung x, sein Volumen V wie x^3. Damit skaliert das Oberflächen-zu-Volumen Verhältnis wie $x^2/x^3 = x^{(2-3)} = x^{-1}$.

Allerdings existieren auch Objekte mit einem auf den ersten Blick ungewöhnlichem Skalierungsverhalten. Dazu gehören Objekte, die auf allen Größenskalen ähnliche Strukturen zeigen — beispielsweise baumartige Strukturen (näherungsweise trifft dies auf Nervenzellen und das Blutgefäßsystem zu), Küstenlinien oder Galaxienverteilungen im Weltall. Die **Selbstähnlichkeit** dieser **fraktalen Objekte** entspricht einem Skalierungsverhalten mit Exponenten, die keine ganzen Zahlen sind.

Weitere Beispiele: Wie skaliert die Größe des Gehirns (oder auch: maximales Alter, Herzschlagrate, metabolische Aktivität) in Abhängigkeit von der Körpergröße? Wie wächst die Photosyntheseleistung eines Baumes in Abhängigkeit von seiner Größe? Bei der Analyse derartiger Fragen stößt man oft auf einfaches Potenzverhalten, systematische Abweichungen bei einer bestimmten Spezies davon können als Indiz besonderer evolutionärer Entwicklungen interpretiert werden.

3.4 Exponentialfunktion und Logarithmus

3.4.1 Exponentialfunktion

Bei den in Gleichung (3.2) eingeführten Potenzfunktionen war die Basis x die unabhängige Variable, der Exponent n ein fest gewählter Parameter.

Nun wollen wir uns umgekehrt mit Funktionen wie $y = 2^x$, $y = 10^x$, $y = e^x$, oder allgemein $y = a^x$ mit $a \in \mathbf{R}^+$ beschäftigen, also die (positive) Basis a festhalten aber den Exponenten x variieren. Diese Funktionen werden als **Exponentialfunktionen** bezeichnet. Dabei ist die Basis $a > 0$ zu wählen — der Ausdruck $(-1)^{1/2}$ ist ja beispielsweise in den reellen Zahlen gar nicht definiert!

Notiz:
Bei Potenzfunktionen ist die Basis variabel und der Exponent konstant.
Bei Exponentialfunktionen ist die Basis konstant und der Exponent variabel.

Wie wir in Kürze sehen werden, zeigen **Wachstums-** und **Zerfallsprozesse** exponentielles Verhalten. Exponentialfunktionen sind deshalb von größter Bedeutung in der Biologie.

Definition (Exponentialfunktion zur Basis a):
Für $a, x \in \mathbf{R}$, $a > 0$ bezeichnet man die Funktion

$$f(x) = a^x \tag{3.13}$$

als **Exponentialfunktion zur Basis** a.
Die Exponentialfunktion zur Basis e $= 2.718282\ldots$ (der **Eulerschen Zahl**), nennt man kurz **Exponentialfunktion** und schreibt oft auch:

$$\mathrm{e}^x = \exp(x)\ . \tag{3.14}$$

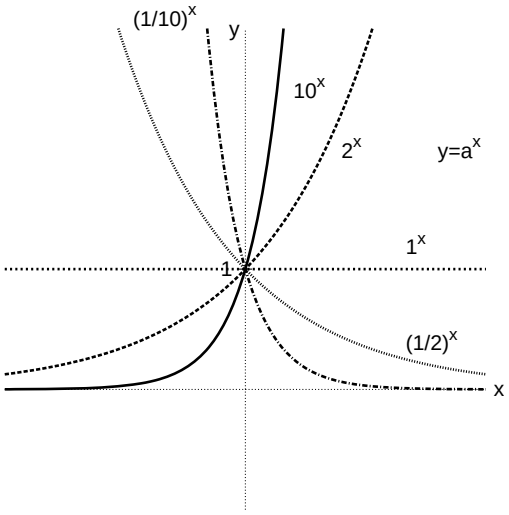


Abbildung 3.4: Exponentialfunktion $f(x) = a^x$ für verschiedene Parameter a

Ohne Beweis geben wir noch einige wichtige Eigenschaften von Exponentialfunkionen an:

Eigenschaften von Exponentialfunktionen:
Sei $a, b \in \mathbf{R}$, $a, b > 0$ und $x, y \in \mathbf{R}$. Dann gilt:
(1) Die Exponentialfunktion zur Basis a ist für $a > 1$ streng monoton wachsend, und für $0 < a < 1$ streng monoton fallend.
(2) Wegen der Monotonie ist die Exponentialfunktion zur Basis a für $a \neq 1$ umkehrbar. Ihre Umkehrfunktion heißt **Logarithmus** und wird im nächsten Abschnitt besprochen.
(3) Aufgrund der Potenzgesetze (3.8) - (3.12) gilt:

$$a^x > 0 \tag{3.15}$$

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y} \tag{3.16}$$

$$a^x \cdot b^x = (ab)^x \tag{3.17}$$

$$\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x \tag{3.18}$$

3.4.2 Logarithmus

Die Exponentialfunktion zur Basis $a > 0$ ist für $a > 1$ streng monoton wachsend für $1 > a > 0$ streng monoton fallend. Die Exponentialfunktion zur Basis $a > 0$ ist deshalb für alle positiven $a \neq 1$ umkehrbar. Der Definitionsbereich der Exponentialfunktion zur Basis $a > 0$ ist $\mathbf{R}$, ihr Wertebereich $\mathbf{R}^+$, die Menge aller positiven reellen Zahlen. Damit kann man auf $\mathbf{R}^+$ die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion zur Basis $a > 0$ definieren, den **Logarithmus zur Basis a**:

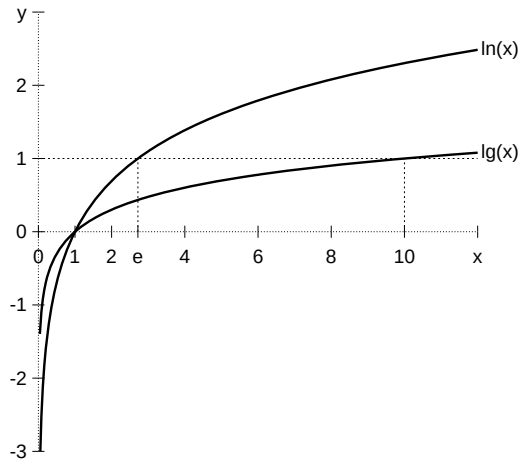


Abbildung 3.5: Natürlicher Logarithmus, $f(x) = \ln(x) = \log_e(x)$, und Logarithmus zur Basis 10, d.h. $f(x) = \lg(x) = \log_{10}(x)$.

Definition (Logarithmus zur Basis a):
Sei $a \in \mathbf{R}$, $a > 0$ und $a \neq 1$. Dann ist für $x > 0$ der **Logarithmus zur Basis a** als Umkehrfunktion der Exponentialfunktion zur Basis a definiert,

$$y = \log_a(x) \quad \Longleftrightarrow \quad x = a^y \ . \tag{3.19}$$

Definition:
Der Logarithmus zur Basis e heißt **natürlicher Logarithmus** und wird mit

$$\ln(x) = \log_e(x) \tag{3.20}$$

bezeichnet.
Für den Logarithmus zur Basis 2, den **Logarithmus dualis**, schreibt man oft

$$\mathrm{ld}(x) = \log_2(x) \ , \tag{3.21}$$

beim Logarithmus zur Basis 10, dem **dekadischer Logarithmus**, läßt man häufig den Index weg und kürzt manchmal auch mit "lg" ab,

$$\log(x) = \lg(x) = \log_{10}(x) \ . \tag{3.22}$$

BEMERKUNG: Die Notation "log" (ohne Index) wird manchmal auch für den natürlichen Logarithmus verwendet. Vorsicht! Verwechslungsgefahr!

Als Umkehrfunktion der Exponentialfunktion gilt für den Logartithmus

$$a^{\log_a(x)} = x \qquad \text{für} \qquad a > 0, a \neq 1, x > 0 \tag{3.23}$$

und

$$\log_a(a^x) = x \qquad \text{für} \qquad a > 0, a \neq 1 \ . \tag{3.24}$$

Von der Exponentialfunktion 'erbt' der Logarithmus die folgenden Eigenschaften:

Eigenschaften der Logarithmen:
Für $x, y, a \in \mathbf{R}^+$, $a \neq 1$, $z \in \mathbf{R}$ gilt:

$$\log_a(1) = 0 \qquad [\text{weil } a^0 = 1] \tag{3.25}$$

$$\log_a(a) = 1 \qquad [\text{weil } a^1 = a] \tag{3.26}$$

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y) \tag{3.27}$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y) \tag{3.28}$$

$$\log_a(x^z) = z \log_a(x) \tag{3.29}$$

insbesondere für $z = -1$:

$$\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x) \tag{3.30}$$

Herleitung von Gleichung (3.27):
Wegen Gleichung (3.23) gilt $x = a^{\log_a(x)}$, $y = a^{\log_a(y)}$ und $xy = a^{\log_a(xy)}$. Multipliziert man die linken Seiten der ersten beiden Gleichungen so folgt $xy = a^{\log_a(x)} \cdot a^{\log_a(y)} = a^{\log_a(x)+\log_a(y)}$. Damit gilt insgesamt: $a^{\log_a(xy)} = a^{\log_a(x)+\log_a(y)}$. Da für $a \neq 1$ die Exponentialfunktion zur Basis a streng monoton und damit bijektiv ist, folgt aus $a^c = a^d$ sofort $c = d$, auf unser Beispiel angewendet also (3.27). □

Herleitung von Gleichung (3.29):
Wegen Gleichung (3.23) gilt $x = a^{\log_a(x)}$ und $x^y = a^{\log_a(x^y)}$. Mit Hilfe der Regeln für Potenzen folgt dann $x^y = [a^{\log_a(x)}]^y = a^{y \log_a(x)}$. Wie im letzten Beweis erhält man mit Hilfe der strengen Monotonie daraus die Behauptung. □

Gleichung (3.28) folgt dann aus (3.27), (3.29) und (3.30). □

3.4.3 Umrechnung zwischen verschiedenen Basen

Mit Hilfe des Logarithmus kann man die Frage beantworten, wie Exponentialfunktionen verschiedener Basis miteinander zusammenhängen. Seien beispielsweise in

$$a^x = b^y \tag{3.31}$$

die Größen a, b und x bekannt, so kann man die Unbekannte y dadurch finden, dass man von beiden Seiten der Gleichung den Logarithmus zur Basis b nimmt,

$$\log_b(a^x) = \log_b(b^y) \ . \tag{3.32}$$

Mit den Gleichungen (3.26) und (3.29) erhalten wir

$$x \log_b(a) = y \ . \tag{3.33}$$

Setzt man (3.33) in die rechte Seite von (3.31) ein, so folgt auch der allgemeine Zusammenhang

$$a^x = b^{cx} \quad \text{mit } c = \log_b(a) \ . \tag{3.34}$$

Anschaulich bedeutet (3.34), dass die Graphen der Exponentialfunktionen durch Stauchung beziehungsweise Streckung der x-Achse um den Faktor c auseinander hervorgehen — siehe Abbildung 3.4.

Von besonderer Bedeutung ist diese Umformung bei der Umrechnung von Exponentialfunktionen zur Basis 2, e und 10. Üben Sie dies an einigen Beispielen.

In gleicher Weise trifft man oft auf das Problem, Logarithmen unterschiedlicher Basis ineinander umzurechnen. Ist beispielsweise y aus der Gleichung

$$\log_b(y) = \log_a(x) \tag{3.35}$$

zu bestimmen, so "exponentiert" man beide Seiten von (3.35) und erhält

$$b^{\log_b(y)} = b^{\log_a(x)} \tag{3.36}$$

oder

$$y = b^{\log_a(x)} \ . \tag{3.37}$$

Wichtig ist schließlich auch noch der Zusammenhang von Logarithmen einer Zahl x bezüglich verschiedener Basen a und b,

$$\log_a(x) = \log_a(b) \cdot \log_b(x) = \frac{1}{\log_b(a)} \cdot \log_b(x) \ . \tag{3.38}$$

Diese Gleichung sagt nichts anderes, als dass die verschiedenen Logarithmen zueinander proportionale Funktionen sind — siehe auch Abbildung 3.5. Deshalb genügt es, auf Taschenrechnern nur eine spezielle Basis für den Logarithmus vorzusehen!

Beweis von Gleichung (3.38):
Wegen Gleichung (3.29) gilt $\log_a(b) \cdot \log_b(x) = \log_a\left(b^{\log_b(x)}\right) = \log_a(x)$. Die zweite Gleichung geht aus der ersten durch Vertauschung von a und b hervor. □

3.4.4 Mathematik und Biologie: Exponentieller Zerfall

Verringert sich die Menge x einer Substanz *proportional* zur gerade vorhandenen Menge, so ist x als Funktion der Zeit t durch eine Exponentialfunktion der Form

$$x(t) = x_0 \exp(-\alpha t) \tag{3.39}$$

gegeben, wobei x_0 die zur Zeit $t = 0$ vorhandene Menge bezeichnet, und α die **Zerfallskonstante** des betrachteten Prozesses.

Wir werden dieses Ergebnis im Kapitel über lineare Differentialgleichungen mathematisch herleiten, wollen aber schon jetzt das Lösungsverhalten von (3.39) diskutieren. Exponentielle Zeitabhängigkeiten spielen nämlich nicht nur beim Studium radioaktiver Umwandlungen eine fundamentale Rolle. Sie sind vielmehr charakteristisch für unzählige Prozesse in denen sich eine dynamische Variable[1] proportional zu ihrem gegenwärtigen

[1] Eine **dynamische Variable** ist eine zeitabhängige Größe wie Ort oder Geschwindigkeit eines Teilchens, Membranpotential einer Zelle, Masse eines Reaktionsproduktes etc. Der **Zustand** eines Systems zur Zeit t ist durch die Angabe der Werte aller dynamischen Variablen des Systems zu diesem Zeitpunkt bestimmt. Je nach Beschreibungsebene genügen dabei mehr oder weniger viele Variablen.

Studiert man beispielsweise den freien Fall eines Volleyballs im Raum, so ist sein Zustand nach Newton durch Angabe der drei Raum- und drei Geschwindigkeitskoordinaten seines Schwerpunktes eindeutig festgelegt. Betrachtet man auch die Drehungen des Balles, so benötigt man zusätzlich Angaben über die momentane Richtung der Drehachse und Drehgeschwindigkeit. Wollte man weiterhin die elastischen Schwingungen des Balles beschreiben, so wäre dazu detaillierte Information über den von Punkt zu Punkt unterschiedlichen Abstand der Balloberfläche vom Schwerpunkt erforderlich. Und so weiter.

Dieses Beispiel zeigt auch, dass je nach Aufgabenstellung unterschiedlich detaillierte Beschreibungsebenen bei der Analyse dynamischer Vorgänge verwendet werden. Eine große Kunst, gerade bei der Modellierung biologischer Systeme, besteht darin, die Beschreibungsebene so der Aufgabenstellung anzupassen, dass alle für die untersuchten Phänomene wichtigen Eigenschaften des Systems im Modell enthalten sind, alle anderen Details aber vernachlässigt werden.

Wert verringert. Beispiele sind elektrische Ausgleichsvorgänge an der Zellmembran von Nervenzellen oder die Kinetik vieler einfacher (bio)chemischer Reaktionen.

Das Argument der Exponentialfunktion in (3.39) ist das Produkt von Zerfallskonstante α und Zeit t. Ein bestimmter Wert der Funktion wird bei konstantem Produkt $\alpha \cdot t$ erreicht. Je größer also die Zerfallskonstante ist, umso schneller verringert sich $x(t)$. Welche physikalische Dimension aber hat die Zerfallskonstante?

Wie wir in einem späteren Kapitel zeigen werden, darf das Argument einer Exponentialfunktion keine Dimension haben. Daraus folgt, dass die Zerfallskonstante α die Dimension "1/Zeit" hat. Anschaulich gibt die Zerfallskonstante an, auf welchen Wert x nach einer Zeiteinheit gesunken ist. Ist beispielsweise $\alpha = 6/\mathrm{h}$, so ist x nach einer Stunde auf $x_0 \mathrm{e}^{-6}$ abgefallen, ist $\alpha = 2/\mathrm{s}$, so hat sich x nach einer Sekunde auf $x_0 \mathrm{e}^{-2}$ verringert.

Bei der Beschreibung exponentieller Zerfälle gibt man oft nicht die Zerfallskonstante an, sondern die **Halbwertszeit** $t_{\frac{1}{2}}$. Dies ist die Zeit, nach der nur noch die Hälfte der Ausgangssubstanz vorhanden ist. Setzen wir diese Bedingung in (3.39) ein, so erhalten wir:

$$x(t_{\frac{1}{2}}) = \frac{x_0}{2} = x_0 \exp(-\alpha t_{\frac{1}{2}}) \ . \tag{3.40}$$

Auflösung dieser Gleichung nach $t_{\frac{1}{2}}$ ergibt

$$t_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln 2}{\alpha} \ . \tag{3.41}$$

Halbwertszeit und Zerfallskonstante sind also genau umgekehrt proportional zueinander: je größer α umso kleiner $t_{\frac{1}{2}}$, je kleiner α umso größer $t_{\frac{1}{2}}$. Weiterhin sehen wir an (3.41) nochmals, dass α die Dimension "1/Zeit" haben muss, da die Halbwerts*zeit* die Dimension "Zeit" hat.

Wir fassen zusammen:

Notiz:
Die Zerfallskonstante α ist ein Maß für die Geschwindigkeit eines exponentiellen Zerfalls und hat die Dimension "$\frac{1}{\text{Zeit}}$".
Die Halbwertszeit $t_{\frac{1}{2}}$ gibt an, nach welcher Zeit nur noch die Hälfte der Ausgangssubstanz vorliegt und hat die Dimension "Zeit".
Halbwertszeit und Zerfallskonstante sind umgekehrt proportional zueinander, und es gilt $t_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln 2}{\alpha}$.

3.5 Der Binomische Satz

Eine Lieblingsbeschäftigung von Mathematikern besteht darin, sich eine altbekannte Aussage, einen Satz, eine Formel oder eine Gleichung vorzunehmen, hinreichend lange über diese Aussage nachzudenken und dann eine allgemeinere Aussage aufzustellen und zu beweisen. Die allgemeine Aussage enthält die alte Aussage als Spezialfall. Darüberhinaus erlaubt die allgemeine Aussage weitreichendere Schlußfolgerungen, vereinfachte Berechnungen oder zeigt auch Bezüge zu anderen Gebieten der Mathematik auf, die aus dem ursprünglichen Spezialfall nicht erkennbar gewesen wären.

Wir werden nun konkret. Aus der Schule kennen sie die binomischen Formeln:

Binomische Formeln:
Seien a und b zwei reelle Zahlen. Dann gilt:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \tag{3.42}$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \tag{3.43}$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \tag{3.44}$$

BEMERKUNG: Da $a - b = a + (-b)$ ist die zweite binomische Formel zur ersten Formel äquivalent. Die dritte binomische Formel kann dagegen nicht auf die ersten beiden zurückgeführt werden.

Wir nehmen nun die erste binomische Formel und versuchen, sie für beliebige natürliche Exponenten zu verallgemeinern. Wir suchen also nach einer Formel, die das Ausmultiplizieren von $(a+b)^n$ vereinfacht. Um ein Gefühl dafür zu bekommen, was bei höheren Exponenten geschieht, berechnen wir zunächst $(a+b)^n$ für kleine n:

$$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2 = (a+b)(a^2+2ab+b^2) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \tag{3.45}$$

$$(a+b)^4 = (a+b)(a+b)^3 = \ldots = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \tag{3.46}$$

und so weiter ...

Welches allgemeine Bildungsgesetz steckt hinter den Worten "und so weiter"? Untersuchen wir in einem ersten Schritt den Vorgang der Berechnung von $(a+b)^2$: Da $(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$, erhalten wir den Ausdruck für $(a+b)^2$, indem wir jedes Glied des Ausdrucks $a+b$ zuerst mit a und anschließend mit b multiplizieren und die beiden Ergebnisse addieren. Das gleiche Verfahren können wir anwenden, um $(a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2$ zu berechnen. In derselben Weise können wir dann fortfahren, und $(a+b)^4$, $(a+b)^5$ etc. berechnen.

Den Ausdruck für $(a+b)^n$ erhält man, indem man jedes Glied des vorher berechneten Ausdrucks für $(a+b)^{n-1}$ wieder zuerst mit a, dann mit b multipliziert und die Ergebnisse addiert. Dies führt zu folgendem Diagramm:

$$\begin{array}{lccccccccccccc}
\text{n=1: } a+b & = & & & & & a & + & b & & & & & \\
 & & & & & \swarrow^{a} & & \searrow^{b} & & \swarrow^{a} & & \searrow^{b} & & \\
\text{n=2: } (a+b)^2 & = & & & a^2 & + & 2ab & + & b^2 & & & & & \\
 & & & \swarrow^{a} & & \searrow^{b} & & \swarrow^{a} & & \searrow^{b} & & \swarrow^{a} & & \searrow^{b} \\
\text{n=3: } (a+b)^3 & = & & a^3 & + & 3a^2b & + & 3ab^2 & + & b^3 & & & & \\
 & & \swarrow^{a} & & \searrow^{b} & & \swarrow^{a} & & \searrow^{b} & & \swarrow^{a} & & \searrow^{b} & \\
\text{n=4: } (a+b)^4 & = & a^4 & + & 4a^3b & + & 6a^2b^2 & + & 4ab^3 & + & b^4 & & &
\end{array}$$

Hieraus läßt sich die allgemeine Regel für die Bildung der Koeffizienten in der Entwicklung von $(a+b)^n$ direkt ablesen.

Zur Veranschaulichung bauen wir eine dreieckige Anordnung von Zahlen auf, indem wir mit den Koeffizienten 1 für $n = 0$ und 1 bei a und b für $n = 1$ beginnen. Alle weiteren Zahlen des Dreiecks sind dann jeweils die Summe ihrer beiden Nachbarzahlen in der vorhergehenden Zeile. Diese Anordnung wird **Pascal'sches Dreieck** genannt:

n=0: 1
n=1: 1 1
n=2: 1 2 1
n=3: 1 3 3 1
n=4: 1 4 6 4 1
n=5: 1 5 10 10 5 1
n=6: 1 6 15 20 15 6 1
n=7: 1 7 21 35 35 21 7 1

Die n-te Zeile dieser Anordnung gibt die Koeffizienten in der Entwicklung von $(a+b)^n$ nach abnehmenden Potenzen von a und zunehmenden Potenzen von b an, also zum Beispiel

$$(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7 \ . \tag{3.47}$$

SELBSTTEST: Überprüfen Sie $1.01^7 = 1.07213535210701$.

Wir führen eine abgekürzte Schreibweise mit unteren und oberen Indizes ein und bezeichnen die $n+1$ Zahlen in der n-ten Zeile des Pascalschen Dreiecks wie folgt:

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \binom{n}{3}, \dots \binom{n}{n-1}, \binom{n}{n} \tag{3.48}$$

Wir erhalten also:

n=0: $\binom{0}{0}$

n=1: $\binom{1}{0}$ $\binom{1}{1}$

n=2: $\binom{2}{0}$ $\binom{2}{1}$ $\binom{2}{2}$

n=3: $\binom{3}{0}$ $\binom{3}{1}$ $\binom{3}{2}$ $\binom{3}{3}$

n=4: $\binom{4}{0}$ $\binom{4}{1}$ $\binom{4}{2}$ $\binom{4}{3}$ $\binom{4}{4}$

Definition (Binomialkoeffizient):
Sei $k, n \in \mathbf{N}$ und $k \leq n$. Ein Symbol der Form

$$\binom{n}{k} \tag{3.49}$$

wird **Binomialkoeffizient** genannt. Man liest "k aus n" oder auch "n über k".

Kann man den Wert eines Binomialkoeffizienten auch ohne Rekursion mit einer expliziten Formel angeben?

Zur Beantwortung dieser Frage betrachten wir nochmals das Pascalsche Dreieck und lesen ab, dass für alle $n \in \mathbf{N}$ gilt:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \tag{3.50}$$

und

$$\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n \tag{3.51}$$

Aus dem Bildungsgesetz des Pascalschen Dreiecks folgen zwei weitere

Eigenschaften des Binomialkoeffizienten:
Symmetriesatz:

$$\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m} \tag{3.52}$$

Additionssatz:

$$\binom{n}{m} + \binom{n}{m+1} = \binom{n+1}{m+1} \tag{3.53}$$

Aus den letzten vier Aussagen kann mit einem sogenannten Induktionsbeweis, auf den wir hier jedoch nicht eingehen wollen, abgeleitet werden, dass die Binomialkoeffizienten wie folgt geschrieben werden können:

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots (n+2-k) \cdot (n+1-k)}{k \cdot (k-1) \cdot \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1} \tag{3.54}$$

Damit haben wir eine explizite Formel für die Binomialkoeffizienten aufgestellt. Diese kann noch vereinfacht werden, indem wir die sogenante **Fakultät** einführen:

Definition (Fakultät):
Sei n $\in \mathbf{N}$. Dann bezeichnet man das Symbol

$$\begin{aligned} 0! &= 1 \\ n! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n \qquad \text{für } n \neq 0 \end{aligned} \tag{3.55}$$

als **Fakultät**. Man liest "n Fakultät".

BEISPIEL: Es ist $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

Erweitern wir nun den Bruch in (3.54) mit $(n-k)!$, dann können wir den Zähler als $n!$ schreiben und erhalten

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\ k!}\ . \tag{3.56}$$

Damit können wir insgesamt zusammenfassen:

Binomischer Satz:
Sei $a, b \in \mathbf{R}$ und $n \in \mathbf{N}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots \\ &\qquad \dots + \binom{n}{n-2}a^2b^{n-2} + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k} \end{aligned} \tag{3.57}$$

mit $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{(n-k)!\,k!}$.

BEMERKUNG: Fakultät und Binomialkoeffizient werden manchen von Ihnen schon aus der Wahrscheinlichkeitstheorie bekannt sein. So gibt die Fakultät $n!$ die Anzahl der **Permutationen** einer Menge mit n Elementen an, der Binomialkoeffizient $\binom{n}{i}$ die Anzahl der i-elementigen **Kombinationen** einer Menge mit n Elementen ohne Wiederholung. Denken Sie nur an die Gewinnwahrscheinlichkeit beim Lotto!

SELBSTTEST: Versuchen Sie vor diesem Hintergrund, den Binomischen Satz zu interpretieren! Welche Bedeutung haben die einzelnen Terme?

3.5.1 Anwendungen des binomischen Satzes

Mit dem Binomischen Satz können Ausdrücke der Form $(1+x)^n$ mit betragsmäßig kleinem x, das heißt $|x| \ll 1$, sehr schnell näherungsweise berechnet werden. Nach dem Binomischen Lehrsatz (3.57) gilt nämlich:

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{3}x^3 + \dots + \binom{n}{n}x^n \tag{3.58}$$

Um $(1+x)^n$ exakt zu berechen, müssten wir nun alle n Binomialkoeffizienten auswerten. Dies kann zu einem erheblichen Rechenaufwand führen, wie sofort an einem Beispiel mit größerem n deutlich wird. Oft benötigt man das exakte Ergebnis jedoch gar nicht und möchte nur eine erste Abschätzung von $(1+x)^n$ erzielen. Um eine gute Näherung von $(1+x)^n$ zu erhalten, muß man verstehen, welche der Summanden in (3.58) groß und welche klein sind. Dabei hilft die Vorraussetzung, dass x klein sein soll, und folgende Beobachtung:

Ist der Betrag von x klein im Vergleich mit Eins, so wird x^2 noch kleiner sein, x^3 noch kleiner, x^4 noch kleiner ...

So sollte die 1 der größte Summand sein. Betragsmäßig kleiner sollte der Summand mit x sein, noch kleiner der Summand mit x^2, und so weiter. Wir erhalten folgende Näherungen:

Lineare Näherung: $1 + \binom{n}{1}x$

Quadratische Näherung: $1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2$

Kubische Näherung: $1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{3}x^3$

Dieses Spiel kann man natürlich beliebig fortsetzen und durch sukzessive Hinzunahme weiterer Terme immer bessere Näherungen erhalten.

Daraus ergibt sich die interessante Frage, bis zu welcher Ordung man gehen muss, um eine bestimmte Genauigkeit der Abschätzung zu erzielen. Wir wollen hier auf diese Frage nicht weiter eingehen — Sie sollten aber selbst darüber nachdenken!

Es sei auch bemerkt, dass Ihr Taschenrechner von ganz ähnlichen Tricks bei der Berechnung von Funktionswerten spezieller Funktion wie Sinus und Cosinus Gebrauch macht. Uns wird diese Methode später als **Taylorentwicklung** wieder begegnen.

BEISPIEL:

Wir wollen $1.01^{10} = (1+0.01)^{10}$ näherungsweise berechnen.

Nach dem Binomischen Satz gilt:

$$\begin{aligned}(1+0.01)^{10} &= \binom{10}{0}1^{10}(0.01)^0 + \binom{10}{1}1^9(0.01)^1 + \binom{10}{2}1^8(0.01)^2 \\ &\quad + \binom{10}{3}1^7(0.01)^3 + \ldots + \binom{10}{10}1^0(0.01)^{10} \\ &= 1\cdot 1\cdot 1 + 10\cdot 1\cdot 0.01 + 45\cdot 1\cdot 0.0001 + \\ &\quad + 120\cdot 1\cdot 0.000001 + \ldots + 1\cdot 1\cdot 10^{-20}\end{aligned}$$

Damit erhalten wir für $(1+0.01)^{10}$ in linearer Näherung den Wert 1.1, in quadratische Näherung den Wert 1.1045 und in kubischer Näherung den Wert 1.104620.

Geben wir 1.01^{10} in einen Taschenrechner ein, so erhalten wir als Ergebnis die Zahl 1.1046221. Die kubische Näherung ist also bis auf 5 Stellen hinter dem Komma genau. Viel besser ist der Taschenrechner also auch nicht!

BEMERKUNG: Die einzelnen Ausdrücke konnten in diesem Beispiel deshalb leicht gefunden werden, da der erste Summand im Term $(1+0.01)$ die Eins war. Wenn Sie andere Potenzen näherungsweise berechnen wollen, so sollten Sie in einem ersten Schritt Ihren Ausdruck auf die Form $y^n(1+x)^n$ umformen. Wenn dann $|x| \ll 1$ gilt, können Sie wie hier gezeigt vorgehen. So kann beispielsweise 8.2^6 als $8^6(1+0.2/8)^6 = 8^6(1+0.025)^6$ geschrieben werden — und 0.025 ist viel kleiner als Eins, womit wir eine gute Approximation in quadratischer oder kubischer Näherung erwarten können.

SELBSTTEST: Berechnen Sie 7.1^6, 0.98^9 und 6.9^8 in quadratischer Näherung und vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem exakten Resultat.

3.6 Aufgaben

1. (Binomische Formeln) Formen Sie mit Hilfe der binomischen Formeln um und vereinfachen Sie wenn möglich!

(a) $(x+2)^2$
(b) $(2x-3)^2$
(c) $(-z+4)^2$
(d) $(-x-2)^2$
(e) y^2-4
(f) y^2+4y+4
(g) $4z^2-12z+9$
(h) $(y-3)(y+3)$
(i) $\dfrac{x^2+6x+9}{x+3}$
(j) $\dfrac{y^2-8x+16}{y-4}$
(k) $\dfrac{(z+2)^2}{z^2-4}$

2. (Potenzgesetze) Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke:

(a) $x^2x^5 =$
(b) $(x^3xx^2)^2 =$
(c) $\dfrac{y^5x^2y}{y^4} =$
(d) $x^{-\frac{1}{2}}\sqrt{xy} =$
(e) $\dfrac{xy^{-2}z^6}{z^{-4}y^2x} =$
(f) $(x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{3}}x^2)^3 =$
(g) $\dfrac{yx^a}{x^{-a}} =$
(h) $\dfrac{\sqrt{xyz^2}}{x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}} =$

3. (Exponentialfunktion, Logarithmus) Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke:

(a) $\log(x^2x^5) =$
(b) $2\ln(\sqrt{x}) =$
(c) $\log(x) - \log(xy) =$
(d) $2^x5^x =$
(e) $e^xe^ye^{-x} =$
(f) $\log_a(a^x) =$
(g) $10^{\log_{10}(x^2)} =$
(h) $e^{-(x^2-4x)}e^{-4} =$
(i) $\log(\dfrac{x^2}{y^{-2}}) - 2\log(x) =$

4. (Skalengesetze in der Biologie) Die Auskühlung (=Wärmeverlust) eines Lebewesens ist proportional zu seiner Oberfläche multipliziert mit dem Temperaturunterschied zwischen Innen und Aussen. Die Wärmeproduktion ist aber proportional zu seinem Volumen. (Wie sollten sich prinzipiell Wärmeproduktion und Wärmeverlust eines Tieres zueinander verhalten?) Was hat dies für die Größe von Säugetieren in den kälteren Regionen im Vergleich zu denen in den wärmeren zur Folge?

5. (Biomasse von Bäumen) Wir wollen die Abhängigkeit der Masse eines Baumes von der Dichte der Bepflanzung untersuchen. Die Baumdichte ϱ ist dabei definiert als die Anzahl der Bäume auf einer bestimmten Bodenfläche. Empirisch lässt sich nun feststellen, dass das Verhältnis L der Blattfläche aller Bäume zur Bodenfläche in etwa konstant ist. (Überlegen Sie sich, warum das so ist!),

$$\begin{aligned} L &= \frac{\text{Gesamtblattfläche}}{\text{Bodenfläche}} \\ &= \text{mittl. Blattfläche eines Baumes} \times \frac{\text{Zahl der Bäume}}{\text{Bodenfläche}} \\ &= \overline{\lambda}\varrho = \text{const.} \end{aligned}$$

Wir wollen nun annehmen, dass die mittlere Blattfläche $\overline{\lambda}$ eines Baumes proportional zum Quadrat seiner Höhe h, das mittlere Gewicht $\overline{w}$ hingegen proportional zur dritten Potenz der Baumhöhe ist. Wie verhält sich dann das mittlere Gewicht $\overline{w}$ eines Baumes als Funktion der Baumdichte ϱ? Diskutieren Sie Ihr Ergebnis!

6. (Gewicht von Schlangen) Bei der Untersuchung der Schlangenart *Heterodon nasicus* (Schlangenart in Kansas, USA) stellt man fest, dass ihr Gewicht w proportional zur dritten Potenz ihrer Länge l ist, $w = al^3$ und $a = 500\text{g/m}^3$. Tragen Sie diese Abhängigkeit in einer doppelt-logarithmischen Abbildung auf. (Auf der x-Achse gilt also $x = \log(l)$ und auf der y-Achse $y = \log(w)$, wobei l in Metern und w in Gramm gemessen wird.) Welche Kurve erhalten Sie?

Für eine andere Schlangenart gelte $w = bl^2$ mit $b = 200\text{g/m}^2$. Wie verändert sich Ihr Ergebnis?

Eine weitere Schlangenart genügt der Beziehung $w = al^3 + 300\text{g}$. Auf welche Schwierigkeiten stoßen sie nun? Wie lassen sich diese umgehen?

7. (Logarithmus) Zeigen Sie durch geeignetes Logarithmieren bzw. Exponentieren:

(a) $\log_a x = \log_b x \cdot \log_a b$

(b) $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$

(c) $\ln 10 = \dfrac{1}{\log_{10} \mathrm{e}}$

(d) $a^x = b^{cx} \;\Rightarrow\; c = \log_b a$

8. (Radioaktiver Zerfall) Radioaktive Stoffe zerfallen unter Aussendung von Strahlung in andere Stoffe. Sei $x(t)$ die Menge der noch nicht zerfallenen Atome zum Zeitpunkt t und x_0 die Anzahl der zum Zeitpunkt $t = 0$ unzerfallenen Atome. Dann gilt

$$x(t) = x_0 \mathrm{e}^{-\lambda t} \,,$$

wobei λ die Zerfallsrate ist (Zerfälle pro Zeit).

(a) Skizzieren Sie $x(t)$ für $t \geq 0$ einmal für eine große und einmal für eine kleine Zerfallsrate λ.

(b) Nach welcher Zeit ist genau die Hälfte des ursprünglich vorhandenen Stoffes zerfallen ("Halbwertszeit")?

9. (Binomischer Satz) Schreiben Sie mit Hilfe des Binomischen Satzes die Funktion $f(x) = (2 + x)^4$ als Polynom in x. Werten Sie dieses Polynom in linearer Näherung für $x = 0.01$ aus (siehe Abschnitt 3.5.1) und vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem exakten Resultat $2.01^4 = 16.32240801$.

10. (Beispiel aus der Ökologie) Ein wichtiges Charakteristikum eines Lebensraumes ist dessen Artendiversität. Die Diversität ist umso größer, je mehr verschiedene Arten dort anzutreffen sind und je gleichmäßiger die Individuen sich auf diese Arten verteilen. Der Shannon Index H_S ist ein aus der Informationstheorie stammendes Maß für die Diversität einer Biozönose, das genau diese beiden Eigenschaften besitzt:

$$H_s = -\sum_{i=1}^{N} p_i \log_2 p_i \quad \text{mit} \quad p_i = \frac{n_i}{M} \quad \text{und} \quad M = \sum_{i=1}^{N} n_i$$

N ist die Anzahl der gefundenen Arten, n_i sind deren Individuenzahlen, M ist die Anzahl der insgesamt gefundenen Individuen. Die Wahrscheinlichkeit bzw. relative Häufigkeit, ein Individuum der Art i anzutreffen ist p_i.

(a) Welche Werte kann p_i (allgemein eine beliebige Wahrscheinlichkeit) annehmen? Welchen Wert nimmt p_1 an wenn die Art 1 sehr dominierend ist, d.h. von dieser Art kommen sehr viele Individuen vor, während von allen anderen Arten nur Einzeltiere gefunden werden. Wie groß ist dann p_i für die übrigen Arten?

(b) Welchen Wert hat $\sum_{i=1}^{N} p_i$, d.h. wie groß ist die Wahrscheinlichkeit eine beliebige Art anzutreffen?

(c) Skizzieren Sie die Funktionen $f(p_i) = -\log_2 p_i$, $g(p_i) = p_i$ und $h(p_i) = f(p_i) \cdot g(p_i) = -p_i \log_2 p_i$ für $p_i \in [0; 1]$! Welchen Funktionswert hat $h(1)$? Welchen Funktionswert hat $h(0)$? Rechnen sie dazu eventuell einige Werte für kleine p_i (z.B. 0.1, 0.01, 0.001) mit dem Taschenrechner aus.

(d) An welcher Stelle p_i schneidet $h(p_i)$ die Winkelhalbierende $g(p_i)$? Korrigieren Sie eventuell ihre Skizze von $h(p_i)$!

(e) Welche Werte haben p_1 und H_S, wenn nur eine einzige Art gefunden wurde?

(f) Zeigen Sie, dass zur einfacheren Berechnung der Shannon-Index auf folgende Form gebracht werden kann:

$$H_S = \left(\ln M - \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} n_i \ln n_i \right) / \ln 2$$

(g) In folgender Tabelle sind die Anzahl der Individuen n_i aller Makroinvertebraten aufgelistet, die in zwei Abschnitten P1 und P2 der Plane, einem Bach im Hohen Fläming (Brandenburg), gefunden wurden:

Art	P1	P2	Art	P1	P2
Dugesia conocephala	9	15	*Heptagenia sulphurea*	3	34
Ancylus fluviatilis	2	7	*Paraleptophlebia spec.*	0	4
Pisidium spec.	15	43	*Perlodes dispar*	0	3
Erpobdella octoculata	0	8	*Protonemoura spec.*	19	0
Glossiphonia complanata	6	10	*Orectochilus villosus*	0	5
Gammarus pulex	36	120	*Halesus radiatus*	0	2
Gammarus roeseli	0	440	*Hydropsyche pellucidula*	15	0
Baetis spec.	27	20	*Hydropsyche spec.*	2	20
Ephemera danica	0	120	*Ryacophila fasciata*	2	0

In welchem Abschnitt ist die Diversität größer?

(h) Bei einer festen Artenzahl N wird der Shannon-Index H_S am größten, wenn alle Arten gleich häufig vorkommen, d.h. $n_i = n_j$ für alle i, j. Wie groß sind dann die n_i und die p_i bei einer gegebenen Individuenzahl M? Wie groß ist dafür der Shannon-Index H_S?

11. (Logarithmus) Berechnen Sie $\log_3 7$ und $\log_7 3$! Formen Sie dazu die Ausdrücke geeignet um und benutzen Sie dann Ihren Taschenrechner!

12. (Binomischer Satz) Berechnen Sie 2.1^5 mit dem Taschenrechner! Berechnen Sie mit dem Binomischen Satz ohne Taschenrechner die lineare und quadratische Näherung von 2.1^5 und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem exakten Resultat! Führen Sie dann die gleichen Rechnungen für 1.9^5 durch!

13. (Skalengesetze in der Biologie) Das Gewicht G eines Tieres ist proportional zu seinem Volumen V: $G \sim V$ (Zusatzaufgabe: welche physikalischen Gesetze fallen Ihnen dazu ein? Wie lautet dann also der Proportionalitätsfaktor?). Der Druck p, der auf jedem einzelnen der n Füße mit der Auftrittsfläche A lastet, ist dann gegeben durch $p = \frac{G}{nA}$. Warum haben also kleine Tiere (z.B. Katzen) relativ zur Körpergröße kleinere Füße als große Tiere (z.B. Elefanten)?

14. (Beispiel aus der Neurobiologie) Zur Partnerfindung setzen Heuschrecken ihren Gesang ein. Wenn der Gesang von einem paarungsbereiten Geschlechtspartner erkannt wird, bewegt sich dieser auf den Sänger zu. Es wurden nun die Antworteigenschaften verschiedener Neurone des auditorischen Systems in Abhängigkeit von der Umgebungstemperatur untersucht, um zu sehen, wie sich die Temperatur auf die Eigenschaften der neuronalen Verarbeitung des Gesangs niederschlägt. Die meisten Neurone antworten bei höheren Temperaturen viel stärker auf einen Reiz als bei niedrigen Temperaturen. Um diese Temperaturabhängigkeit zu quantifizieren, wird aus den Daten der Q_{10}-Wert berechnet. Dieser gibt an, um welchen Faktor sich eine Größe ändert, wenn die Temperatur um 10°C erhöht wird. Beispielsweise bedeutet ein Q_{10}-Wert von 2, dass sich die Meßgröße bei einer Erhöhung der Temperatur um 10°C verdoppelt.

(a) Die Antwortstärke $x(10°\text{C})$ des BGN1-Neurons bei einer Temperatur von $T = 10°\text{C}$ sei 1, der Q_{10}-Wert 1.5 . Welche Antwortstärke $x(T)$ hat das Neuron bei $T = 20$, 30 und 40°C ? Fertigen Sie eine Skizze der Funktion $x(T)$ an!

(b) Wie würde die Temperaturabhängigkeit für $Q_{10} = 1$ und $Q_{10} = 0.5$ aussehen?

(c) Wie Sie in ihrer Skizze sehen, wächst die Antwortstärke x exponentiell mit der Temperatur T an. Was wäre eine geeignete Basis der Exponentialfunktion? Was steht in ihrem Exponenten? Wie sieht also die Funktion $x(T)$ aus?

(d) Wird die Antwortstärke x bei zwei verschiedenen Temperaturen T gemessen, kann daraus der Q_{10}-Wert berechnet werden. Sei $x_1 = x(T_1)$ die Antwort zur Temperatur T_1 und $x_2 = x(T_2)$ die Antwort zur Temperatur T_2. Zeigen Sie, dass daraus Q_{10} nach folgender Formel berechnet werden kann:

$$Q_{10} = \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\frac{10\,^\circ\mathrm{C}}{T_2 - T_1}}$$

(e) In nachfolgender Tabelle sind die Antwortstärken zweier verschiedener Neuronentypen bei jeweils zwei Temperaturen angegeben. Welches der beiden Neurone zeigt eine stärkere Temperaturabhängigkeit in seinem Antwortverhalten?

Neuron	$T_1/^\circ\mathrm{C}$	x_1	$T_2/^\circ\mathrm{C}$	x_2
UGN2	23	170	32	280
AN4	21	210	31	260

Kapitel 4

Folgen

4.1 Einführung

Funktionen, deren Definitionsbereich die natürlichen Zahlen sind, treten in unzähligen Fragestellungen auf — immer dann, wenn die unabhängige Variable beispielsweise aufgrund ihrer physikalischen Natur nur diskrete Werte annehmen kann. In der Mathematik wird deshalb für diese Art von Funktionen ein eigener Begriff eingeführt:

Definition:
Eine Funktion $f : \mathbf{N} \to \mathbf{R}, n \mapsto f(n)$ nennt man eine **reelle Zahlenfolge**.

Wir haben die vollständige Information über eine reelle Folge[1], wenn wir alle ihre Werte $y_1 = f(1)$, $y_2 = f(2)$, ... kennen. Durch Angabe aller **Folgenglieder** ist eine Folge vollständig beschrieben. Man gibt Folgen deshalb meistens in der folgenden Form an:

$$(y_1, y_2, y_3, \ldots) \tag{4.1}$$

Diese Schreibweise kann nochmals verkürzt werden, indem man wie bei dem Summensymbol einen Laufindex benutzt. Vielfach wird auch noch der Definitionsbereich $\mathbf{N}$ der Folge weggelassen,[2]

$$(y_n)_{n\in\mathbf{N}} = (y_n) = (y_1, y_2, y_3, \ldots) \ . \tag{4.2}$$

[1] Der Begriff "reelle (Zahlen-)Folge" sollte eigentlich "reellwertige Zahlenfolge" heißen, um mit dem ihm entsprechenden Begriff "reellwertige Funktion" formal übereinzustimmen. Wir folgen jedoch der allgemeinen Konvention und werden darüber hinaus meistens sogar nur kurz von einer "Folge" sprechen, selbst wenn wir den speziellen Fall einer reellen Zahlenfolge behandeln.

[2] Diese Notation könnte mit dem Symbol einer Menge $M = \{y_1, y_2, y_3, \ldots y_m\}$ verwechselt werden. Es ist deshalb wichtig, beide Konzepte nicht durcheinander zu bringen: Folgen sind spezielle Funktionen, und damit sind zwei Folgen (x_n) und (y_n) genau dann identisch, wenn sie gliedweise übereinstimmen, also $x_n = y_n$ für alle $n \in \mathbf{N}$. Dagegen sind zwei Mengen identisch, wenn sie in allen ihren Elementen übereinstimmen, unabhängig davon, in welcher Reihenfolge diese notiert wurden. Bei Folgen ist also die Anordnung ihrer Glieder wesentlich, bei Mengen ist die Anordnung ihrer Elemente ohne jede Bedeutung. Weiterhin können zwei Glieder a_i und a_j einer Folge (a_n) identisch sein, $a_i = a_j$. Bei der Definition einer Menge ist es jedoch unerheblich, ob ein Element einfach oder mehrfach auftritt, es wird nur einmal gezählt. Ein Beispiel zur Illustration dieses Unterschiedes: Wir betrachten die Folge $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ mit $a_n = 1$ für alle $n \in \mathbf{N}$. Sie besteht aus unendlich vielen Folgengliedern, die alle Eins sind. Die Menge aller Folgenglieder $M = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ besteht allerdings nur aus einem einzigen Element, der Eins. Es gilt $M = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\} = \{1\}$.

Mathematische Motivation:

Nach Definition hat eine Folge immer unendlich viele Folgenglieder. Rechnet man mit Folgen, rechnet man mit dem Unendlichen, sowohl dem unendlich Großen wie dem unendlich Kleinen. Das ist zwar ungemein reizvoll, führt aber zu einigen schwer verdaulichen Begriffen.

Wir wollen an dieser Stelle nicht in die Tiefen der Mathematik absteigen. Hier nur soviel: Sie wissen aus Kapitel 1.3.2, dass $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl sein kann. Aber $\sqrt{2}$ kann beliebig gut durch rationale Zahlen angenähert werden. So kann man eine Folge definieren, die, wie wir später sagen werden, gegen $\sqrt{2}$ konvergiert. Erst durch den Begriff "Folge" läßt sich definieren, was man unter $\sqrt{2}$ und allen anderen nicht-rationalen reellen Zahlen verstehen soll. Die reellen Zahlen sind jedoch die Basis zum Lösen von den unterschiedlichsten Gleichungen, die uns in dieser Vorlesung begegnen werden. Deshalb stellen Folgen aus mathematischer Sicht ein für das Verständnis vieler anderer Konzepte zentrales Handwerkszeug dar.

Biologische Motivation:

Die Biologie ist voll von Folgen. Stellen Sie sich etwa eine Insektenpopulationen mit nicht-überlappenden Generationen vor. Jedes Folgenglied könnte dann die Anzahl von Individuen in einer bestimmten Generation angeben. Wir werden in den Kapiteln 6 und 7 eine ganze Reihe von biologischen Beispielen für Folgen kennenlernen.

BEISPIELE:

Die konstante Folge: $(5)_{n\in\mathbf{N}} = (5, 5, 5, 5, 5, ...)$

Die Folge der natürlichen Zahlen: $(n)_{n\in\mathbf{N}} = (1, 2, 3, 4, 5, , ...)$

Die Folge der Quadratzahlen: $(n^2)_{n\in\mathbf{N}} = (1, 4, 9, 16, 25, ...)$

Die **harmonische Folge:** $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbf{N}} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, ...)$

Die **geometrische Folge:** $(q^n)_{n\in\mathbf{N}} = (q, q^2, q^3, q^4, q^5...)$

Als Spezialfall der geometrischen Folge mit $q = -1$ die zwischen -1 und 1 **alternierende Folge:** $((-1)^n)_{n\in\mathbf{N}} = (-1, 1, -1, 1, -1, ...)$

Die Folge aller positiven rationalen Zahlen $\frac{p}{q}$ (siehe Skizze Abbildung 4.1):[3]

$$\left(\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}, \dots\right)$$

Bis jetzt wurden Folgen dadurch definiert, dass ihre Folgenglieder explizit angegeben wurden. Gerade bei der Modellierung dynamischer Prozesse, wie wir sie in späteren Kapiteln behandeln werden, studiert man oft das Verhalten von Folgen, in denen sich das $(n+1)$-te Folgenglied aus dem n-ten Folgenglied berechnet:

Rekursive Definition von Folgen:
Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ wird rekursiv definiert durch

1. Angabe des ersten Folgengliedes a_1 und
2. Angabe einer **Rekursionsvorschrift**, durch die man das Folgenglied a_{n+1} aus dem Folgenglied a_n berechnen kann.

Das erste Folgenglied a_1 wird auch **Anfangswert** genannt.

[3] Wie wir aus Kapitel 1 wissen, gibt es unendlich viele rationale Zahlen. Da sie als Glieder einer Folge Zahl für Zahl dargestellt werden können, sagt man auch, dass es abzählbar viele rationale Zahlen gibt. Im Gegensatz dazu kann man zeigen, dass die Menge der reellen Zahlen *nicht* abzählbar ist.

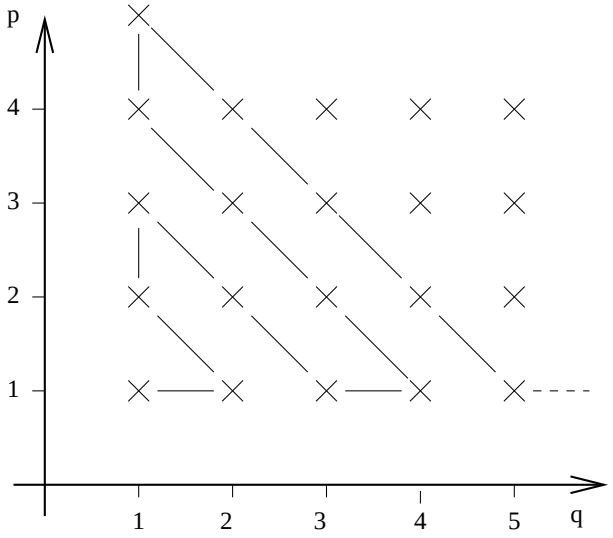


Abbildung 4.1: Skizze zur Folge aller rationalen Zahlen.

BEMERKUNG: Es gibt auch allgemeinere Rekursionsvorschriften. Bei diesen ist das $(n+1)$-te Folgenglied nicht nur eine Funktion des n-ten Gliedes. Bei der Fibonaccifolge (siehe unten) bezieht sich die Rekursionsvorschrift beispielsweise auf das n-te und das $(n-1)$-te Folgenglied.

BEISPIEL 1: **Unendlicher Kettenbruch**

Die Rekurionsvorschrift $a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}$ mit dem ersten Folgenglied $a_1 = 1$ ergibt einen unendlichen Kettenbruch:

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}$$

BEISPIEL 2: **Fibonaccifolge**

Annahmen:

In einem der ersten überlieferten Populationsmodelle nahm Fibonacci (1170-1250) an, dass jedes Kaninchenpaar im ersten und zweiten Monat seines Lebens je ein weiteres Kaninchenpaar zur Welt bringt.

Modell:

Bezeichnet man mit x_t die Anzahl der im Monat t geborenen Kaninchenpaare, dann werden sich im Monat $t+2$ alle im Monat $t+1$ und t geborenen Kaninchenpaare fortpflanzen. So ergibt sich die Fibonaccifolge der neugeborenen Kaninchenpaare durch die Anfangswerte $x_1 = 1$ und $x_2 = 1$ und die Rekursionsvorschrift

$x_{t+2} = x_{t+1} + x_t$.

Die Rekursionsvorschrift bezieht also nicht nur den Vorgänger, sondern auch den Vorvorgänger ein.

Frage:

Wie entwickelt sich Ihrer Meinung nach die Kaninchenpopulation für lange Zeiten? Berechnen Sie dazu die nächsten Glieder der Folge und schätzen Sie daraus die weitere Entwicklung ab.

4.2 Monotonie und Beschränktheit

Motiviert durch die Analogie zu biologischen oder physikalischen Entwicklungsvorgängen interessieren wir uns auch beim Studium mathematischer Folgen $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ dafür, wie sie sich mit zunehmendem Index n verändern. Sind die einzelnen Folgenglieder auch für große n von beschränkter Größe? Streben sie gar für große n einem festen Wert zu?

Als erste Begriffe zur Analyse dieser Fragen definiern wir:

Definition (Monotonie von Folgen):
Eine Folge (x_n) heißt
monoton wachsend, wenn $x_n \leq x_{n+1}$ für alle $n \in \mathbf{N}$,
streng monoton wachsend, wenn $x_n < x_{n+1}$ für alle $n \in \mathbf{N}$,
monoton fallend, wenn $x_n \geq x_{n+1}$ für alle $n \in \mathbf{N}$,
streng monoton fallend, wenn $x_n > x_{n+1}$ für alle $n \in \mathbf{N}$.

BEMERKUNG: Eine Folge ist nach Definition eine Funktion. Für reelle Funktionen hatten wir in Kapitel 2.1 den Begriff der Monotonie schon eingeführt. Dieser entspricht konzeptionell genau dem gerade eingeführten Begriff.

BEISPIEL: **Monotonie der geometrischen Folge.**

Sei $q \in \mathbf{R}$. Dann ist die geometrische Folge $(q^n)_{n\in\mathbf{N}}$

(1) streng monoton wachsend wenn $1 < q$,

(2) konstant wenn $q = 0$ oder $q = 1$,

(3) streng monoton fallend wenn $0 < q < 1$, und

(4) weder monoton wachsend noch fallend, wenn $q < 0$.

Beweis der ersten Aussage:
Es gilt $x_{n+1} = q^{n+1} = q \cdot q^n = q \cdot x_n$.
Da $1 < q$ folgt hieraus, dass $x_{n+1} > x_n$ für alle $n \in \mathbf{N}$ ist.
Das ist jedoch gerade die Bedingung für strenge Monotonie. □

Definition:
Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ heißt
nach oben beschränkt, wenn es ein $K \in \mathbf{R}$ gibt, so dass $x_n \leq K$ für alle $n \in \mathbf{N}$,
nach unten beschränkt, wenn es ein $K \in \mathbf{R}$ gibt, so dass $x_n \geq K$ für alle $n \in \mathbf{N}$,
beschränkt, wenn die Folge nach oben und unten beschränkt ist.

BEISPIEL 1: **Beschränktheit der geometrischen Folge:**

Sei $q \in \mathbf{R}$. Dann ist die geometrische Folge $(q^n)_{n\in\mathbf{N}}$

(1) für $-1 \leq q \leq 1$ beschränkt,

(2) für $q > 1$ nach unten beschränkt,

(3) für $q < -1$ weder nach oben noch nach unten beschränkt.

Beweis der ersten Aussage:
Gesucht ist also ein $K > 0$, so dass $|q^n| \leq K$ für alle $n \in \mathbf{N}$ gilt. Wählt man $K = 1$, so gilt, da $|q| \leq 1$:

$$K \geq |q| \geq |q|^2 \geq |q|^3 \geq \cdots \geq |q|^n = |q^n|$$

Damit ist die Behauptung gezeigt. □

BEISPIEL 2: **Monotonie und Beschränktheit der durch $a_n = \frac{3n-2}{3-4n}$ definierten Folge $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$.**

(1) Monotonie:

Wir zeigen, dass $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ streng monoton wachsend ist. Dazu formen wir die Ungleichung $a_{n+1} > a_n$ solange äquivalent um, bis wir eine offensichtlich wahre Aussage erhalten. Für alle $n \in \mathbf{N}$ gilt $3 - 4n < 0$. Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} a_{n+1} > a_n &\iff \frac{3(n+1)-2}{3-4(n+1)} > \frac{3n-2}{3-4n} \\ &\iff (3(n+1)-2)\,(3-4n) > (3n-2)\,(3-4(n+1)) \\ &\iff (3n+1)(3-4n) > (3n-2)(-1-4n) \\ &\iff 9n+3-12n^2-4n > -3n+2-12n^2+8n \\ &\iff 3 > 2 \end{aligned}$$

Die letzte Aussage ist für alle $n \in \mathbf{N}$ wahr. Damit ist auch die erste für alle $n \in \mathbf{N}$ wahr. $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ist daher streng monoton wachsend. □

(2) Beschränktheit:

Wir zeigen, dass die Folge auch beschränkt ist. Zuerst sei bemerkt, dass die Folge nach unten durch a_1 beschränkt sein muss, da sie monoton wachsend ist.

Wir zeigen nun, dass die Folge durch Null nach oben beschränkt ist. Dazu formen wir den Term $a_n \leq 0$ so lange äquivalent um, bis eine wahre Aussage erreicht ist.

$$a_n \leq 0 \iff \frac{3n-2}{3-4n} \leq 0 \iff 3n-2 \geq 0$$

Die letzte Aussage gilt für alle $n \in \mathbf{N}$. Damit gilt auch die erste Aussage für alle $n \in \mathbf{N}$. Die Folge ist also durch 0 nach oben beschränkt. □

BEISPIEL 3: **Monotonie und Beschränktheit der rekursiv durch die Vorschrift $a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n}$ und $a_1 = 2$ definierten Folge $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$.**

(1) Monotonie:

Wir zeigen, dass $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ streng monoton fallend ist. Das ist in diesem Fall allerdings eine ziemliche Fuselarbeit, denn dass die Folge streng monoton fallend ist, können wir zunächst nur unter der Bedingung zeigen, dass alle Folgenglieder größer als $\sqrt{2}$ sind. Wir formen dazu den Term $a_{n+1} < a_n$ solange äquivalent um, bis wir eine wahre Aussage erhalten:

$$\begin{aligned} a_{n+1} < a_n &\iff \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n} < a_n \\ &\iff a_n^2 + 2 < 2a_n^2 \\ &\iff 2 < a_n^2 \end{aligned}$$

Die letzte Aussage ist für alle $n \in \mathbf{N}$ nur wahr, wenn alle Folgenglieder größer als $\sqrt{2}$ oder kleiner als $-\sqrt{2}$ sind. □

Es bleibt also noch zu zeigen, dass $a_n > \sqrt{2}$ für alle $n \in \mathbf{N}$ gilt. Die Möglichkeit dass $a_n < -\sqrt{2}$ für alle $n \in \mathbf{N}$ gilt, ist durch die Definition der Folge mit $a_1 = 2$ bereits ausgeschlossen.

Beweis:
Sei $a_n > \sqrt{2}$. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$, so dass $a_n = \sqrt{2} + \epsilon$ ist. Deshalb gilt für alle $n \in \mathbf{N}$:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n} \\ &= \frac{\sqrt{2}+\epsilon}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}+\epsilon} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{\epsilon}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}+\epsilon} \cdot \frac{\sqrt{2}-\epsilon}{\sqrt{2}-\epsilon} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{\epsilon}{2} + \frac{\sqrt{2}-\epsilon}{2-\epsilon^2} \\ &> \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{\epsilon}{2} + \frac{\sqrt{2}-\epsilon}{2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{\epsilon}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{\epsilon}{2} \\ &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, dass das nächste Folgenglied immer größer als $\sqrt{2}$ ist, wenn dies auch auf das vorangegangene Folgenglied zutrifft. Da aber $a_1 = 2 > \sqrt{2}$ ist, sind alle Folgenglieder größer als $\sqrt{2}$. □

Beide Schritte zusammen ergeben nun die gewünschte strenge Monotonie der Folge.

(2) Beschränktheit:

Vorbemerkung: Da $a_1 > 0$ sind alle $a_n > 0$. Denn a_n ist als Summe positiver Zahlen wieder positiv. Wir benötigen diese Aussage gleich beim Umformen der Ungleichungen.

Wir zeigen, dass die Folge nach unten durch 1 beschränkt ist. Dazu formen wir den Term $a_{n+1} > 1$ wieder so lange äquivalent um, bis eine wahre Aussage erzielt ist.

$$\begin{aligned} a_{n+1} > 1 &\iff \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n} > 1 \\ &\iff a_n^2 + 2 > 2a_n \\ &\iff a_n^2 - 2a_n + 2 > 0 \\ &\iff (a_n - 1)^2 + 1 > 0 \end{aligned}$$

Dabei wurde im vorletzten Schritt die zweite binomische Formel benutzt. Die letzte Aussage gilt für alle $n \in \mathbf{N}$. Deshalb gilt auch die erste Aussage für alle $n \in \mathbf{N}$. Die Folge ist durch 1 nach unten beschränkt.

Da die Folge streng monoton fallend ist, wie eben gezeigt, ist die Folge auch nach oben beschränkt. □

4.3 Aufgaben

1. (Folgen) Die Masse einer Bakterienpopulation a_n in der n-ten Generation sei gegeben durch

$$a_n = \frac{n-2}{n-1}\,. \tag{4.3}$$

(a) Wie groß ist die Masse der Bakterien a_{n+1} in der darauf folgenden Generation $n+1$?

(b) Wird die Population wachsen, d.h. ist die Folge a_n monoton wachsend?

(c) Gibt es eine maximale Masse der Bakterienpopulation, d.h. ist die Folge beschränkt?

(d) Eine allgemeine Version der Gleichung (4.3) wäre

$$a_n = \frac{n-k}{n-q}\ , \quad k, q \in \mathbf{R}\ . \tag{4.4}$$

Wie müssten k und q gewählt werden, damit die Population wächst?

2. (rekursive Folge) Eine Folge a_n sei gegeben durch die Rekursionsvorschrift

$$a_{n+1} = \frac{2}{3} a_n\ .$$

(a) Berechnen Sie die Folgenglieder a_1 bis a_4 mit $a_0 = 4$ und tragen Sie diese in ein Koordinatensystem ein!

(b) Können Sie eine Formel für das n-te Folgenglied a_n angeben, wenn ein beliebiges a_0 gegeben ist?

(c) Zeigen Sie, dass die Folge a_n streng monoton fallend ist!

(d) Ist a_n nach unten beschränkt? Ist die Folge konvergent?

(e) Welchen Grenzwert hat die Folge a_n?

3. (Monotonie von Folgen) Welche der Folgen sind monoton wachsend, welche monoton fallend, welche zeigen strenge Monotonie? Begründen Sie ihre Antwort mathematisch!

(a) $a_n = 1$

(b) $x_t = \left(\frac{1}{2}\right)^t$

(c) $y_m = \left(-\frac{1}{2}\right)^m$

(d) $\alpha_{n+1} = 2 \cdot \alpha_n \quad (\alpha_0 = 1)$

(e) $z_n = n + \frac{1}{n}$

Kapitel 5

Grenzwerte

Als Paradoxon von Achilles und der Schildkröte wird ein Trugschluß bezeichnet, der dem griechischen Philosophen Zenon von Elea zugeschrieben wird. Darin wird zu belegen versucht, dass ein schneller Läufer wie Achilles bei einem Wettrennen eine Schildkröte niemals einholen könne, wenn er ihr zu Beginn des Rennens einen Vorsprung gewähre:

Bevor Achilles die Schildkröte überholen kann, muss er zuerst ihren anfänglichen Vorsprung wettmachen. In der Zeit, die er dafür benötigt, hat die Schildkröte jedoch einen neuen, wenn auch kleineren Vorsprung erzielt, den Achilles ebenfalls erst einholen muss. Ist ihm auch das gelungen, hat die Schildkröte wiederum einen – noch kleineren – Vorsprung gewonnen, und so weiter. Der Vorsprung, den die Schildkröte hat, wird zwar immer kleiner, nach Zenon bleibt aber dennoch immer ein Vorsprung, sodass sich der schnellere Läufer der Schildkröte zwar immer weiter nähert, sie aber niemals einholen und somit auch nicht überholen kann.

Tatsächlich wird ein Schnellerer einen Langsameren aber immer einholen, sofern er dafür nur genügend Zeit hat. Wie aber kann man dies formal zeigen? Wie kann man also beweisen, dass die Summe der immer kleiner werdenden Vorsprünge des Achilles insgesamt eine endliche Zahl ergeben und nicht über alle Grenzen anwächst? Ähnliche mathematische Fragen treten bei der Analyse vieler (biologischer) Systeme auf. Doch wie soll man derartige Fragen quantitativ behandeln?

Ein konkretes Beispiel: Eine Population verringere sich in jeder Generation um einen festen Faktor $0 < q < 1$. Die Größe der Population verhält sich also von Generation zu Generation wie die geometrische Folge, $x_{n+1} = q\,x_n$. Obwohl x_n nach diesem Modell bei positivem Anfangswert x_1 zu keinem Zeitpunkt Null werden kann, werden die Werte doch immer kleiner und kleiner und damit für lange Zeiten (große n) in einem gewissen Sinn 'verschwindend' klein.[1]

[1] An diesem einfachen Beispiel werden auch die Grenzen mathematischer Modelle deutlich: Einerseits erscheint es sinnvoll, die Abnahme einer Population durch ein kompaktes Modell zu beschreiben und dazu beispielsweise die geometrische Folge zu wählen. Umgekehrt impliziert dieser Ansatz, dass die Populationsgröße eine kontinuierliche Variable sein muss, da x_n für jeden beliebigen Anfangswert x_1 und jedes $0 < q < 1$ ab einem gewissen Folgenglied keine ganze Zahl mehr sein kann. Dies steht im Widerspruch zur biologischen Bedeutung dieser Variable, fällt jedoch nicht weiter ins Gewicht, solange $x_n \gg 1$, denn bei einer Populationsgröße von mehreren Tausend Individuen ist der relative Fehler vernachläsigbar, der durch eine kontinuierliche Modellierung entsteht. Sobald aber x_n von der Größenordnung Eins ist, kann das Modell der Realität nicht mehr entsprechen, da es nur $0, 1, 2, \ldots$, nicht aber 0.61 Individuen geben kann. Spätestens in diesem Bereich müsste man also zu einer anderen Beschreibung übergehen, die der diskreten Natur der betrachteten Phänomene gerecht wird.

Wir werden immer wieder an derartige Grenzen von Modellen stoßen, Grenzen, die selbst in den besten Modellen auftreten müssen: Ein gutes Modell ist eine Karikatur der Realität, die die für die betreffende Fragestellung wichtigen Aspekte enthält, alles im Moment unwichtige jedoch so kurz wie möglich abhandelt. Diese Reduktion auf das Wesentliche bringt es mit sich, dass Modelle nur einen begrenzten Geltungsbereich haben können. Die Mathematik ist hier von großer Hilfe, da sie es erlaubt,

Um diese Vorstellung zu quantifizieren, könnten wir folgendermaßen vorgehen: Wir geben eine beliebig gewählte Populationsgröße $\varepsilon > 0$ vor und fragen, nach welcher Generation die Population auf (beziehungsweise unter) diesen Wert gefallen ist, und ob sie für alle weiteren Zeiten immer unter diesem Wert bleiben wird. Wenn wir diese Frage für beliebig kleine $\varepsilon > 0$ bejahen können, dann können wir mit Recht behaupten, dass die Population 'verschwindend' klein wird. Mathematisch sagt man dafür, dass die Folge "für n gegen unendlich gegen Null geht", oder auch, dass sie den "Grenzwert" Null hat. Dabei ist nochmals zu betonen, dass x_n für jedes n von Null verschieden ist, sich aber eben im obigen Sinn beliebig nahe an Null annähert.

Diese Ideen sollen nun präzise formuliert werden:

5.1 Konvergenz und Divergenz

Definition (Konvergenz, Grenzwert, Divergenz):
Eine reelle Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ **konvergiert** gegen eine reelle Zahl a, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_\varepsilon \in \mathbf{R}$ existiert, so dass gilt:

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad n \geq n_\varepsilon \quad . \tag{5.1}$$

Diese Zahl heißt **Grenzwert** oder **Limes** der Folge $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Man schreibt dafür auch

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \tag{5.2}$$

Eine Folge, die nicht konvergiert, wird **divergent** genannt.

Eine Folge wird also genau dann konvergent genannt, wenn man für jeden frei gewählten, positiven Wert ε ein n_ε angeben kann, so dass alle Folgenglieder mit $n \geq n_\varepsilon$ im Intervall $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ liegen. Dabei hängt n_ε im allgemeinen stark von ε ab. Bei kleinem ε wird n_ε sehr groß werden.

Oft erschließt sich einem diese Definition nicht sofort. Deshalb wollen wir sie an einigen einfachen Beispiel verdeutlichen:

BEISPIEL 1: **Die harmonische Folge $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ konvergiert gegen den Grenzwert Null:**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \ . \tag{5.3}$$

Beweis:
Wir schreiben die ersten Folgenglieder auf $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...)$ und vermuten den Grenzwert 0. Um zu zeigen, dass Null wirklich der Grenzwert der harmonischen Folge ist, müssen wir für jedes $\varepsilon > 0$ ein n_ε angeben, so dass $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_\varepsilon$ gilt.
Wir suchen zunächst ein n_{ε_1} für $\varepsilon_1 = \frac{1}{10}$. Wählt man beispielweise $n_{\varepsilon_1} = n_{\frac{1}{10}} = 11$, so gilt für alle $n \geq n_{\frac{1}{10}} = 11$:

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_{\varepsilon_1}} = \frac{1}{11} < \frac{1}{10}$$

Die geforderte Bedingung ist also für $\varepsilon_1 = \frac{1}{10}$ erfüllt.

die Konsequenzen einer bestimmten Modellannahme bis in das letzte Detail zu analysieren und damit auch bei komplexen Vorgängen zu verstehen, welche Aspekte zu welchen Phänomenen geführt haben. In diesem Sinn werden wir uns mit Grenzwerten, reellwertigen Funktionen, und anderen mathematischen Konstrukten beschäftigen, selbst wenn wir wissen, dass diese Konzepte der biologischen Realität in vielen Fällen nur bedingt gerecht werden.

Ähnlich geht man für $\varepsilon_2 = \frac{1}{100}$ vor. Man wählt $n_{\frac{1}{100}} = 101$. Dann gilt für $n \geq n_{\frac{1}{100}} = 101$:

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_{\varepsilon_2}} = \frac{1}{101} < \frac{1}{100}$$

Auch hier ist die geforderte Bedingung erfüllt.

So könnte man im Prinzip weiterverfahren und für jedes beliebige $\varepsilon > 0$ ein n_ε suchen, so dass Bedingung (5.1) erfüllt ist. Gefordert wird dies allerdings für *alle* $\varepsilon > 0$. Da ε damit jeden positiven reellen Wert annehmen darf, sind sehr viele (genauer gesagt überabzählbar unendlich viele) Fälle zu betrachten ...

Um die Arbeit zu verkürzen stellt man eine Vorschrift vor, die für *jedes* $\varepsilon > 0$ ein n_ε angibt, das die geforderte Abschätzung erfüllt. Sei also $\varepsilon > 0$. Wir wählen $n_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} + 1$. Dann gilt für alle $n \geq n_\varepsilon$:

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_\varepsilon} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon} + 1} = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} < \varepsilon \ .$$

Damit ist die Konvergenz der geometrischen Folge bewiesen. □

BEISPIEL 2: **Die Folge $\left(\frac{n}{n+1}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ konvergiert gegen den Grenzwert Eins:**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \ .$$

Beweis:

Um zu zeigen, dass die Folge $\left(\frac{n}{n+1}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ konvergiert, müssen wir zeigen, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein n_ε gibt, so dass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_\varepsilon$ gilt. Wir wählen $n_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}$. Dann gilt für $n \geq n_\varepsilon$:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| &= \left|\frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n+1}\right| \\
&= \left|\frac{n-n-1}{n+1}\right| \\
&= \frac{1}{n+1} \\
&\leq \frac{1}{n_\varepsilon + 1} \\
&< \frac{1}{n_\varepsilon} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon
\end{aligned}$$

Was zu beweisen war. □

BEISPIEL 3: **Die Folge $((-1)^n)_{n\in\mathbf{N}}$ ist divergent.**

Beweis:

Aufeinanderfolgende Glieder nehmen abwechselnd die Werte $+1$ und -1 an. Wenn eine dieser beiden Zahlen als Kandidat für den Grenzwert a der Folge gewählt wird, ist zwar $|a_n - a| = 0$ für alle geraden (beziehungsweise ungeraden) n, für die dazwischenliegenden n gilt dann aber $|a_n - a| = 2$. Damit könnte Bedingung (5.1) für kein $\varepsilon < 2$ erfüllt werden. Wählt man eine beliebige andere Zahl a als möglichen Grenzwert, so kann $|a_n - a|$ nicht unter die kleinere der beiden Zahlen $|a-1|$ und $|a+1|$ gebracht werden, womit die Konvergenz wiederum ausgeschlossen ist. □

Im Prinzip kann man sich nun für jede x-beliebige Folge einen Kandidaten für einen Grenzwert überlegen und dann anhand der Definition überprüfen, ob die Folge tatsächlich gegen diesen Grenzwert konvergiert. Das kann allerdings ziemlich schwierig sein, wie Beispiel 4 erahnen lässt.

BEISPIEL 4: **Die geometrische Folge $(q^n)_{n\in\mathbf{N}}$ konvergiert für $|q| < 1$ gegen Null.**

Beweis:

Sei $\varepsilon > 0$. Wir definieren die Hilfsvariable a als $a = -1 + \frac{1}{|q|}$. Dann ist a positiv, da $|q| < 1$. Weiter gilt $|q|^n = \frac{1}{(1+a)^n}$.

Wir wählen nun $n_\varepsilon = \frac{1}{a\varepsilon}$. Dann gilt wegen des Binomischen Satzes (3.57) für $n \geq n_\epsilon$:

$$\begin{aligned} |q^n - 0| &= |q^n| \\ &= \frac{1}{(1+a)^n} \\ &= \frac{1}{1 + \binom{n}{1}a + \binom{n}{2}a^2 + \binom{n}{3}a^3 + \ldots + \binom{n}{n}a^n} \\ &< \frac{1}{\binom{n}{1}a} \\ &= \frac{1}{na} \leq \frac{1}{n_\varepsilon a} = \epsilon \end{aligned}$$

Was zu beweisen war. □

Im nächsten Abschnitt werden wir einige Rechenregeln für Grenzwerte kennen lernen. Mit ihnen läßt sich bei vielen Folgen recht einfach zeigen, dass sie konvergieren und wie ihr Grenzwert lautet.

5.2 Eigenschaften von Grenzwerten

Anschaulich sollte jede konvergente Folge genau einen Grenzwert haben. Dass sie mindestens einen Grenzwert besitzt, folgt sofort aus der Definition. Aus der Definition folgt aber auch, dass sie höchstens einen Grenzwert besitzen kann:

Satz:
Eine konvergente Folge besitzt genau einen Grenzwert.

Beweis:

Seien a und b zwei Grenzwerte der Folge $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Wir wollen zeigen, dass $a = b$ ist. Das ist äquivalent dazu zu zeigen, dass $|a - b| = 0$ ist.

Mit Hilfe der Dreiecksungleichung (1.23) folgt:

$$|a - b| = |a - x_n + x_n - b| \leq |a - x_n| + |b - x_n|$$

Da $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ gegen a konvergiert, wird $|x_n - a|$ für großes n beliebig klein, kleiner als jedes $\varepsilon > 0$. Da $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ aber auch gegen b konvergiert, wird auch $|x_n - b|$ für großes n beliebig klein, kleiner als jedes $\varepsilon > 0$. Wir erhalten insgesamt, dass $|a - b|$ kleiner als jedes $\varepsilon > 0$ ist. $|a - b|$ muß also gleich Null sein. □

Wir geben nun ohne Beweis die schon angekündigten Rechenregeln an.

Rechenregeln für Grenzwerte:
Seien $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ konvergente Folgen mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ und $\lim_{n\to\infty} y_n = y$. Ferner sei $a \in \mathbf{R}$. Dann gilt:

$$\textbf{Skalarmultiplikation}: \quad \lim_{n\to\infty}(ax_n) = ax \quad \text{für alle } a \in \mathbf{R} \tag{5.4}$$

$$\textbf{Addition}: \quad \lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = x + y \tag{5.5}$$

$$\textbf{Multiplikation}: \quad \lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = x \cdot y \tag{5.6}$$

$$\textbf{Division}: \quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{x}{y} \quad \text{falls } y_n \neq 0 \text{ für alle } n \text{ und } y \neq 0 \tag{5.7}$$

$$\textbf{Betrag}: \quad \lim_{n\to\infty}(|x_n|) = |x| \tag{5.8}$$

Allein mit dem Wissen, dass $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ ist, lassen sich mit diesen Rechenregeln jetzt die unterschiedlichsten Grenzwerte berechnen:

BEISPIEL 5:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{7}{n^3} &= 7\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3} = 7\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\right) \\
&= 7\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right) \\
&= 7\cdot 0\cdot 0\cdot 0 = 0
\end{aligned}$$

Die Umformung in der ersten Zeile setzt vorraus, dass der Grenzwert $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}$ tatsächlich existiert. Dies wird in der zweiten Zeile im Nachhinein bestätigt.

BEISPIEL 6:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{n^4+2n^2+1}{3n^4+4n^2+7n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{n^4(1+\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^4})}{n^4(3+\frac{4}{n^2}+\frac{7}{n^3})} \\
&= \frac{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^4}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{4}{n^2}+\frac{7}{n^3}\right)} \\
&= \frac{\lim_{n\to\infty}(1)+\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}}{\lim_{n\to\infty}(3)+\lim_{n\to\infty}\frac{4}{n^2}+\lim_{n\to\infty}\frac{7}{n^3}} \\
&= \frac{1+0+0}{3+0+0} = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

So ausführlich schreibt man das natürlich nie mehr auf. Man sollte sich die einzelnen Schritte aber wenigstens einmal klargemacht haben!

Zum Schluß des Abschnitts geben wir noch ein paar weitere Eigenschaften von Grenzwerten an.

Satz:
Jede konvergente Folge ist beschränkt.

SELBSTTEST: Warum?

Satz:
Seien $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ konvergente Folgen mit den Grenzwerten x und y. Dann gilt:

1. **Vergleichssatz:** Wenn für alle Folgenglieder $x_n \leq y_n$ gilt, dann gilt auch $x \leq y$.
2. **Einschnürungssatz:** Sei $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ eine weitere Folge. Konvergieren dann $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ gegen *denselben* Grenzwert, $x = y$, und gilt für alle Folgenglieder $x_n \leq z_n \leq y_n$, dann ist auch $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ konvergent mit dem selben Grenzwert, $z = x = y$.

SELBSTTEST: : Veranschaulichen Sie sich diese beiden Sätze graphisch!

5.3 Monotone Konvergenz

Wenn wir uns bisher gefragt haben, ob eine Folge konvergiert, mussten wir im Grunde schon wissen gegen welchen Grenzwert sie konvergiert. So wurde in der Definition (5.1) der Konvergenz die Kenntnis des Grenzwerts explizit gefordert.

In diesem Abschnitt werden wir nun ein Kriterium kennen lernen, das es uns erlaubt, die Konvergenz einer Folge auch ohne Kenntnis des Grenzwerts nachzuweisen. Auf den ersten Blick mag dies wenig hilfreich erscheinen. Welcher Nutzen besteht darin zu wissen, dass eine Folge konvergent ist, wenn man den Grenzwert selbst nicht kennt? Die Antwort steckt schon in der Frage: Oft interessiert man sich nicht für den genauen Wert des Grenzwertes, entscheidend ist nur, ob die Folge konvergiert oder nicht.[2]

Satz (Monotone Konvergenz von Folgen):
Ist eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ monoton wachsend und nach oben beschränkt, so ist sie konvergent.
Ist eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ monoton fallend und nach unten beschränkt, so ist sie konvergent.

Beweisidee:
Wir hatten in Kapitel 1 erwähnt, dass die reellen Zahlen vollständig sind. Sie sollten geometrisch motivierte Zahlen wie $\sqrt{2}$ und π beinhalten. Für einen Mathematiker ist *geometrisch motiviert* viel zu schwammig. Er möchte ganz präzise wissen, wodurch die Vollständigkeit der reellen Zahlen charakterisiert ist. Dafür wird er oft nur Kopfschütteln ernten. Beim Beweis dieses Satzes kommt man ohne diese Pedanterie jedoch nicht weiter.

Die Vollständigkeit der reellen Zahlen drückt sich darin aus, dass jede nach oben beschränkte Menge reeller Zahlen eine kleinste obere Schranke, das Supremum, besitzt.

Wir kommen nun zum eigentlichen Beweis des Satzes.
Sei $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ eine monoton wachsende und nach oben beschränkte Folge. Wir betrachten nun die Menge aller Folgenglieder $\{x_n | n \in \mathbf{N}\}$. Dies ist eine nach oben beschränkte Teilmenge der reellen Zahlen. Da die reellen Zahlen vollständig sind, existiert eine kleinste obere Schranke, die wir S nennen.

[2] In der Anwendung besteht ein entscheidender qualitativer Unterschied oft auch darin, ob eine Folge gegen Null konvergiert oder nicht. Man stelle sich beispielsweise eine Folge vor, die die Anzahl der Individuen einer bestimmten Art im Laufe der Zeit darstellt. Stellen wir uns die Frage, ob die Art austerben wird, dann müssen wir nur wissen, ob der Grenzwert Null ist (dann würde sie aussterben) oder ob er ungleich Null ist (dann stirbt sie nicht aus). Bei unserer Fragestellung ist es also irrelevant, wie groß der Grenzwert wirklich ist. Wichtig ist nur, ob er Null ist oder nicht.

Natürlich müsste man an dieser Stelle begründen, weshalb eine bestimmte Folge gerade die Anzahl der Individuen einer bestimmten Art im Laufe der Zeit beschreiben sollte. Diese Frage ist wichtig. Wir werden ihr deshalb die nächsten beiden Kapitel widmen, kehren nun aber zuerst zur Mathematik zurück.

Da $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ monoton wächst, wird die Differenz $S - x_n$ mit wachsendem n immer kleiner. Für großes n wird die Differenz beliebig nahe an Null sein. Die Folge konvergiert gegen S. □

BEISPIEL 7:

Die harmonische Folge $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ ist monoton fallend und nach unten durch Null beschränkt, also muss sie konvergent sein.

BEMERKUNG: : An dieser Stelle ist nicht wichtig, dass Null die größte untere Schranke der Folge ist, entscheidend ist nur, **dass** eine untere Schranke existiert. Wir hätten also genauso die Schranke -1 oder -13 wählen können.

BEISPIEL 8:

Die geometrische Folge $(q^n)_{n\in\mathbf{N}}$ ist für $0 < q < 1$ monoton fallend und nach unten durch Null beschränkt, also muss sie ebenfalls konvergent sein.

BEISPIEL 9:

Wir hatten in Kapitel 4 rekursiv die Folge

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n} \quad \text{mit} \quad a_1 = 2$$

definiert und gezeigt, dass sie streng monoton fallend und nach unten durch 1 beschränkt ist. Aus dem Satz zur Monotonen Konvergenz von Folgen auf Seite 64 folgt, dass sie konvergiert.

Wissen wir erst einmal, dass die Folge konvergiert, können wir auch Ihren Grenzwert, den wir mit α bezeichnen, berechnen:

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n} && \Rightarrow \\
\lim_{n\to\infty} a_{n+1} &= \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{2} + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} && \Rightarrow \\
\alpha &= \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{\alpha} && \Leftrightarrow \\
\alpha^2 &= \frac{\alpha^2}{2} + 1 && \Leftrightarrow \\
\alpha_{1/2} &= \pm\sqrt{2}
\end{aligned}$$

Der gesuchte Grenzwert muß also entweder $+\sqrt{2}$ oder $-\sqrt{2}$ sein. Zu Beginn von Kapitel 5.2 hatten wir schon gezeigt, dass eine Folge nur einen Grenzwert haben kann. Da die Folge aber, wie gezeigt, nach unten durch 1 beschränkt ist, muß der Grenzwert der Folge $+\sqrt{2}$ sein. □

Vorsicht: Bei dem eben benutzten Verfahren zur Grenzwertbestimmung ist es unerläßlich zuerst zu zeigen, dass die Folge konvergiert. Wir betrachten dazu folgendes Beispiel:

Die alternierende Folge $((-1)^n)_{n\in\mathbf{N}}$ läßt sich auch rekursiv definieren durch:

$$a_{n+1} = -a_n \quad \text{mit} \quad a_1 = -1$$

Nimmt man an, der Grenzwert wäre a, so lieferte die gleiche Methode:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_{n+1} &= \lim_{n\to\infty} a_n && \Rightarrow \\
a &= -a && \Leftrightarrow \\
2a &= 0
\end{aligned}$$

Gäbe es also einen Grenzwert, dann müsste er gleich 0 sein. Das nützt uns allerdings nicht viel, denn die alternierende Folge $((-1)^n)_{n\in\mathbf{N}}$ divergiert.

BEISPIEL 10: **Unendlicher Kettenbruch:**

Wir wollen den Wert des unendlichen Kettenbruchs berechnen:

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}$$

Die Folge, die diesen Kettenbruch darstellt, ist rekursiv definiert durch:

$$a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n} \quad \text{mit} \quad a_1 = 1 \ .$$

Wir wollen den Satz über monotone Konvergenz anwenden, stellen allerdings fest, dass die Folge gar nicht monoton ist. Dies sieht man, wenn man sich die ersten Folgenglieder aufschreibt.

$$\begin{array}{lllll} a_1 = 1 & & & a_2 = \frac{1}{2} = 0.5 \\ a_3 = \frac{2}{3} = 0.66666.... & & & a_4 = \frac{3}{5} = 0.6 \\ a_5 = \frac{5}{8} = 0.625 & & & a_6 = \frac{8}{13} = 0.61538.... \\ a_7 = \frac{13}{21} = 0.61904.... & & & a_8 = \frac{21}{34} = 0.61764.... \\ a_9 = \frac{34}{55} = 0.61818.... & & & a_{10} = \frac{55}{89} = 0.61797.... \end{array}$$

Um den Satz über monotone Konvergenz anwenden zu können, betrachten wir die geraden Folgenglieder getrennt von den ungeraden Folgengliedern. Es läßt sich zeigen:

1. Die Folge der geraden Folgenglieder $(a_{2n})_{n\in\mathbf{N}}$ ist monoton wachsend, die Folge der ungeraden Folgenglieder $(a_{2n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ ist monoton fallend.
2. Sowohl die Folge der geraden Folgenglieder $(a_{2n})_{n\in\mathbf{N}}$ als auch die Folge der ungeraden Folgenglieder $(a_{2n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ ist beschränkt.

Aus dem Satz über monotone Konvergenz folgt nun, dass sowohl die Folge $(a_{2n})_{n\in\mathbf{N}}$ als auch die Folge $(a_{2n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ konvergiert. Es läßt sich weiter zeigen, dass die beiden Grenzwerte übereinstimmen. Das bedeutet aber nichts anderes, als dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ selbst konvergiert.

Wie in Beispiel 9 können wir nun den Grenzwert α berechnen.

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{1}{1+a_n} \quad \Rightarrow \\ \lim_{n\to\infty} a_{n+1} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+a_n} \quad \Rightarrow \\ \alpha &= \frac{1}{1+\alpha} \quad \Leftrightarrow \\ \alpha_{1/2} &= \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2} \end{aligned} \tag{5.9}$$

Der gesuchte Grenzwert muss also entweder α_1 oder α_2 sein. Da $\alpha_2 < 0$, die Folge $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ aber durch Null nach unten beschränkt ist, kann α_2 nicht der Grenzwert sein. Der Grenzwert des Kettenbruches ist also $\alpha = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Beweis der Beschränktheit von $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ durch Null nach unten:
Als Wiederholung, wollen wir die Beschränktheit der Folge $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ durch Null nach unten mit Hilfe des Verfahrens der *vollständigen Induktion* beweisen (s. Abschnitt 1.6 auf S. 10):
Induktionsvoraussetzung: $a_n > 0$
Induktionsbehauptung: $a_{n+1} > 0$
Induktionsanfang: $a_1 > 0$
Induktionsschritt: $n \to n+1$ $a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n} > 0$, da $a_n > 0$. □

BEMERKUNG: Seit der Antike gilt der **goldene Schnitt** als ausgesprochen harmonisches Teilungsverhältnis zweier Größen. Im goldenen Schnitt verhalten sich die beiden Maßzahlen gerade wie $1 : \alpha = 1 : 0.618\ldots$

5.4 Reihen

Oft interessiert man sich nicht nur für das Verhalten einer Folge $(x_\nu)_{\nu\in\mathbf{N}}$ selbst, sondern auch für die Folge der Teilsummen $\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu$.

Die Folge $(\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu)_{n\in\mathbf{N}}$ kann wie jede "normale" Folge konvergieren. In diesem Fall schreibt man

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu = \sum_{\nu=1}^{\infty} x_\nu \ . \tag{5.10}$$

BEISPIEL 11:

Die schon in Kapitel 1.5 erwähnte "Kuchenstückreihe":

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^\nu$$

BEISPIEL 12:

Die geometrische Reihe[3] konvergiert für $-1 < q < 1$ mit dem Grenzwert

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} q^\nu = \frac{1}{1-q} \ . \tag{5.11}$$

Beweis:
Wir hatten ebenfalls in Kapitel 1.5 gezeigt, dass für $-1 < q < 1$ gilt:

$$\sum_{\nu=0}^{n} q^\nu = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \ .$$

Der dort schon angedeutete Grenzübergang $n \to \infty$ liefert dann die Behauptung.
□

BEISPIEL 13:

Die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu$ ist divergent.

BEISPIEL 14:

[3] Man beachte, dass bei der geometrischen Reihe der Laufindex nach allgemein üblicher Konvention bei $\nu = 0$ beginnt.

Die **Exponentialreihe** ist konvergent. Ihr Grenzwert ist die **Eulersche Zahl** e,

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} = \mathrm{e} = 2.718281\ldots \ . \tag{5.12}$$

Notiz:
Wenn die Folge der Teilsummen konvergiert, muss die zugrundeliegende Folge $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ gegen Null konvergieren.
Die Umkehrung ist jedoch falsch: Wenn $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ gegen Null konvergiert muss die zugehörige Reihe noch lange nicht konvergieren.

Dies zeigt wird am Beispiel der harmonischen Reihe im folgenden Abschnitt gezeigt.

5.5 Divergenz gegen Unendlich

Definition (Divergenz gegen Unendlich):
Gibt es für jede Schranke $K \in \mathbf{R}$ eine natürliche Zahl n_K, sodass $x_n > K$ für alle $n \geq n_K$, sagt man, die Folge **divergiert gegen unendlich** und schreibt

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty \ . \tag{5.13}$$

In gleicher Weise definiert man die Divergenz gegen minus unendlich.

BEISPIEL 15: **Die harmonische Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu}$ divergiert.**

Beweis:
Wir zeigen, dass die Reihe über jede noch so große Schranke wächst. Sei $K > 0$ eine beliebig große Schranke. Zur Vereinfachung wählen wir $K \in \mathbf{N}$ und $n_K = 2^{2K}$. Dann gilt für jedes mit $n \geq n_K$:

$$\begin{aligned}
\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^{2K-1}+1} + \ldots + \frac{1}{2^{2K}} + \ldots + \frac{1}{n} \\
&\geq 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{>\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)}_{>\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}} + \ldots + \underbrace{\left(\frac{1}{2^{2K-1}+1} + \ldots + \frac{1}{2^{2K}}\right)}_{>2^{2K-1}\cdot\frac{1}{2^{2K}}=\frac{1}{2}} \\
&> 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2} \qquad \left(\text{insgesamt sind dies } 2\,K\ \frac{1}{2}\text{-Terme}\right) \\
&= 1 + 2K\frac{1}{2} = 1 + K > K \ .
\end{aligned}$$

Damit wächst die Folge der Teilsummen $\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu}$ über alle Schranken und kann deshalb keinen Grenzwert haben. □

BEMERKUNG: : Wie langsam dieses Anwachsen jedoch geschieht, zeigen die folgenden, jeweils auf drei Kommastellen gerundeten Zahlenwerte: $\sum_{\nu=1}^{100} \frac{1}{\nu} \approx 5,187$, $\sum_{\nu=1}^{1000} \frac{1}{\nu} \approx 7,486$, $\sum_{\nu=1}^{10000} \frac{1}{\nu} \approx 9,788$. Dieses Beispiel verdeutlicht damit auch recht eindrücklich, dass ein mathematisch stichfestes Ergebnis — hier das Anwachsen der Reihe über alle Schranken — nicht direkt aus den numerischen Daten ersichtlich ist. Aufgrund der Daten hätte man wohl eher vermutet, dass die harmonische Reihe konvergent ist.

BEISPIEL 16:

$$\lim_{n\to\infty} n = +\infty$$

BEISPIEL 17:

$$\lim_{n\to\infty}(-n) = -\infty$$

BEISPIEL 18:

Die Folge $((-1)^n n)_{n\in\mathbf{N}}$ divergiert. Dabei konvergiert sie weder gegen $+\infty$ noch gegen $-\infty$, da sie alterniert.

Ohne Beweis geben wir folgenden Satz an:

Satz:
Es sei $x_n > 0$ für alle n. Dann gilt:
$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \infty$

Wünschenswert wäre es, für den Grenzwert ∞ ähnliche Rechenregeln zu haben, wie sie für endliche Grenzwerte gelten. Die Besonderheit von dem Grenzwert ∞ liegt jedoch gerade darin, dass es solche Rechenregeln nur zum Teil gibt. Bei ∞ ist deshalb immer größte Vorsicht geboten. Wir geben im Folgenden die Fälle an, in denen es Rechenregeln gibt, anschließend unbestimmte Ausdrücke, in denen es keine Rechenregeln gibt.

Rechenregeln für Grenzwerte:
Es sei $-\infty < a < +\infty$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\textbf{Addition}: \quad & a + \infty = +\infty \\
& \infty + \infty = +\infty \\
& a - \infty = -\infty \\
& -\infty - \infty = -\infty \\
\textbf{Multiplikation}: \quad & a \cdot (\pm\infty) = \begin{cases} \pm\infty \text{ für } a > 0 \\ \mp\infty \text{ für } a < 0 \end{cases} \\
& (+\infty)(+\infty) = +\infty \\
& (-\infty)(-\infty) = +\infty \\
& (-\infty)(+\infty) = -\infty \\
\textbf{Division}: \quad & \frac{a}{\pm\infty} = 0 \\
& \frac{\pm\infty}{a} = \begin{cases} \pm\infty \text{ für } a > 0 \\ \mp\infty \text{ für } a < 0 \end{cases}
\end{aligned} \tag{5.14}$$

WICHTIG: Die Schreibweise $a+\infty = \infty$ bedeutet nichts anderes, als dass aus $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ stets $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \infty$ folgt.

Bei den Regeln für Multiplikation und Division beachte man immer die Fallunterscheidung zwischen $a < 0$ und $a > 0$.

BEISPIEL 19:

$\lim_{n\to\infty}(n^2) = \lim_{n\to\infty}(n) \cdot \lim_{n\to\infty}(n) = \infty \cdot \infty = \infty$

Unbestimmte Ausdrücke von Grenzwerten:
In den Fällen

$$+\infty - \infty, \quad 0(\pm\infty), \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0^{\infty}, \quad \infty^{0}$$

gibt es keine allgemeinen Rechenregeln. Hier muß man *extrem* aufpassen. Unterschiedliche Folgen können hier zu unterschiedlichen Ergebnissen führen.

BEISPIEL 20: "$\infty - \infty$"

$$\lim_{n\to\infty}(2n - n) = \infty$$
$$\lim_{n\to\infty}(n - 2n) = -\infty$$
$$\lim_{n\to\infty}((n + 7) - n) = 7$$

BEISPIEL 21: "$0 \cdot \infty$"

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2} \cdot n\right) = 0$$
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} \cdot n\right) = 1$$
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} \cdot n^2\right) = \infty$$

5.6 Aufgaben

1. (Grenzwerte von Folgen) Berechen Sie die Grenzwerte folgender Folgen:

(a) $a_n = 1/n$

(b) $x_n = \dfrac{n+1}{n-1}$

(c) $y_t = \dfrac{t^2 - 5t + 10}{3t - 2}$

2. (Grenzwerte von Reihen) Bestimmen Sie die Grenzwerte folgender Reihen! Nehmen Sie dazu auch das Skript zur Hilfe.

(a) $s_m = \sum_{i=1}^{m} 1/i$

(b) $q_m = \sum_{\nu=1}^{m} \dfrac{1}{3^{\nu}}$

3. (Grenzwerte von Folgen) Welchen Grenzwert besitzen die einzelnen Folgen? Sind sie beschränkt? Begründen Sie ihre Antwort mathematisch!

(a) $a_n = 500$

(b) $b_n = \dfrac{n^2 - 10}{4n^3 + n^2 - 100}$

(c) $c_n = \dfrac{6n^{10} - n^4}{3n^{10} + n}$

(d) $y_{n+1} = -\dfrac{1}{2} \cdot y_n$

4. (Geometrische Reihe) Wenn die Erdölvorräte bei konstantem gegenwärtigen Jahresverbrauch noch für 30 Jahre ausreichen, um wieviel Prozent müsste sich dann von Jahr zu Jahr der Verbrauch reduzieren, damit sie für immer ausreichen würden? Siehe auch Skript Kapitel 1.5.1!

Kapitel 6

Iterierte Abbildungen

Die Welt um uns herum ist nicht statisch sondern verändert sich andauernd. Insbesondere ist "Leben" nicht ohne Stoff*wechsel* denkbar und impliziert deshalb permanente Veränderung oder **Dynamik**. Es ist daher nicht verwunderlich, dass zentrale Fragen der Biologie dynamische Vorgänge betreffen. Diese laufen auf unterschiedlichsten Ebenen und Zeitskalen ab und werden in verschiedenen Spezialdisziplinen behandelt — von der Molekular- und Mikrobiologie über die Pflanzen- und Tierphysiologie, Entwicklungsbiologie, Neurobiologie, Immunologie bis hin zur Ökologie, Epidemiologie und organismischen Evolutionsbiologie.

Wie aber soll man dynamische Vorgänge mathematisch beschreiben?

Zwei Alternativen bieten sich an und werden im Rahmen dieser Vorlesung im Detail diskutiert: Im ersten Zugang wird die Zeit t wie in der Physik als *kontinuierliche Variable* behandelt.[1] Mathematisch gesehen führt diese Art der Modellierung der Zeit auf das Konzept **Differentialgleichung**, das wir in den Kapiteln 14 bis 16 ausführlich vorstellen und behandeln werden.

Im zweiten Zugang wird die Zeit in *diskrete Schritte* eingeteilt. Dies entspricht zwar nicht ihrer physikalischen Natur, ist aber im Rahmen vereinfachter phänomenologischer Beschreibungen oft extrem hilfreich. Man stelle sich beispielsweise eine Insektenart vor, bei der die adulten Tiere jeweils im Herbst Eier legen und dann sterben. Die Zahl der Insekten läßt sich dann als diskrete Abfolge x_1, x_2, x_3, ... auffassen, wobei der Index t das jeweilige Jahr bezeichnet. In dieser Beschreibung dauert jeder Zeitschritt ein Jahr — um vieles länger als die für die mikroskopischen Entwicklungsprozesse relevanten Zeitskalen, aber gut geeignet, um populationsbiologische Fragen zu beantworten: Wächst die Population, strebt sie einem Gleichgewicht zu oder stirbt sie aus? Wie reagiert die Insektenpopulation auf Veränderungen ihrer Umwelt? ...

In unserem Modell wollen wir weiterhin annehmen, dass die Insektenzahl in aufeinander folgenden Jahren durch eine einfache Rekursionsbeziehung gegeben ist,

$$x_{t+1} = f(x_t) \ . \tag{6.1}$$

Die Größe der Insektenpopulation im Jahr vor dem Beginn der Untersuchung wollen wir mit x_0 bezeichnen.

Setzen wir in Gleichung (6.1) sukzessive $t = 0, 1, 2, \ldots$ ein, können wir sofort die Anzahl

[1] Eine Quantisierung der Zeit in diskrete Zeitschritte wird in der physikalischen Literatur im Zusammenhang mit Modellen der Quantengravitation diskutiert. Auf der für biologische Prozesse relevanten Ebene gibt es jedoch keine Indizien, die gegen einen kontinuierlichen Zeitfluß sprechen.

der Insekten für alle zukünftigen Jahre berechnen:

$$\begin{aligned} x_1 &= f(x_0) \\ x_2 &= f(x_1) = f(f(x_0)) \\ x_3 &= f(x_2) = f(f(x_1)) = f(f(f(x_0))) \\ &\vdots \qquad\quad \vdots \\ x_t &= f(x_{t-1}) = f(f(x_{t-2})) = \ldots \end{aligned} \tag{6.2}$$

Da die Abbildung f in jedem einzelnen Zeitschritt wieder auf sich selbst angewendet wird, bezeichnet man (6.1) auch als **Iterierte Abbildung**.[2] In diesem Modell haben wir stillschweigend vier wichtige Annahmen getroffen:

- Es gibt keine explizit zeitabhängigen Einflüsse auf das Wachstum der Population — stimmt die Insektenzahl in zwei beliebigen Jahren t' und t'' überein, das heißt $x_{t'} = x_{t''}$, so gilt nach Gleichung (6.1) auch $x_{t'+1} = x_{t''+1}$.
- Die Populationsgröße x_{t+1} hängt nur vom Wert x_t ab, andere Größen wie das Zahlenverhältnis Männchen versus Weibchen werden vernachlässigt. Der für die betrachtete Dynamik relevante Zustand (siehe dazu auch Kapitel 3.4.4) ist also durch die Größe der Population vollständig beschrieben.
- Die Dynamik ist **deterministisch**, zufällige Fluktuationen sind ausgeschlossen.
- Die Anzahl der Insekten in früheren Jahren $t' < t$ hat keinen *unmittelbaren* Einfluss auf x_{t+1} sondern wirkt nur vermöge der in (6.2) skizzierten Wirkungskette. Da die Bewegungsgleichung (6.1) selbst nur jeweils *einen* Zeitschritt zurückblickt, sagen wir auch, dass die Iterierte Abbildung von **1.Ordnung** ist.[3]

Als Lösung einer Iterierten Abbildung ergibt sich bei vorgegebener **Anfangsbedingung** x_0 eine *Folge* $x_1, x_2, x_3, \ldots$:

Notiz:
Die Lösung einer Iterierten Abbildung $x_{t+1} = f(x_t)$ bei vorgegebener **Anfangsbedingung** x_0 ist eine Folge $(x_t)_{t\in\mathbf{N}}$.
Die Rekursionsvorschrift einer rekursiv definierten Folge kann damit auch als eine Iterierte Abbildung interpretiert werden.

[2] Subtrahiert man x_t von beiden Seiten der Bewegungsgleichung (6.1) und definiert anschließend $\tilde{f}(x) = f(x) - x$, kann man die ursprüngliche Gleichung auch als

$$x_{t+1} - x_t = f(x_t) - x_t = \tilde{f}(x_t) \tag{6.3}$$

schreiben, und spricht dann von einer **Differenzengleichung**, da auf der linken Seite von Gleichung (6.3) die *Differenz* der Größe x zu zwei aufeinanderfolgenden Zeiten steht.

Iterierte Abbildung und Differenzengleichung sind äquivalente Beschreibungen: Aus jeder Funktion $f(x)$ einer Iterierten Abbildung erhält man durch $\tilde{f}(x) = f(x) - x$ die die zugeordnete Differenzengleichung definierende Funktion $\tilde{f}(x)$; und umgekehrt erhält man aus jeder Funktion $g(x)$ einer Differenzengleichung durch $\tilde{g}(x) = g(x) + x$ die die zugeordnete Iterierte Abbildung charakterisierende Funktion $\tilde{g}(x)$.

Die Interpretation beider Beschreibungen unterscheidet sich jedoch: die Motivation für eine Iterierte Abbildung ist die Beschreibung der *schrittweisen Entwicklung* eines dynamischen Systems. Dagegen wird in einer Differenzengleichung die *Veränderung* der dynamischen Variablen von Zeitschritt zu Zeitschritt betont.

[3] Im Abschnitt 6.2 werden wir ein auch historisch wichtiges Modell der Form $x_{t+1} = f(x_t, x_{t-1})$ kennen lernen. Modelle dieser Art, in denen die Funktion f zwei Argumente hat, werden Iterierte Abbildungen zweiter Ordnung genannt. Entsprechend werden Iterierte Abbildungen höherer Ordnung definiert.

BEMERKUNG: Wie aus Kapitel 4 bekannt ist, sind Folgen Funktionen, deren Definitionsbereich die natürlichen Zahlen sind. Damit tritt das Konzept Funktion in Iterierten Abbildungen in zwei vollkommen unterschiedlichen Bedeutungen auf, die auf keinen Fall verwechselt werden dürfen:

a) In jedem Zeitschritt wird der neue Wert von x (zur Zeit $t+1$) als Funktion $f(x)$ des alten Wertes x (zur Zeit t) berechnet.

b) Daraus ergibt sich eine Dynamik für x als Funktion x_t der Zeit t.

Iterierte Abbildungen können höchst unterschiedliche Lösungen erzeugen. Die einfachsten Lösungen entsprechen (biologischen) Gleichgewichten, sind also zeitlich konstant:

Definition (Fixpunkt und Fixpunkt-Lösung):
Erfüllt die Zahl $x^\star \in \mathbf{R}$ die Gleichung

$$f(x^\star) = x^\star \ , \tag{6.4}$$

so heißt sie Fixpunkt der Funktion $f(x)$.
Die zugehörige konstante Lösung $(x^\star, x^\star, x^\star, \ldots)$ der Iterierten Abbildung $x_{t+1} = f(x_t)$ wird Fixpunkt-Lösung genannt.

BEMERKUNG: Anschaulich interpretiert bedeutet Gleichung (6.4), dass Fixpunkte genau den Schnittpunkten des Graphen von f mit der Winkelhalbierenden $y = x$ entsprechen (Siehe auch Abbildung 6.1).

Nimmt das System den Wert $x^\star$ zu einer gewissen Zeit t an, so wird es dies wegen (6.1) auch im nächsten Zeitpunkt $t+1$ tun, dann aber auch zur Zeit $t+2$ etc., und damit auch zu allen nachfolgenden Zeiten. Dies begründet den Begriff "Fixpunkt-Lösung einer Iterierten Abbildung."

BEMERKUNG: Je nach Form des Graphen von f besitzt eine Iterierte Abbildung keine, eine oder mehrere Fixpunkt-Lösungen.

Ein für das Verständnis dynamischer Prozesse zweites wichtiges Konzept ist das der **Stabilität** einer Lösung: läuft das System nach einer beliebigen kleinen äußeren Störung wieder zur ursprünglichen Lösung zurück, so nennt man die Lösung **asymptotisch stabil**, bewirkt eine Störung, dass sich das System von dieser Lösung wegbewegt, so heißt die Lösung **instabil**. Führt eine kleine Störung des Systems dazu, dass sich die neue Lösung weder von der ursprünglichen Lösung wegbewegt noch sich ihr nähert, so nennt man die ursprüngliche Lösung **marginal stabil**. Dabei steht insbesondere die Stabilität von Fixpunkt-Lösungen im Vordergrund vieler Untersuchungen.

In diesem Kapitel untersuchen wir **lineare Iterierte Abbildungen**. Bei diesen ist f eine Funktion $f(x) = ax + b$, die linear mit x wächst oder fällt. Siehe auch Kapitel 2.3.1. Für diese Systeme existiert eine elegante Theorie zur Bestimmung von Lösungen. In Kapitel 7 werden wir **nichtlineare Systeme** kennen lernen. Bei diesen ist f eine nichtlineare Funktion. Eine schöne Lösungstheorie gibt es hier leider nicht mehr, dafür treten eine Reihe interessanter Phänomene auf, die wir kurz besprechen werden. Gerade für die Biologie sind nichtlineare Iterierte Abbildungen von besonderer Bedeutung, da viele biologische Regelkreise nichtlineare Prozesse beinhalten.

Bei der Untersuchung von Iterierten Abbildungen werden wir meistens die folgenden Fragen behandeln:

Allgemeine Lösung: Welche Lösungen existieren überhaupt?

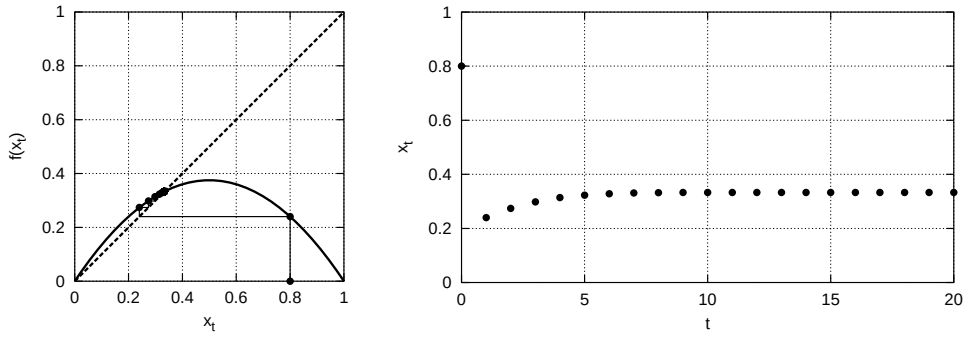


Abbildung 6.1: Die Iterierte Abbildung $x_{t+1} = 1.5 \cdot x_t(1 - x_t)$. Links ist die der Iterierten Abbildung zu Grunde liegende Funktion $f(x) = 1.5 \cdot x(1-x)$ zusammen mit dem gestrichelt dargestellten Graphen der Funktion $g(x) = x$ abgebildet. Die zusätzlich eingezeichnete Zick-Zack-Linie stellt die sukzessive Zeitentwicklung des Systems dar. Ausgehend vom Startwert $x_0 = 0.8$ wird im ersten Zeitschritt der Wert $x_1 = 1.5 \cdot 0.8 \cdot (1 - 0.8) = 0.24$ erreicht, im zweiten Schritt der Wert $x_2 = 1.5 \cdot 0.24 \cdot (1 - 0.24) = 0.2736$, im dritten Schritt der Wert $x_3 = \ldots$
Rechts ist die Lösung der Iterierten Abbildung dargestellt. Nach unserer Sprachregelung ist dies also eine Folge, deren rekursive Definition gerade mit der Iterationsvorschrift $x_{t+1} = 1.5 \cdot x_t(1 - x_t)$ übereinstimmt. Die einzelnen Glieder x_t entsprechen der ersten Komponente der in der linken Abbildung dargestellten Schnittpunkte $(x_t, x_{t+1}]$ der Zick-Zack-Linie mit dem Graphen der Funktion f. Im hier gezeigten Fall nähert sich x_t für große Zeiten t immer näher an den Fixpunkt $x^\star = 1/3$ der Funktion f an.
In der linken Abbildung kann man diese Entwicklung wie folgt konstruieren: Man startet auf der Abszisse bei $x_0 = 0.8$ und bewegt sich dann parallel zur Ordinate bis der Graph der Funktion $f(x)$ erreicht ist. Der dabei gefundene Funktionswert $f(x_0)$ ist nach der Definition einer *Iterierten* Abbildung der Startwert für die nächste Iteration gemäß $x_1 = f(x_0)$. Der Schnittpunkt liegt also im Koordinatensystem gerade am Ort (x_0, x_1). Um $x_2 = f(x_1)$ zu berechnen, muss man die gerade verwendete Prozedur wiederholen, nun aber mit dem Startwert x_1, womit ein nächster Schnittpunkt am Ort (x_1, x_2) gefunden wird, und so weiter. Diese Prozedur kann man vereinfachen wenn man beachtet, dass eine zur Abszisse im Abstand z parallele Gerade die Winkelhalbierende genau im Punkt (z, z) schneidet. Damit braucht man den Wert $f(x_t)$ nicht an der Ordinate ablesen und für die nächste Iteration auf die Abszisse übertragen, sondern kann einfach in der angegebenen Zick-Zack-Linie voranschreiten. Jeder auf diese Art sukzessive gewonnene Schnittpunkt mit dem Graphen der Funktion f entspricht einem Glied der Lösung (x_t). Überzeugen Sie sich selbst, dass dieses letztlich einfache Verfahren die richtige Zeitentwicklung liefert!

Anfangswertproblem: Welche spezielle Lösung ergibt sich bei vorgegebenem Anfangswert x_0?

Langzeitverhalten: Wie verhält sich die Lösung für lange Zeiten? Strebt sie beispielsweise einer Fixpunkt-Lösung oder einer periodischen Oszillation zu?

Existenz von Fixpunkten und Stabilität von Fixpunkt-Lösungen: Besitzt die Funktion f Fixpunkte? Welche Fixpunkt-Lösungen sind stabil, welche instabil?

Wurde das Modell zur Beschreibung von experimentellen Daten aufgestellt, so erlauben die Antworten auf diese Fragen Vorhersagen über das zukünftige Verhalten des betrachteten Systems. Diese können dann in weiteren Experimenten getestet werden; Abweichungen können anschließend dazu verwendet werden, das Modell zu verbessern. Mit einem derart verfeinerten Modell lassen sich dann neue und präzisere Hypothesen aufstellen und wiederum experimentell testen ...

6.1 Lineare Iterierte Abbildungen 1. Ordnung

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit den einfachsten Iterierten Abbildungen:

Definition (Lineare Iterierte Abbildung 1.Ordnung):
Sei $t \in \mathbf{N}$, $x_0 \in \mathbf{R}$ und $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, x \mapsto f(x)$ eine Funktion, die linear mit x wächst oder fällt, d.h. $f(x) = ax + b$. Dann heißt

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= f(x_t) \\ &= ax_t + b \end{aligned} \tag{6.5}$$

eine lineare Iterierte Abbildung 1.Ordnung.
Ist $b = 0$, so nennt man die Iterierte Abbildung homogen, ist $b \neq 0$, so nennt man sie inhomogen.

6.1.1 Homogene Iterierte Abbildungen 1. Ordnung

Wir betrachten die homogene Iterierte Abbildung

$$x_{t+1} = ax_t \ . \tag{6.6}$$

BEMERKUNG: Diese Gleichung hat eine wichtige nicht-biologische Interpretation: Bei einem jährlichen Zinssatz von z Prozent wächst ein Sparguthaben pro Jahr um den Faktor $1 + z/100$. Wählt man also $a = 1 + z/100$, so beschreibt (6.6) genau das jährliche Anwachsen eines festverzinslichen Guthabens mit Anfangswert x_0.

Allgemeine Lösung:

Durch Einsetzen erhält man:

$$x_t = ax_{t-1} = a^2 x_{t-2} = \ldots = a^t x_0 \tag{6.7}$$

Zu vorgegebenem Anfangswert x_0 lautet die Lösung also $(x_0 a^t)_{t\in\mathbf{N}}$. Der Anfangswert x_0 kann dabei eine beliebige reelle Zahl sein.

Die homogene lineare Iterierte Abbildung $x_{t+1} = ax_t$ hat die allgemeine Lösung $(ca^t)_{t\in\mathbf{N}}$ mit $c \in \mathbf{R}$.
Der Wert von c entspricht dabei genau dem Startwert x_0; in späteren Fällen muss dies jedoch nicht so sein, weshalb wir zwischen dem spezifischen Startwert x_0 und dem frei wählbaren Parameter c konzeptionell unterscheiden.

BEMERKUNG: Abhängig vom Wert von c erhält man unterschiedliche Lösungen. Jede einzelne Lösung ist also durch einen bestimmten Wert des **Parameters** c charakterisiert.

BEMERKUNG: Lineare homogene Gleichungen wie (6.6) erfüllen das **Superpositionsprinzip**: Sind (x_t) und (y_t) zwei Lösungen von (6.6), so ist auch die *Summe* beider Lösungen, also die Folge (z_t) mit $z_t = x_t + y_t$, wieder eine Lösung. Zeigen Sie dies durch Einsetzen![4]

[4] Das Superpositionsprinzip ist von grundlegender Bedeutung in der Physik, gilt jedoch *nicht* für nichtlineare Systeme. Auch dies können Sie sofort am Beispiel $x_{t+1} = [x_t]^2$ nachrechnen.

Anfangswertproblem:

In der Praxis soll man oft diejenige spezielle Lösung einer Iterierten Abbildung bestimmen, die durch einen vorgegebenen Anfangswert x_0 festgelegt wird. Im Fall der Gleichung (6.6) stellt dies allerdings kein Problem dar. Die spezielle Lösung zum Anfangswert x_0 lautet ja gerade $(x_0 a^t)_{t\in\mathbf{N}}$.

Langzeitverhalten:

1.Fall: $a > 1$

$$\lim_{t\to\infty} x_0 a^t = \begin{cases} +\infty & \text{für} \quad x_0 > 0 \\ 0 & \text{für} \quad x_0 = 0 \\ -\infty & \text{für} \quad x_0 < 0 \end{cases}$$

Das Langzeitverhalten hängt hier deutlich von der Wahl des Anfangswertes x_0 ab!

2.Fall: $-1 < a < 1$

$$\lim_{t\to\infty} x_0 a^t = 0$$

In diesem Fall konvergiert die Lösung unabhängig vom Anfangswert gegen 0.

3.Fall: $a = 1$

$$\lim_{t\to\infty} x_0 a^t = x_0.$$

Dies ist der langweiligste Fall. Der Anfangswert bleibt für alle Zeiten unverändert.

4.Fall: $a \leq -1$

Ist zusätzlich noch $x_0 \neq 0$, so divergiert die Folge.

Fixpunkt-Lösungen und ihre Stabilität

Ein Fixpunkt $x^\star$ muss die Gleichung $f(x^\star) = x^\star$ erfüllen, hier also $ax^\star = x^\star$.

1.Fall: $a \neq 1$

Der einzige Fixpunkt ist $x^\star = 0$. Die zugehörige Fixpunkt-Lösung $(0, 0, 0, \ldots)$ ist nach Definition genau dann asymptotisch stabil, wenn kleine Störungen im Lauf der Zeit weggedämpft werden. Wie der Vergleich mit dem Unterpunkt "Langzeitverhalten" zeigt, tritt diese Situation für $-1 < a < 1$ ein. Für $a > 1$ oder $a < -1$ wachsen kleine Störungen dagegen explosionsartig an, die Fixpunkt-Lösung ist dann also instabil. Ist schließlich $a = -1$, so ist die Fixpunkt-Lösung marginal stabil: eine kleine Störung ε des Fixpunktes führt hier zu einer periodischen Oszillation, bei der aufeinanderfolgende Werte von x für alle Zeiten zwischen ε und $-\varepsilon$ hin und herspringen.

2.Fall: $a = 1$

Hier ist jede reelle Zahl x ein Fixpunkt, wie wir auch schon bei der Betrachtung des Langzeitverhaltens gesehen hatten. Da *jedes* $x \in \mathbf{R}$ ein Fixpunkt ist, bleibt jede beliebige Störung für alle Zeiten erhalten. Es liegt also marginale Stabilität vor, jedoch keine asymptotische Stabilität.

6.1.2 Inhomogene Iterierte Abbildungen 1. Ordnung

Wir betrachten nun die inhomogene Iterierte Abbildung

$$x_{t+1} = ax_t + b\ . \tag{6.8}$$

Wie in Kapitel 6.1.1 können wir die Lösung von (6.8) explizit konstruieren:

$$\begin{aligned} x_1 &= ax_0 + b \\ x_2 &= a(ax_0 + b) + b \;=\; a^2x_0 + b(1+a) \\ x_3 &= a[a^2x_0 + b(1+a)] + b \;=\; a^3x_0 + b(1+a+a^2) \\ &\vdots \qquad\qquad \vdots \\ x_t &= a^tx_0 + b[1 + a + \ldots + a^{t-2} + a^{t-1}] \\ &= a^tx_0 + b\,\frac{a^t - 1}{a-1} \end{aligned} \tag{6.9}$$

wobei wir im letzten Schritt die geometrische Reihe $1 + a + \ldots + a^{t-2} + a^{t-1}$ wie in Gleichung (1.35) vereinfacht haben. Wir erhalten damit:

Die inhomogene lineare Iterierte Abbildung $x_{t+1} = ax_t + b$ hat bei vorgegebenem Anfangswert x_0 die Lösung $\left(x_0a^t + b\frac{a^t-1}{a-1}\right)_{t\in\mathbf{N}}$.

Die inhomogene lineare Iterierte Abbildung besitzt also eine kompliziertere Lösung als die zugehörige homogene Iterierte Abbildung. Beide Lösungen sind jedoch eng miteinander verwandt:

Satz (Lösung homogener und inhomogener Iterierter Abbildungen I):
Sei $(h_t)_{t\in\mathbf{N}}$ die allgemeine Lösung der homogenen Iterierten Abbildung

$$x_{t+1} = ax_t$$

und $(i_t)_{t\in\mathbf{N}}$ eine spezielle Lösung der inhomogenen Iterierten Abbildung

$$x_{t+1} = ax_t + b\ .$$

Dann ist $(z_t)_{t\in\mathbf{N}} = (h_t)_{t\in\mathbf{N}} + (i_t)_{t\in\mathbf{N}}$ die allgemeine Lösung der inhomogenen Iterierten Abbildung.

Beweis:
Wir setzen (6.5) und (6.8) in $(z_t)_{t\in\mathbf{N}} = (i_t)_{t\in\mathbf{N}} + (h_t)_{t\in\mathbf{N}}$ ein und erhalten:

$$\begin{aligned} z_{t+1} &= i_{t+1} + h_{t+1} \\ &= ai_t + b + ah_t \\ &= a(h_t + i_t) + b \\ &= az_t + b \end{aligned}$$

Damit erfüllt $(z_t)_{t\in\mathbf{N}}$ die inhomogene Gleichung (6.8). □

Kennen wir also die allgemeine Lösung der homogenen Iterierten Abbildung (6.5), so genügt es, *eine einzige* spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung zu ermitteln. Alle anderen Lösungen können dann als Summe dieser speziellen Lösung und einer Lösung der homogenen Iterierten Abbildung geschrieben werden.[5]

WICHTIG: Die allgemeine Lösung einer homogenen Iterierten Abbildung 1.Ordnung ist nicht eindeutig festgelegt, sondern hat einen freien Parameter, den wir c nennen wollen.

[5] Der enge Zusammenhang zwischen Lösungen homogener und inhomogener linearer Systeme trifft auch auf lineare Gleichungen und lineare Differentialgleichungen zu und vereinfacht das Lösen derartiger Systeme ganz erheblich. Die Omnipräsenz linearer Gleichungen in allen Naturwissenschaften ist zu einem guten Teil auf diese Eigenschaft und das Superpositionsprinzip (siehe Kapitel 6.1.1) zurückzuführen. Bei nichtlinearen Systemen sind beide nicht mehr erfüllt.

Variiert man diesen Parameter, so erhält man unterschiedliche spezielle Lösungen. Erst durch die Vorgabe einer bestimmten Anfangsbedingung x_0 wird c eindeutig festgelegt. In Abschnitt 6.1.1 trat ein Spezialfall auf: Der Parameter c war identisch mit x_0. Im Allgemeinen ist dies jedoch nicht der Fall. Wendet man deshalb den obigen Satz auf ein konkretes Anfangswertproblem an, muss der Parameter c so festgelegt werden, dass die *Gesamtlösung* die Anfangsbedingung erfüllt. Wir werden dies nun am Beispiel der Gleichung (6.8) explizit demonstrieren.

Allgemeine Lösung:

Die allgemeine Lösung der homogenen Iterierten Abbildungen (6.6) haben wir schon in Unterkapitel 6.1.1 bestimmt. Wir benötigen also "nur noch" eine spezielle Lösung x_{sp} der inhomogen Gleichung, um die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung zu erhalten. Wir versuchen, diese Lösung heuristisch zu bestimmen, machen also (ratend!) einen Ansatz, den wir anschließend verifizieren. Dies ist eine in der Mathematik oft verwendete Strategie.

Der einfachste Versuch besteht darin, für die spezielle Lösung $(x_{sp}, x_{sp}, x_{sp}, \ldots)$ eine Fixpunkt-Lösung anzusetzen. Setzen wir $f(x) = ax + b$ in die Fixpunktgleichung (6.4), erhalten wir $ax_{sp} + b = x_{sp}$ und daraus für $a \neq 1$

$$x_{sp} = \frac{b}{1-a} \ . \tag{6.10}$$

Den "pathologischen" Fall $a = 1$ wollen wir von nun an nicht weiter verfolgen. Eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung ist also $(\frac{b}{1-a}, \frac{b}{1-a}, \frac{b}{1-a}, \ldots)$ oder kurz geschrieben $\left(\frac{b}{1-a}\right)_{t\in\mathbf{N}}$.

Mit Hilfe des obigen Satzes können wir nun die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung als Summe der gefundenen speziellen Lösung und der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung (nun durch den Parameter c parametrisiert) angeben:

Die inhomogene lineare Iterierte Abbildung $x_{t+1} = ax_t + b$ hat die allgemeine Lösung

$$\left(ca^t + \frac{b}{1-a}\right)_{t\in\mathbf{N}} \ . \tag{6.11}$$

Anfangswertproblem:

Ist ein Anfangswert x_0 für die inhomogene Gleichung vorgegeben, muss der Parameter c so gewählt werden, dass die Lösung zur Zeit $t = 0$ mit diesem Anfangswert übereinstimmt. Aus Gleichung (6.11) folgt dann

$$ca^0 + \frac{b}{1-a} = x_0 \ .$$

Daraus erhalten wir $c = x_0 - \frac{b}{1-a}$ und damit schließlich aus (6.11)

$$x_t = [(x_0 - \frac{b}{1-a})a^t + \frac{b}{1-a}] = x_0 a^t + b\frac{a^t - 1}{a-1} \ .$$

Diese Lösung stimmt genau mit der durch explizite Konstruktion gefundenen Gleichung (6.9) überein. An diesem Beispiel wird auch deutlich, warum der Parameter der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung *nicht* mit x_0 identifiziert werden darf: Erst die

Summe dieser Lösung und der speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung soll ja die Anfangsbedingung erfüllen!

Langzeitverhalten:

Die Lösungen der homogenen und inhomogenen Gleichung unterscheiden sich um die Fixpunkt-Lösung $(\frac{b}{1-a}, \frac{b}{1-a}, \frac{b}{1-a}, \ldots)$. Abgesehen von dieser Verschiebung verhalten sich die Lösungen aber vollkommen identisch. Das Langzeitverhalten der inhomogenen Gleichung weist deshalb exakt die gleichen Charakteristika und Abhängigkeiten vom Parameter a wie im homogenen Fall auf. Allerdings ist zu beachten, dass wegen der Verschiebung um $\frac{b}{1-a}$ im ersten Fall ($a > 1$) nun das Langzeitverhalten nicht mehr davon abhängt, ob x_0 größer oder kleiner als Null ist, sondern ob x_0 größer oder kleiner als $x_0 = \frac{b}{1-a}$ ist. Und auch dies ist anschaulich verständlich, handelt es sich doch beim Wert Null um den Fixpunkt der homogenen, beim Wert $\frac{b}{1-a}$ um den Fixpunkt der inhomogenen Gleichung.

Wegen seiner enormen Wichtigkeit wollen wir die Kernaussage des Satzes über den Zusammenhang von Lösungen homogener und inhomogener linearer Iterierter Abbildungen abschließend noch in einer zweiten, äquivalenten Form vorstellen:

Satz (Lösung homogener und inhomogener Iterierter Abbildungen II):
Die beiden Folgen $(v_t)_{t\in\mathbf{N}}$ und $(w_t)_{t\in\mathbf{N}}$ seien Lösungen der inhomogenen linearen Iterierten Abbildung

$$x_{t+1} = ax_t + b \ .$$

Dann ist die Differenz dieser beiden Folgen, $(y_t)_{t\in\mathbf{N}} = (v_t)_{t\in\mathbf{N}} - (w_t)_{t\in\mathbf{N}}$, eine Lösung der zugehörigen homogenen linearen Iterierten Abbildung

$$x_{t+1} = ax_t \ .$$

Beweis:
Wir setzen (6.5) und (6.8) in $(y_t)_{t\in\mathbf{N}} = (v_t)_{t\in\mathbf{N}} - (w_t)_{t\in\mathbf{N}}$ ein und erhalten:

$$\begin{aligned} y_{t+1} &= v_{t+1} - w_{t+1} \\ &= [av_t + b] - [aw_t + b] \\ &= a[v_t - w_t] \\ &= ay_t \end{aligned}$$

Damit erfüllt $(y_t)_{t\in\mathbf{N}}$ die homogene Gleichung (6.5). □

6.2 Mathematik und Biologie: Populationsmodelle

6.2.1 Zellpopulation mit exponentiellem Wachstum

Annahmen: Pro Zeitschritt teile sich jede Zelle einer vorgegebenen Zellpopulation genau einmal. Weiterhin seien alle Zellen unsterblich. Gesucht ist die Anzahl der Zellen als Funktion der Zeit.

Modell: Die Anzahl der Zellen zum Zeitpunkt t sei x_t. Aus den Annahmen folgt, dass sich im nächsten Zeitschritt $t + 1$ die Anzahl der Zellen verdoppelt hat. Daraus ergibt sich die Dynamik

$$x_{t+1} = 2x_t \ . \tag{6.12}$$

Dies ist eine lineare homogene Iterierte Abbildung 1.Ordnung.

Allgemeine Lösung: Nach den Ergebnissen des vorherigen Abschnitts ist die allgemeine Lösung $(x_0 2^t)_{t\in\mathbf{N}}$. Dabei ist x_0 die Zahl der Zellen zur Zeit Null. Die Zahl der Zellen zur

Zeit t beträgt also

$$x_t = x_0 2^t \ . \tag{6.13}$$

Die Zellpopulation zeigt damit **exponentielles Wachstum**. Dieses Verhalten entspricht dem klassischen Bevölkerungsmodell von Malthus [1766-1834].

Spezielle Lösung: Zum Anfangswert $x_0 = 1$ erhält man die spezielle Lösung $(2^t)_{t\in\mathbf{N}}$. Sind dagegen zur Zeit $t = 0$ beispielsweise 5 Zellen vorhanden, so lautet die spezielle Lösung $(5 \cdot 2^t)_{t\in\mathbf{N}}$. Zum Anfangswert $x_0 = 0$ ist die spezielle Lösung die Folge, bei der alle Folgenglieder Null sind, $(0)_{t\in\mathbf{N}}$.

Langfristiges Verhalten: Beim Anfangswert Null ist die Populationsgröße für alle Zeiten Null — von nichts kommt nichts, auch keine Bakterien. Bei jedem anderen positiven Anfangswert wächst die Population sehr rasch gegen Unendlich. Wir verdeutlichen dies mit folgendem Zahlenspiel:

Die Größe eines Bakteriums liegt im Bereich eines Mikrometers (ein tausendstel Millimeter oder 10^{-6} Meter). Sein spezifisches Gewicht liegt grob geschätzt im Bereich von einem Gramm pro Kubikzentimeter, woraus eine Masse von circa 10^{-18} Kilogramm folgt. Bei einer Generationszeit von 2 Stunden würden aus einer Zelle in einem Tag $2^{12} \times 10^{-18} \approx 10^{-14}$ Kilogramm, in einer Woche circa 1000 Tonnen, und nach einem Monat 10^{68} Kilogramm Bakterien entstehen. Zum Vergleich: Die Masse der Erde beträgt weniger als 10^{25} Kilogramm...

Ab einer gewissen Populationsgröße müssen also *wachstumslimitierende Faktoren* wie ein begrenztes Nahrungsangebot ins Spiel kommen. Diese können beispielsweise durch die sogenannte *Logistische Gleichung* modelliert werden, die wir im nächsten Kapitel kennen lernen werden.

BEMERKUNG: Im hier vorgestellten Modell entsprach die dynamische Variable x der Anzahl der Bakterien und war damit eine natürliche Zahl, die sich pro Generation verdoppelt. Diesen Ansatz kann man verallgemeinern und beispielsweise die Gesamtmasse der Bakterien oder das Volumen der Population als dynamische Variable benützen, so dass x nun eine reelle Zahl ist.

BEMERKUNG: Statt der Generationszeit könnte man jedes beliebige Zeitintervall als Grundlage der experimentellen Zeitmessung wählen, und die Populationsgröße beispielsweise stündlich bestimmen. Das gemessene Populationswachstum ist dann nicht mehr durch die Gleichung $x_{t+1} = 2x_t$ gegeben, sondern durch eine Gleichung der Form $x_{\tau+1} = ax_\tau$, wobei die "+1" nun einem elementaren Messintervall (im obigen Beispiel: eine Stunde) entspricht und die Größe a von 2 abweicht — es sei denn, Generationszeit und Messintervall stimmen zufällig exakt überein. Ein Beispiel: Eine Bakterienpopulation verdopple sich alle 20 Minuten. Dieses Wachstum können wir durch die Iterierte Abbildung $x_{t+1} = 2x_t$ beschreiben, wobei ein Zeitschritt der Generationszeit 20 Minuten entspricht. Wollen wir jedoch die Zeit in Stunden messen, so müssen wir wie folgt vorgehen: Eine Stunde enthält drei Generationszeiten. Pro Generationszeit verdoppelt sich die Population, in einer Stunde verachtfacht $(8 = 2^3)$ sie sich also. Damit erhalten wir die Iterierte Abbildung $x_{\tau+1} = 8x_\tau$, wobei die "+1" nun einer Stunde entspricht.

SELBSTTEST: In einem Experiment werde die Größe einer Bakterienpopulation stündlich gemessen. Aus der Analyse der Messwerte erhält man für a den Wert 1.2. Berechnen Sie die Zeit, in der sich die Population verdoppelt.

6.2.2 Holzschlag im Wald I

Annahmen: Das Volumen x an verwertbarem Holz in einem Waldstück wachse pro Jahr um 2000m^3. Gleichzeitig verliere der Wald jährlich 40% des Holzbestandes durch

forstwirtschaftlichen Einschlag.

Modell: Die Annahmen führen zu folgender Iterierten Abbildung:

$$x_{t+1} = (1 - 0.4)x_t + 2000\text{m}^3 = 0.6x_t + 2000\text{m}^3 \tag{6.14}$$

Dies ist eine inhomogene lineare Iterierte Abbildung 1.Ordnung, entspricht also der Gleichung (6.8) mit $a = 0.6$ und $b = 2000\text{m}^3$. Siehe auch Abbildung 6.2.

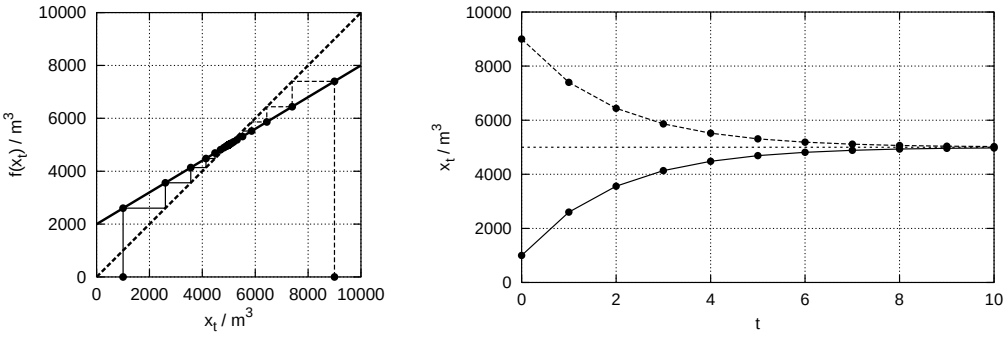


Abbildung 6.2: Holzschlag I. Links die der Iterierten Abbildung zu Grunde liegende Funktion $f(x) = 0.6x + 2000\text{m}^3$, rechts zwei Lösungen dieses Modells, wobei als Anfangswerte $x_0 = 1000$ und $x_0 = 9000$ gewählt wurden. Unabhängig vom Anfangswert erreicht das Volumen des Waldstückes eine Größe von 5000m^3, das heißt den Fixpunkt $x^\star$ der Funktion $f(x)$. Das Modellsystem ist also asymptotisch stabil. Zur Interpretation der Darstellung siehe auch Abbildung 6.1. Beachten Sie, dass hier wie auch in den nächsten Abbildungen dieses und des folgenden Kapitels die einzelnen Folgenglieder (Punkte bei $t \in \mathbf{N}$) durch Linien verbunden sind, um den Lösungsverlauf zu verdeutlichen.

Allgemeine Lösung und Anfangswertproblem: Wie in Abschnitt 6.1.2 können wir für ein vorgegebenes x_0 die Lösung explizit berechnen. Mit Gleichung (6.9) erhalten wir

$$x_t = 0.6^t x_0 + \frac{0.6^t - 1}{0.6 - 1} \cdot 2000\text{m}^3 = 5000\text{m}^3 + 0.6^t(x_0 - 5000\text{m}^3) \ .$$

Langzeitverhalten: In diesem Beispiel gilt $-1 < a = 0.6 < 1$, was dem 2.Fall in Abschnitt 6.1.1 entspricht. Daraus folgt, dass x_t für lange Zeiten gegen den Wert $\frac{b}{1-a} = 5000\text{m}^3$ läuft, und zwar unabhängig davon, wie x_0 gewählt waren. Das Volumen des Waldstückes wird sich also auf eine Größe von 5000m^3 einregulieren.

6.2.3 Holzschlag im Wald II

Annahmen: In einem zweiten Waldstück wachse die Holzmenge jährlich um 40%; gleichzeitig werden hier pro Jahr 2000m^3 Holz geschlagen.

Modell: Die Annahmen führen nun zu folgender Dynamik:

$$x_{t+1} = (1 + 0.4)x_t - 2000\text{m}^3 = 1.4x_t - 2000\text{m}^3 \tag{6.15}$$

Dies ist wieder eine inhomogene lineare Iterierte Abbildung 1.Ordnung wie (6.8), nun aber mit $a = 1.4$ und $b = -2000\text{m}^3$. Siehe auch Abbildung 6.3.

Allgemeine Lösung und Anfangswertproblem: Mit Gleichung (6.9) erhalten wir jetzt

$$x_t = 1.4^t x_0 - \frac{1.4^t - 1}{1.4 - 1} 2000\text{m}^3 = 5000\text{m}^3 + 1.4^t(x_0 - 5000\text{m}^3) \ .$$

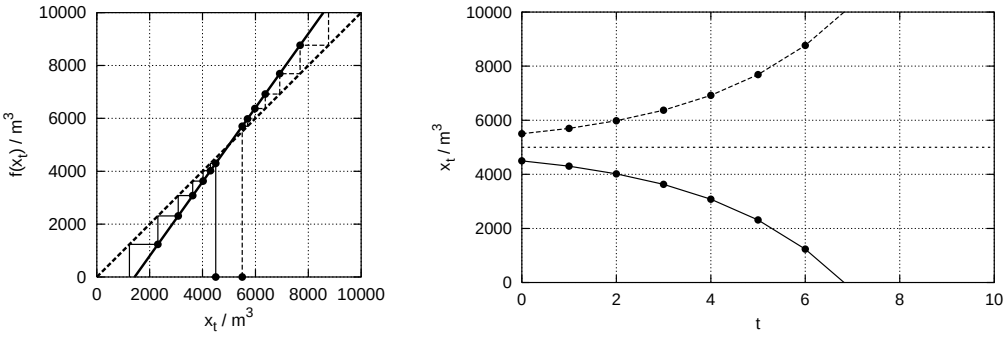


Abbildung 6.3: Holzschlag II. Links die der Iterierten Abbildung zu Grunde liegende Funktion $f(x) = 1.4x - 2000\text{m}^3$, rechts zwei Lösungen dieses Modells, wobei als Anfangswerte $x_0 = 4500$ und $x_0 = 5500$ gewählt wurden. Abgesehen von der (instabilen) Fixpunkt-Lösung zum Fixpunkt $x^\star = 5000\text{m}^3$ divergieren in diesem Modell alle Lösungen. Für Anfangswerte $x_0 < x^\star$ ergeben sich zudem negative Werte für den Holzbestand. Um biologisch sinnvoll zu sein, müßte dieses Modell durch nichtlineare Terme so ergänzt werden, dass beide Phänomene nicht mehr auftreten.

Langzeitverhalten Im zweiten Waldstück ist $a = 1.4 > 1$ (1.Fall in Abschnitt 6.1.1). Das langfristige Verhalten hängt nun explizit vom Anfangswert ab.

Für $x_0 > 5000\text{m}^3$ divergiert die Lösung gegen plus Unendlich. Der Wald wächst über alle Grenzen. In der Realität kann dies nicht geschehen. Das Modell müsste deshalb um einen wachstumslimitierenden Term erweitert werden.

Stimmt x_0 genau mit dem Fixpunkt $\frac{b}{1-a} = 5000\text{m}^3$ (6.10) überein, so bleibt x_t für alle Zeiten konstant. Der Wald behält seine Größe. Allerdings ist diese Fixpunkt-Lösung instabil und damit in (biologischer) Realität nie genau erreichbar.

Bei $x_0 < 5000\text{m}^3$ divergiert die Lösung gegen minus Unendlich. Dies zeigt eine zweite Schwäche des Modells: Das Holzvolumen kann nie negativ werden, im Modell geschieht dies aber zum Zeitpunkt $t + 1$ wenn zur Zeit t gilt: $x_t < \frac{2000}{1.4}\text{m}^3$. Dieses Problem kann jedoch leicht gelöst werden, indem man festsetzt, dass $x_{t+1} = 0$ falls $x_t < \frac{2000}{1.4}\text{m}^3$. Damit entsteht ein zweiter Fixpunkt $x^{\star\star} = 0$, die zugehörige Fixpunkt-Lösung $(0, 0, 0, \ldots)$ ist asymptotisch stabil. Diese Lösung entspricht einem vollständig abgeholzten Wald.

SELBSTTEST: Diskutieren Sie die Gemeinsamkeiten und Unterschiede der beiden Szenarien! Überlegen Sie sich weitere biologisch motivierte Beispiele und versuchen Sie, die daraus folgenden Iterierten Abbildungen zu analysieren.

6.2.4 Nochmals: Das Populationsmodell von Fibonacci

In Kapitel 4.1 wurde das Populationsmodell von Fibonacci (1170-1250) schon kurz vorgestellt. Hier wollen wir es nun im Detail diskutieren. Das Modell geht davon aus, dass neugeborene Kaninchenpaare nach dem ersten *und* dem zweiten Monat jeweils ein neues Kaninchenpaar zur Welt bringen und dann die weitere Fortpflanzung einstellen. Wir wollen diese Dynamik mathematisch beschreiben und bezeichnen dazu am zweckmäßigsten die Anzahl der im Monat t *neugeborenen* Kaninichenpaare mit x_t. Diese Anzahl entspricht *nicht* der gesamten Zahl an Paaren, die beispielsweise auch davon abhängt, wie alt die Kaninchen werden.

Ist im nullten Monat ein neugeborenes Kaninchenpaar in einem bislang von Kaninchen freien Gebiet ausgesetzt worden ($x_{-1} = 0$ und $x_0 = 1$), so wird es im ersten Monat ein weiteres Paar zur Welt bringen womit $x_1 = 1$. Im zweiten Monat wird sowohl das erste als auch das zweite Paar jeweils ein neues Kaninchenpaar zur Welt bringen, und

wir erhalten $x_2 = 2$. Im dritten Monat werden sich die im ersten und zweiten Monat neugeborenen Paare fortpflanzen, was $x_3 = 3$ ergibt. Verfolgt man diese Entwicklung, so sieht man, dass allgemein gilt:

$$x_{t+1} = x_t + x_{t-1} \ . \tag{6.16}$$

Die Folge der neugeborenen Kaninchenpaare ergibt sich damit zu

$$(1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots) \quad \text{für } x_{-1} = 0 \text{ und } x_0 = 1 \ . \tag{6.17}$$

Wie die Lösungen des Modells von Malthus (Kapitel 6.2.1) divergiert die Zahlenfolge (6.17). Für große Zeiten reflektiert damit auch das Modell von Fibonacci nicht die Wachstumsgrenzen biologischer Populationen. Im nächsten Kapitel werden wir Ansätze kennen lernen, diese Problematik zu überwinden.

Aus der Sicht dynamischer Modelle ist der Ansatz von Fibonacci eine lineare Abbildung zweiter Ordnung, da der Wert x_{t+1} gemäß (6.16) von den Werten zu *zwei* früheren Zeitpunkten abhängt, nämlich von x_t und x_{t-1}.

An dieser Stelle mögen Sie einwenden, dass x_{t+1} auch schon in den bisher betrachteten Iterierten Abbildungen sowohl von x_t als auch von x_{t-1} abhing, da x_t durch x_{t-1} bestimmt wird. Diese Abhängigkeit ist jedoch von einer anderen Natur: Bei Iterierten Abbildungen 1.Ordnung ist die Anfangsbedingung durch x_0, das heißt durch Angabe *einer* Zahl festgelegt. Nicht so bei der Dynamik von Fibonacci: Hier ist x_1 *nicht* allein durch x_0 bestimmt. Neben x_0 muss auch x_{-1} festgelegt werden, bevor man die Iterierte Abbildung (6.16) anwenden kann. Startet man beispielsweise mit der Anfangsbedingung $x_{-1} = 1$, $x_0 = 3$, erhält man die Folge

$$(4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123 \ldots). \tag{6.18}$$

Das Modell von Fibonacci weist eine Reihe interessanter Eigenschaften auf. Unter anderem nähert sich der Quotient aufeinander folgender Geburtenjahrgänge, $a_t = \frac{x_{t-1}}{x_t}$, für große t an den Wert $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ des goldenen Schnittes an. Dividiert man nämlich beide Seiten von (6.16) durch x_t, so erhält man

$$\frac{x_{t+1}}{x_t} = 1 + \frac{x_{t-1}}{x_t} \ .$$

Setzt man in diese Gleichung die Definition $a_t = x_{t-1}/x_t$ ein, so führt dies auf

$$\frac{1}{a_{t+1}} = 1 + a_t \tag{6.19}$$

oder

$$a_{t+1} = \frac{1}{1 + a_t} \ . \tag{6.20}$$

Der Grenzwert dieser Folge ist nach Gleichung (5.9) durch $\alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ gegeben. Da die Zahl der Neugeborenen immer positiv ist, ist der Grenzwert durch die positive Lösung gegeben, und wir erhalten wie behauptet den goldenen Schnitt.

BEMERKUNG: Die Iterierte Abbildung (6.20) ist im Gegensatz zum Modell von Fibonacci nur von 1.Ordnung. Diese Vereinfachung ergibt sich daraus, dass (6.20) nur Aussagen über das Verhältnis $\frac{x_t}{x_{t-1}}$ macht. Diese Gleichung stellt somit eine *reduzierte Beschreibung* des ursprünglichen Modells dar, aus der die Zahl der in jedem Jahr geborenen Kaninchen nicht mehr abgeleitet werden kann.

6.3 Aufgaben

1. (Lineare Iterierte Abbildung) Untersuchen Sie das folgende Populationsmodell, das explizit auf Geburts- und Sterbeprozesse eingeht: Die mittlere Geburtenrate pro Kopf und Generationszeit sei α, die Sterberate β. Daraus ergibt sich folgende Dynamik der Bevölkerungsgröße x_t:

$$x_{t+1} = x_t + \alpha x_t - \beta x_t \ . \tag{6.21}$$

(a) Wofür stehen die einzelnen Terme auf der rechten Seite von (6.21)? Welche Werte dürfen die Parameter α und β annehmen, damit das Modell biologisch sinnvoll ist?

(b) Geben Sie Bedingungen an die Parameter α und β an, unter denen die Bevölkerungsgröße x_t (i) wächst, (ii) konstant bleibt und (iii) ausstirbt. Was bedeutet Wachsen und Aussterben im Kontext der Monotonie von Folgen?

(c) Wie entwickelt sich die Bevölkerung für beliebige Zeiten t, wenn sie zur Zeit Null durch x_0 gegeben ist? Welche Lösung hat also die Iterierte Abbildung (6.21)?

2. (Beispiel aus der Medizin) Ein Patient erhält täglich ein Medikament mit einer festen Dosis von d mg (Milligram) und scheidet pro Tag p Prozent der im Körper angesammelten Medikamentenmenge wieder aus.

(a) Machen Sie sich klar, warum für die Medikamentenmenge x_{n+1} im Körper des Patienten am $n+1$-ten Tag gilt

$$x_{n+1} = qx_n + d \tag{6.22}$$

wobei x_n die Medikamentenmenge am n-ten Tag und $q = 1 - p/100$ ist.

(b) Warum muß in diesem Beispiel der Parameter q zwischen Null und Eins liegen und der Parameter d positiv sein, um der biologischen Realität zu entsprechen?

(c) Unter welchen Bedingungen an d und q ist die Folge x_n monoton wachsend oder fallend? Ist sie streng monoton?

(d) Welche Funktion f hat die entsprechende Iterierte Abbildung $x_{n+1} = f(x_n)$?

(e) Skizzieren Sie den Graph von f! Zeichnen Sie zusätzlich die Winkelhalbierende ein!

(f) Besitzt diese Iterierte Abbildung Fixpunkte? Wenn ja: Wie hängt ihre Größe von d und q ab? Was bedeutet das Erreichen eines Fixpunktes für die Medikamentenmenge?

(g) Welche Zeitentwicklung erwarten Sie für lange Zeiten? Diskutieren Sie diese Frage qualitativ mit Hilfe der Ergebnisse aus (f) und (g). Was bedeutet dies für den langfristige Medikamentenlevel im Körper?

3. (Beispiel aus der Fischereibiologie I) In einem großen Fischteich lebt seit längerer Zeit eine stabile Population von etwa 9000 Plötzen (*Rutilus rutilus*). Davon sind 6.2% fortpflanzungsfähig und es gibt genauso viele Männchen wie Weibchen. Jedes der geschlechtsreifen Weibchen legt im Schnitt 10 000 Eier pro Jahr ab. Davon erleben nur 0.2% das nächste Jahr. Von den Tieren, die das erste Jahr überlebt haben, gehen jedes Jahr 50% zugrunde[6].

Wir wollen aus diesen Angaben ein Modell für die Populationsgröße der Plötzen machen. Da Plötzen nur einmal im Jahr laichen, bietet es sich an, mit einer linearen Iterierte Abbildung als einfachstes Modell für die Anzahl der Plötzen x_n im Jahr n zu beginnen. Um dieses aus obigen Angaben zu entwickeln, beantworten Sie bitte folgende Fragen:

[6] 80% davon werden von Freßfeinden erbeutet, 18% verhungern, 1.999% werden geangelt und nur 0.001% sterben eines natürlichen Todes

(a) Wieviele der aus den 10 000 Eiern eines Weibchens geschlüpften Jungfische leben noch im darauffolgenden Jahr?

(b) Welcher Bruchteil der Gesamtpopulation ist überhaupt in der Lage Eier zu legen?

(c) Wie groß ist dann die Geburtenrate α (Anzahl der Nachkommen pro Tier und Jahr)? Berücksichtigen Sie das Ergebnis aus (a)! (Das Ergebnis ist $\alpha = 0.62$).

(d) Wie groß ist die Sterberate β (Anzahl der toten Tiere pro Tier und Jahr)?

(e) Geben Sie nun die Formel einer homogenen linearen Iterierten Abbildung für die Anzahl der Plötzen $x_{n+1} = f(x_n) = rx_n$ im nächsten Jahr $n + 1$ in Abhängigkeit der Populationsgröße x_n im Jahr n an! Wie groß ist also der Parameter r?

(f) Skizzieren sie den Graph der Funktion $f(x)$!

(g) Geben Sie die explizite Lösung $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ der linearen Iterierten Abbildung $x_{n+1} = f(x_n)$ für beliebige Anfangspopulationen $x_0 > 0$ an und skizzieren Sie den typischen Lösungsverlauf!

(h) Wie wird sich die Population nach dieser Formel im Laufe der Zeit entwickeln? Warum macht das biologisch keinen Sinn?

4. (Beispiel aus der Fischereibiologie II) In einem ähnlichen Teich wie in der vorherigen Aufgabe wird wesentlich intensiver geangelt. Dadurch gehen jedes Jahr zusätzlich 20% der Plötzenpopulation verloren.

(a) Wie groß ist in diesem Teich die Sterberate β?

(b) Wie wird sich unter diesen Bedingungen und unter Verwendung des linearen Modells aus der vorherigen Aufgabe die Plötzenpopulation langfristig entwickeln? Skizzieren sie wiederum den Graphen der Abbildung $f(x)$ und die Populationsgöße x_n für $x_0 = 9000$ und $n = 1, 2, \ldots 5$.

(c) Um den Fischbestand zu sichern, werden jedes Jahr d Plötzen aus einer Zucht in den Teich eingesetzt. Wie lautet nun die entsprechende lineare Iterierte Abbildung? Fertigen Sie eine Skizze des Graphen der entsprechenden Funktion $f(x)$ an und zeichnen Sie zusätzlich die Winkelhalbierende ein!

(d) Wo liegt der Fixpunkt der Abbildung aus Teilaufgabe (c)?

(e) Wieviele Fische müßten jedes Jahr durch Neubesatz dem Teich hinzugefügt werden (wie groß muß also d sein), um die Population stabil auf 9000 Tiere zu halten?

(f) Wie lautet die allgemeine Lösung der Iterierten Abbildung aus Teilaufgabe (c) und (e)? Wie entwickelt sich die Population, wenn nach einem besonders harten Winter nur $x_0 = 1000$ Tiere überlebt haben? Skizzieren Sie diese Lösung!

5. (Lineare Iterierte Abbildung) Wir betrachten eine inhomogene lineare Iterierte Abbildung vom Typ

$$x_{t+1} = ax_t + b \quad , \quad x_0 \in \mathbf{R}^+ \tag{6.23}$$

(siehe z.B. die Medikamentenaufgabe **2**, die Plötzenaufgabe **3** oder die Holzaufgaben im Skript).

(a) Wie lautet die entsprechende homogene Iterierte Abbildung?

(b) Welche allgemeine Lösung hat die homogene Iterierte Abbildung?

(c) Berechnen Sie die Fixpunkte der inhomogenen Iterierten Abbildung (6.23)!

(d) Geben Sie eine spezielle Lösung der inhomogenen Iterierten Abbildung (6.23) an!

(e) Wie lautet die allgemeine Lösung der inhomogenen Iterierten Abbildung?

(f) Berechnen Sie die Lösung der inhomogenen Iterierten Abbildung für den Anfangswert x_0.

Kapitel 7

Nichtlineare Iterierte Abbildungen

Die bisherigen *linearen* Modelle haben den Vorteil, dass ihre Lösungen systematisch bestimmt werden können. Die Modellierung von Wachstumsprozessen führt dann jedoch zu Lösungen, die rasch über alle Grenzen wachsen, was biologisch gesehen nicht haltbar ist. In linearen Modellen fehlen nämlich wachstumslimitierende Faktoren, wie sie bei begrenzten Resourcen immer auftreten müssen — vom Reagenzglas bis zum Ökosystem Erde. Um dieses Defizit zu überwinden, betrachten wir nun *nichtlineare* Modelle und studieren den Einfluss von Faktoren, die von der Populationsgröße abhängen.

Die dann einfachste Iterierte Abbildung ist die sogenannte **Logistische Gleichung**

$$x_{t+1} = f(x_t) = ax_t\left(1 - \frac{x_t}{C}\right) \qquad \text{mit } a > 0 \text{ und } C > 0\ . \tag{7.1}$$

Für sehr *kleine* Werte von x_t ($x_t \ll C$) ist der Term x_t/C viel kleiner als Eins und kann deshalb vernachlässigt werden. Wenn man aber den zweiten Term auf der rechten Seite von (7.1) streicht, erhält man die *lineare* Gleichung $x_{t+1} = ax_t$ und damit ein exponentielles Lösungsverhalten, wie in Kapitel 6 ausführlich beschrieben. Für $a > 1$ wird x damit immer mehr anwachsen, so dass in diesem Fall die Bedingung $x \ll C$ für längere Zeiten nicht erfüllt sein kann.

Bevor wir analysieren, wie sich die Lösungen für lange Zeiten entwickeln, wollen wir untersuchen, unter welchen Anforderungen an die Parameter C und a die Lösungen von (7.1) überhaupt biologisch sinnvoll sind. Da x die Größe einer Population modellieren soll, muss $x_t \geq 0$ gelten – sowohl für die Anfangsbedingung x_0 zur Zeit $t = 0$ als auch für alle weiteren Zeitschritte. Ist dies für alle $a > 0$ und $C > 0$ gewährleistet?

Ein Blick auf (7.1) zeigt, dass x_{t+1} *negativ* ist, wenn im vorangegangenen Zeitschritt $x_t > C$ gilt. Eine negative Populationsgröße ist jedoch biologisch nicht sinnvoll. Wir müssen also versuchen, diese Situation auszuschließen. Anders ausgedrückt: Wir müssen erreichen, dass für beliebige Populationsgrößen x_t im Intervall $[0, C]$ auch der Wert x_{t+1} im Interval $[0, C]$ liegt. Dies wird dann der Fall sein, wenn das Maximum von f den Wert C nicht überschreitet.

Die Funktion f ist eine nach unten geöffnete Parabel, die die Abszisse in den Punkten $(0, 0)$ und $(C, 0)$ schneidet und deren Scheitel im Punkt $(C/2, aC/4)$ liegt. Falls wir also den Wert des Parameters a zwischen 0 und 4 wählen, wird die Größe der Population das Intervall $[0, C]$ nie verlassen. Von nun an verwenden wir deshalb immer Parameterwerte für a im Intervall $0 < a \leq 4$.

Welche Rolle spielt der Parameter C?

Dividieren wir beide Seiten von Gleichung (7.1) durch C so erhalten wir

$$\frac{x_{t+1}}{C} = a\frac{x_t}{C}\left(1 - \frac{x_t}{C}\right) \ . \tag{7.2}$$

Definieren wir nun $y_t = x_t/C$, so erfüllt y_t die Gleichung $y_{t+1} = ay_t(1 - y_t)$. Messen wir also die Größe der Population nicht über x_t als "Zahl der Individuen" oder "Gesamtmasse der Population", sondern über $y_t = x_t/C$ als "Bruchteil der maximal zulässigen Populationsgröße C", so erhalten wir eine Gleichung, in der C *nicht mehr auftaucht.* Die Größe C erscheint also in Gleichung (7.1) als reiner **Skalierungsfaktor**, ohne die Lösungsvielfalt in irgendeiner Weise zu beeinflussen.[1]

Wir können deshalb von nun an ohne jede Einschränkung der Allgemeinheit $C = 1$ setzen. Dagegen beeinflusst der Wert von a das Lösungsverhalten ganz erheblich, wie wir in Kürze sehen werden.

Mit diesen Vorüberlegungen erhalten wir für $C = 1$ die Standardform der Logistischen Gleichung,

$$x_{t+1} = ax_t(1 - x_t) \qquad \text{mit } 0 < a \leq 4 \ . \tag{7.3}$$

Das Lösungsverhalten für kleine x haben wir schon diskutiert. Was aber geschieht, wenn die Näherung $x \ll 1$ nicht mehr zutrifft?

Um diese Frage zu beantworten, wollen wir zuerst klären, ob (7.1) Fixpunkt-Lösungen aufweist und suchen deshalb nach Lösungen der Gleichung $x = ax(1 - x)$. Diese quadratische Gleichung hat zwei Lösungen. Die erste ist der triviale Fixpunkt $x^\star = 0$, der einer ausgestorbenen Population entspricht. Der zweite Fixpunkt ist

$$x^{\star\star} = 1 - \frac{1}{a} \ . \tag{7.4}$$

Für $a > 1$ gilt $x^{\star\star} > 0$.[2] Die entsprechende Fixpunkt-Lösung der Logistischen Gleichung (7.3) repräsentiert eine konstante Population. Die Größe dieser Gleichgewichtspopulation hängt dabei vom gewählten Wert a ab: Je größer a ist, umso größer ist nach (7.4) auch $x^{\star\star}$, wobei $0 \leq x^{\star\star} \leq 3/4$ gilt.

[1] Um Mißverständnisse zu vermeiden: Bei vorgegebenem Anfangswert x_0 hängt die Lösung (x_t) durchaus von C ab. Betrachten wir jedoch alle möglichen Lösungen, so ändern sie sich bis auf eine Umskalierung nicht, wenn man C durch einen anderen Wert $\tilde{C}$ ersetzt.

Diese erstaunliche Eigenschaft verdeutlicht auch folgende Überlegung: Wir vergleichen zwei durch Gleichungen der Form (7.1) beschriebene Modellpopulationen, wobei der Wert des Parameters C in beiden Fällen unterschiedlich sei, was wir dadurch vermerken wollen, dass wir den Parameter im zweiten Modell mit $\tilde{C}$ bezeichnen. Bei vorgegebener Anfangsbedingung x_0 wird sich dann die erste Population gemäß Gleichung (7.1) entwickeln und zu einer gewissen Lösung (x_t) führen. Existiert im durch $\tilde{C}$ beschriebenen *zweiten* Modell eine zur Lösung (x_t) des *ersten* Modells ähnliche Lösung? Die Antwort ist überraschend: Wählen wir nämlich für das zweite Modell als Anfangsbedingung $\tilde{x}_0$ den Wert $\tilde{x}_0 = x_0 \cdot \tilde{C}/C$, so gilt nach (7.2) auch für alle weiteren Zeiten $\tilde{x}_t = x_t \cdot \tilde{C}/C$. Die Lösungen beider Systeme sind also exakt proportional zueinander!

Mit den vorangegangenen Überlegungen wird deutlich, dass dynamische Systeme oft in ihrer Gestalt vereinfacht werden können, ohne dass sich dabei das Lösungsverhalten ändert. Dies kann meist dadurch erreicht werden, dass man eine dimensionsbehaftete dynamische Variable durch eine geeignete Kombination von Parametern der Bewegungsgleichung so dividiert, dass eine dimensionslose Variable entsteht. (Genau diese Überlegung liegt auch der Definition der dimensionslosen Variable y zugrunde.) Dabei ist es manchmal sogar möglich, allein aus der Form der Bewegungsgleichung auf die allgemeine Struktur der Lösungen zu schließen. So können beispielsweise die drei Keplerschen Gesetze der Planetenbewegung ohne explizite Lösung der Bewegungsgleichungen allein schon aus der Beobachtung abgeleitet werden, dass die Gravitationskraft eine Zentralkraft ist, deren Stärke umgekehrt proportional zum Abstandsquadrat abnimmt. Damit sind dann sogar *quantitative* Aussagen wie im Dritten Keplerschen Gesetz möglich: "Die Kuben der großen Halbachsen von Planetenbahnen verhalten sich wie die Quadrate ihrer Umlaufszeiten."

[2] Für $a < 1$ gilt $x^{\star\star} < 0$. Der Fixpunkt ist nun negativ. Er wird jedoch unter den biologisch sinnvollen Bedingungen ($0 < a \leq 4$ und $0 \leq x_0 \leq 1$) nicht erreicht, da x_t wie oben gezeigt nie negativ werden kann.

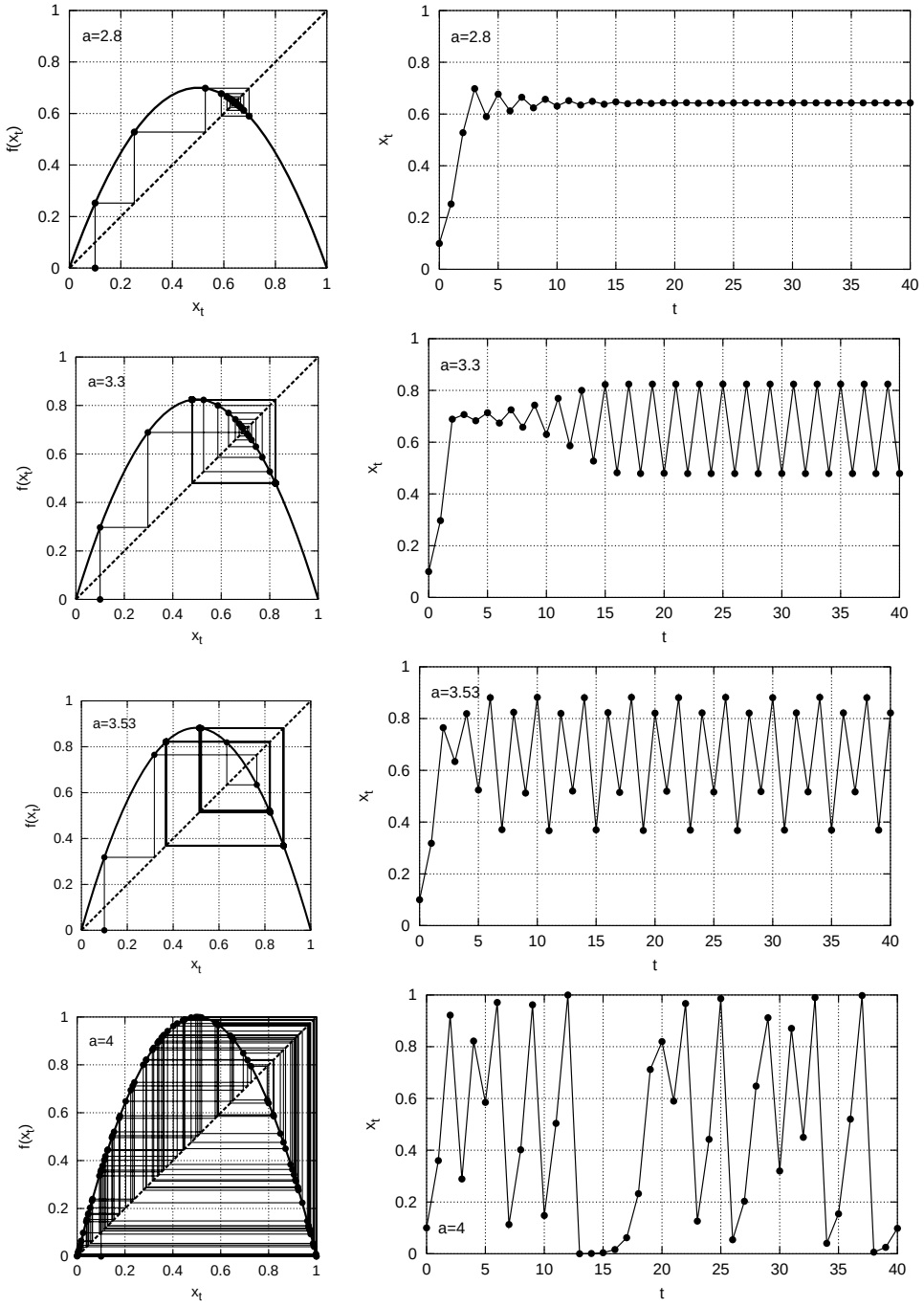


Abbildung 7.1: Lösungen der Logistischen Gleichung $x_{t+1} = ax_t(1 - x_t)$ für verschiedene Werte des Parameters a. Links ist jeweils der Graph der zu Grunde liegenden Funktion $f(x) = ax(1-x)$ dargestellt, zusammen mit der Winkelhalbierenden $y = x$. Die Schnittpunkte des Graphen von f und der Winkelhalbierenden entsprechen den Fixpunkten der Funktion. Siehe auch Gleichung (6.4). Rechts sind die entsprechenden Lösungen der Logistischen Gleichung abgebildet. An der Stelle $a = 3$ wird die Fixpunkt-Lösung instabil. Für $a > 3$ treten periodische Lösungen auf. Die Periode dieser Lösungen wächst rasch mit a bis das System schließlich bei $a \approx 3.57$ einen chaotischen Zustand erreicht.

Für die Stabilität der Fixpunkt-Lösung $(0, 0, 0, \ldots)$ gilt wie im linearen Fall (siehe Kapitel 6.1.1): für $0 \leq a < 1$ ist $x^\star = 0$ asymptotisch stabil, für $a > 1$ ist $x^\star = 0$ instabil. Untersucht man die Stabilität der Fixpunkt-Lösung $(x^{\star\star}, x^{\star\star}, x^{\star\star}, \ldots)$, so stellt man fest, dass diese Lösung nur für $1 < a < 3$ asymptotisch stabil ist, für $a > 3$ ist sie dagegen instabil. Dieses Ergebnis erhält man aus der Betrachtung der Steigung der Funktion $f(x) = ax(1 - x)$ am Fixpunkt $x^{\star\star}$. Ist der Betrag der Steigung kleiner als eins, so werden kleine Störungen der Fixpunkt-Lösung der Iterierten Abbildung weggedämpft — die Fixpunkt-Lösung ist damit nach Definition (siehe Kapitel 6) asymptotisch stabil. Ist der Betrag der Steigung größer als eins, so wachsen die Störungen — die Fixpunkt-Lösung ist instabil (ohne Beweis).

Welche Lösungen zeigt die Logistische Gleichung für $3 < a \leq 4$? In diesem Bereich des Parameters a sind einerseits beide Fixpunkte instabil, umgekehrt kann x_t nach unserer allgemeinen Betrachtung auch für beliebig große Zeiten das Interval $[0, 1]$ nicht verlassen. Zusammengenommen bedeuten beide Resultate, dass neben den beiden nun instabilen Fixpunkt-Lösungen auch Lösungen mit interessanter Zeitabhängigkeit existieren müssen. Die einfachsten derartigen Lösungen sind **periodische Lösungen**, das heißt Folgen $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$, bei denen $x_{n+P} = x_n$ für alle $n \in \mathbf{N}$ gilt, wobei $P \in \mathbf{N}$ die Periode der Oszillation bezeichnet.

Mit Hilfe einer Computersimulation von (7.3) erkennt man rasch, dass die Logistische Gleichung für $a > 3$ periodische Lösungen besitzt (siehe auch Abbildung 7.1). Erhöht man a über den Wert $a = 3$, tritt dabei als erstes eine Lösung mit Periode 2 auf. Hier springt x_t zwischen den zwei Werten x_1 und x_2 hin und her. Biologisch interpretiert bedeutet dies, dass die Populationsgröße zyklisch ansteigt und abfällt. Liegt die Populationsgröße zu einem bestimmten Zeitpunkt bei dem kleineren Wert x_1, so überwiegen anschliessend die Wachstumsprozesse und die Population vergrößert sich. Im nächsten Zeitschritt erreicht sie am Wert x_2 jedoch eine Situation, in der die Resourcen pro Individuum geschrumpft sind, so dass die Population im übernächsten Zeitschritt wieder abnimmt. Und so weiter. Störungen dieser periodischen Lösung verkleinern sich im Lauf der Zeit, so dass für lange Zeiten wieder die ursprüngliche Oszillation erreicht wird — die Lösung ist also asymptotisch stabil.

Notiz: Eine asymptotisch stabile, periodische Lösung wird auch **Grenzzyklus** genannt.

Vergrößert man den Wert von a leicht, so ändert sich zwar die Lage der beiden Werte x_1 und x_2, die Stabilität der Lösung bleibt jedoch erhalten. Wählt man für a dagegen einen Wert $a > 1 + \sqrt{6} \approx 3.449$, so wird die Lösung instabil. Dafür existiert nun eine asymptotisch stabile periodische Lösung mit Periode 4. Bei weiterer Erhöhung des Parameters wird diese Lösung wiederum instabil und eine neue Lösung mit Periode 8 erscheint. Und so weiter. Dieses Phänomen wird **Periodenverdopplung** genannt.

Ab einem gewissen Wert von a treten **chaotische Lösungen** auf. Beliebig kleine Variationen im Anfangswert x_0 führen hier zu rasch auseinanderlaufenden Lösungen. Angewendet auf physikalische oder biologische Fragen bedeutet dies, dass man das Verhalten eines chaotisches Systems bei gegebenem Anfangswert nur über einen relativ kurzen Zeitraum vorhersagen kann, da die Bestimmung des Anfangswertes x_0 immer mit einem nichtverschwindenden Messfehler verbunden ist.

Nichtlinearitäten können also selbst in ansonsten extrem einfachen mathematischen Modellen zu höchst unerwartetem und überaus reichhaltigem Verhalten führen — "simple models with complex dynamics" (R. May, 1975). Da biologische Systeme Nichtlinearitäten beinhalten müssen, um ihre gewünschte Funktion überhaupt ausführen zu können,

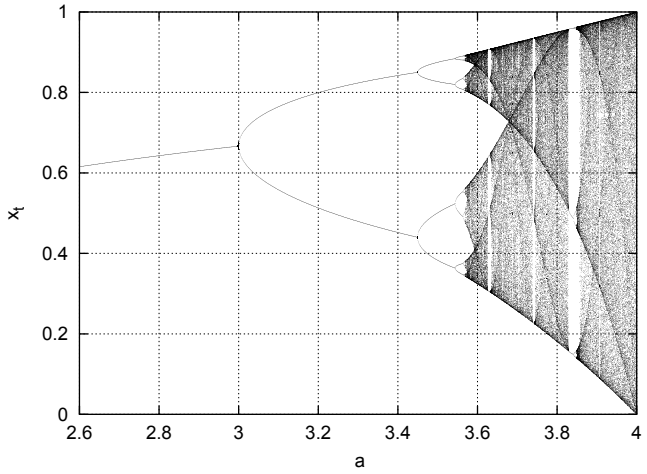


Abbildung 7.2: Periodenverdopplung. Für jeden Wert des Parameters a der Logistischen Gleichung $x_{t+1} = ax_t(1-x_t)$ sind die Werte der asymptotisch stabilen Lösung aufgetragen. Für $a < 3$ hat die Logistische Gleichung nur einen Fixpunkt. Deshalb zeigt die Abbildung in diesem Bereich nur einen Wert. An der Stelle $a = 3$ tritt die erste periodische Lösung auf. Sie hat Periode 2 wie aus den zwei übereinanderliegenden Werten ersichtlich ist. An der Stelle $a = 1 + \sqrt{6} \approx 3.449$ wird diese Lösung instabil und es entsteht eine Lösung mit Periode 4. Dies ist in der Abbildung daran ersichtlich, dass nun vier übereinanderliegende Werte existieren. Vergrößert man a, so zeigt das System weitere Periodenverdopplungen, wobei der Abstand bis zur jeweils nächsten Verdopplung rasch abnimmt. An der Stelle $a \approx 3.57$ wird erstmals ein chaotischer Zustand erreicht. Für noch höhere Werte von a treten Lösungen mit ungerader Periode auf, die wiederum über Periodenverdopplungskaskaden ins Chaos führen.

spielt das Studium komplexer dynamischer Vorgänge, oft auch unter dem Namen "Nichtlineare Dynamik" zusammengefasst, eine zunehmend wichtige Rolle in der Biologie.

7.1 Aufgaben

1. (Beispiel aus der Fischereibiologie III) In der Aufgabe 3 des vorherigen Kapitels haben Sie gesehen, dass die lineare Iterierte Abbildung als Modell für die Populationsgröße der Plötzen nicht die tatsächliche Situation einer stabilen Populationsgröße beschreibt. Ein Modell, daß die Probleme bei zu großen Individuenzahlen berücksichtigt, ist die Logistische Abbildung $x_{n+1} = rx_n(1-x_n/C)$. Zusätzlich zu dem linearen Modell $x_{n+1} = rx_n$ kommt hier also noch der Faktor $1 - x_n/C$ mit einem weiteren Parameter C hinzu. Der Parameter r wurde bereits im vorigen Kapitel in der Aufgabe 2 berechnet und ist gleich 1.12 .

(a) Berechnen sie für beliebige $r \in (0; 4]$ und $C > 0$ die Fixpunkte der logistischen Abbildung!

(b) Wie groß muss der Parameter C sein, damit die Logistische Abbildung für den speziellen Wert von $r = 1.12$ eine stabile Population vom 9000 Tieren reproduziert?

(c) Es sei nun $r = 3.2$, $C = 1$ und $x_0 = 0.8$. Berechnen Sie die ersten sechs Werte der Logistischen Abbildung und tragen sie diese in ein Achsenkreuz ein. Was fällt ihnen auf?

Kapitel 8

Grenzwerte von Funktionen und Stetigkeit

In Kapitel 5 wurde der Begriff Grenzwert eingeführt, um Fragen zum asymptotischen Verhalten von Folgen und Reihen analysieren zu können.

Beim Studium reeller Funktionen $y = f(x)$ ist man oft am Verhalten von $f(x)$ in der Nähe eines (vorher ausgewählten) Punktes x_0 interessiert: Wie verhält sich beispielsweise die Funktion $f(x) = x^2$ in der Nähe von $x_0 = 1$?

Auf den ersten Blick haben diese beide Fragestellungen nichts miteinander zu tun — im ersten Fall interessiert man sich für das Verhalten einer Folge (a_n) für n gegen Unendlich, im zweiten Fall für das *lokale* Verhalten einer reellen Funktion. Mit einem kleinen Trick gelingt es jedoch, die Kenntnisse über Grenzwerte von Folgen direkt für die lokale Untersuchung von reellen Funktionen zu verwenden. Dieses Vorgehen ist typisch für den systematischen Aufbau mathematischer Konzepte und wird im folgenden Kapitel im Detail vorgestellt.

Ausblick: Mit Hilfe des Grenzwertbegriffs für reelle Funktionen werden wir in Kapitel 9 in der Lage sein, das Konzept "Differentialquotient" einzuführen, und damit einen der wichtigsten Begriffe der gesamten Mathematik und Naturwissenschaft der Neuzeit. Ohne diesen Begriff könnten wir nicht sinnvoll über die momentane Geschwindigkeit oder Beschleunigung eines Körpers sprechen, geschweige denn die Dynamik biologischer Systeme mit Differentialgleichungen beschreiben...

8.1 Grenzwerte reeller Funktionen

8.1.1 Definitionen

VORBEMERKUNG: Bisher wurde das Symbol x_0 zur Bezeichnung des Anfangswertes einer Iterierten Abbildung verwendet. In diesem und späteren Kapiteln werden wir Funktionen an einer bestimmten Stelle ihres Definitionsbereichs betrachten. Wir folgen dabei der üblichen Notation und bezeichnen diese ausgezeichnete Stelle ebenfalls mit x_0. Die beiden Bedeutungen des Symbols x_0 dürfen nicht verwechselt werden. Aus dem Zusammenhang sollte jedoch die jeweilige Bedeutung eindeutig hervorgehen.

Definition (Grenzwert einer Funktion an der Stelle x_0):
Sie $M \subset \mathbf{R}$. Die Funktion $f : M \to \mathbf{R}$ besitzt genau dann den **Grenzwert z an der Stelle** x_0 wenn für *jede* Folge $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ aus dem Definitionsbereich M von f, für die $x_n \neq x_0$ für alle n erfüllt ist, gilt:

$$\text{Aus} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \quad \text{folgt} \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = z \ . \tag{8.1}$$

Existiert der Grenzwert, so schreibt man auch

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = z \ . \tag{8.2}$$

Dabei ist $x_0 \in \mathbf{R}$ und $-\infty \leq z \leq +\infty$.

Anschaulich bedeutet die Definition des Grenzwertes, dass bei beliebiger Annäherung von x an x_0 die Differenz $f(x) - z$ verschwindend klein wird. Dabei wird allerdings *nicht* vorausgesetzt, dass $f(x_0) = z$ gilt.

Der Prozess der Annäherung selbst wird hier als sukzessive Bewegung aufgefaßt, bei der sich x_n mit wachsendem Index n immer näher zu x_0 hinbewegt. Dies entspricht genau dem Grenzwertkonzept bei Folgen.

BEISPIEL: **Die Funktion $f(x) = x$:**

Wir betrachten die Funktion $f(x) = x$. Jedes Glied x_k jeder denkbaren Folge $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ erfüllt auf triviale Weise $x_k = f(x_k)$ — beide Größen sind ja identisch. Nach Definition existiert dann der Grenzwert von f für alle $x_0 \in \mathbf{R}$ und es gilt:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} x = x_0$$

Nach dem gleichen Schema könnten wir nun beliebige Funktionen Fall für Fall mit Hilfe der obigen Definition auf die Existenz von Grenzwerten hin untersuchen. Diese Analyse kann jedoch viel einfacher mit Hilfe allgemeiner Rechenregeln erreicht werden, die wir in Abschnitt 8.1.2 aufführen.

WICHTIG: In die Definition des Grenzwertes der Funktion f an der Stelle x_0 geht der Funktionswert $f(x_0)$ *nicht* ein. Eine Funktion kann deshalb einen Grenzwert an der Stelle x_0 haben, selbst wenn sie an dieser Stelle springt (Beispiel 1) oder x_0 gar nicht im Definitionsbereich der Funktion liegt (Beispiel 2). Schließlich muss eine Funktion an einer bestimmten Stelle nicht unbedingt einen Grenzwert aufweisen (Beispiel 3).

BEISPIEL 1: **Eine Funktion, bei der Grenzwert und Funktionswert an der Stelle $x_0 = 0$ nicht übereinstimmen.**

Die Funktion f sei durch $f(x) = 0$ für alle $x \neq 0$ und $f(0) = 1$ definiert. Dann gilt nach der Definition des Grenzwertes $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. Der Funktionswert an dieser Stelle ist jedoch $f(0) = 1$. (Siehe auch Abbildung 8.1).

BEISPIEL 2: **Grenzwert einer Funktion, die an der Stelle $x_0 = 0$ nicht definiert ist.**

Für die Funktion $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}, x \mapsto x^{-1}$ gilt $\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$, da für jede Folge (x_n) mit $x_n \in \mathbf{R}^+$ und $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ gilt: $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \infty$. Der Wert $x = 0$ selbst liegt jedoch *nicht* im Definitionsgebiet der Funktion.

BEISPIEL 3: **Die Signumfunktion — eine Funktion, die an der Stelle $x_0 = 0$ keinen Grenzwert hat.**

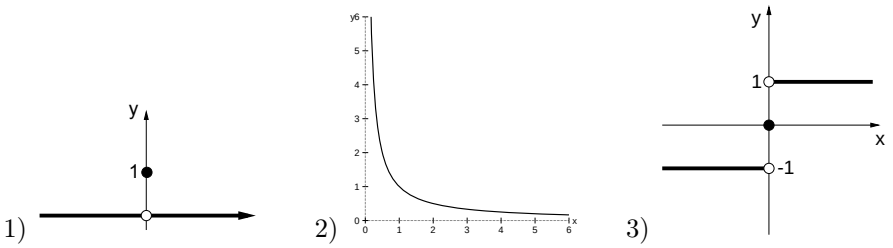


Abbildung 8.1: Darstellung der Funktionen der Beispiele 1 bis 3.

Wir definieren die Funktion $\operatorname{sign}(x)$ auf ganz $\mathbf{R}$ durch:

$$\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} +1 & \text{für} \quad x > 0 \\ 0 & \text{für} \quad x = 0 \\ -1 & \text{für} \quad x < 0 \end{cases}$$

Diese Funktion ordnet jeder reellen Zahl x ihr Vorzeichen zu und wird deshalb **Signumfunktion** genannt.

Die Signumfunktion hat *keinen* Grenzwert an der Stelle $x_0 = 0$.

Beweis:

Sei $x_n = \frac{1}{n}$ und $y_n = -\frac{1}{n}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \operatorname{sign}(x_n) &= \lim_{n\to\infty} \operatorname{sign}\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \operatorname{sign}(y_n) &= \lim_{n\to\infty} \operatorname{sign}\left(-\frac{1}{n}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} (-1) \\ &= -1 \end{aligned}$$

Die Folgen $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ und $\left(-\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ konvergieren beide gegen 0. Die Folgen der Funktionswerte $\left(\operatorname{sign}\left(\frac{1}{n}\right)\right)_{n\in\mathbf{N}}$ und $\left(\operatorname{sign}\left(-\frac{1}{n}\right)\right)_{n\in\mathbf{N}}$ konvergieren jedoch gegen unterschiedliche Werte, nämlich 1 und -1. Damit sind die Vorrausetzungen der Definition (8.1) nicht erfüllt. Die Funktion $\operatorname{sign}(x)$ hat deshalb an der Stelle 0 keinen Grenzwert.

Falls für die Werte x_n aller Folgen immer $x_n < x_0$ gilt, man sich also von links an die Stelle x_0 'herantastet', spricht man vom **linksseitigen Grenzwert** und schreibt $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$. Falls immer $x > x_0$ gilt, spricht man vom **rechtsseitigen Grenzwert** und schreibt $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$.

Ein wichtiges Beispiel, bei dem links- und rechtsseitiger Grenzwert nicht übereinstimmen ist die Signumfunktion (siehe oben). Der linksseitige Grenzwert an der Stelle $x = 0$ ist -1, der rechtsseitige ist 1. Der Grenzwert der Funktion f an der Stelle $x_0 = 0$ existiert aber nicht, wie schon oben gezeigt.

Allgemein gilt jedoch folgende Aussage:

Satz:
Wenn der Grenzwert einer Funktion f an der Stelle x_0 existiert, dann existieren auch der links- und rechtsseitige Grenzwert an dieser Stelle und alle drei Grenzwerte sind identisch.
Weiterhin gilt: Falls der links- und rechtsseitige Grenzwert einer Funktion f an der Stelle x_0 existiert und beide Grenzwerte übereinstimmen, so existiert auch der Grenzwert der Funktion an dieser Stelle.

Der Beweis folgt direkt aus der Definition der drei Grenzwertbegriffe.

In Kapitel 3.3 ist darauf hingewiesen worden, dass Potenzfunktionen x^n mit negativen Exponenten n in der Nähe der Stelle $x_0 = 0$ betragsmäßig beliebig groß werden. Dieses Phänomen wird mit dem Begriff "Polstelle" bezeichnet. Wächst eine *beliebige* Funktion an einer Stelle x_0 über alle Grenzen, so bezeichnet man dies als eine Singularität:

Definition (Singularität):
Eine Funktion f heißt **singulär** an der Stelle $-\infty < x_0 < \infty$, wenn

$$\lim_{x \to x_0} |f(x)| = +\infty \; . \tag{8.3}$$

8.1.2 Rechenregeln

Der Begriff des Grenzwertes einer Funktion wurde definiert, indem man ihn auf den Begriff des Grenzwerts einer Folge zurückführte. Aus den Rechenregeln (5.4)-(5.8) erhalten wir deshalb:

Rechenregeln für Grenzwerte von Funktionen:
Sei $x_0 \in \mathbf{R}$. Ferner sollen alle jeweils rechts der Gleichheitszeichen stehenden Grenzwerte existieren und endlich sein. Dann gilt:

Konstanter Faktor :
$$\lim_{x \to x_0} a f(x) = a \lim_{x \to x_0} f(x) \quad \text{für alle } a \in \mathbf{R} \tag{8.4}$$

Summe :
$$\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x) \tag{8.5}$$

Produkt :
$$\lim_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x) \tag{8.6}$$

Quotient :
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{h(x)} = \frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} h(x)} \quad \text{falls } \lim_{x \to x_0} h(x) \neq 0 \tag{8.7}$$

Betrag :
$$\lim_{x \to x_0} (|f(x)|) = |\lim_{x \to x_0} (f(x))| \tag{8.8}$$

BEISPIEL 1: **Anwendung — Multiplikation mit einem konstanten Faktor:**

Sei $f(x) = 5x$. Dann gilt für alle $x_0 \in \mathbf{R}$:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to x_0} f(x) &= \lim_{x\to x_0} 5x \\ &= 5 \lim_{x\to x_0} x \\ &= 5x_0 \end{aligned}$$

BEISPIEL 2: **Anwendung — Produktregel:**

Sei $f(x) = x^2$. Dann gilt für alle $x_0 \in \mathbf{R}$:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to x_0} f(x) &= \lim_{x\to x_0} x^2 \\ &= \lim_{x\to x_0} x \cdot \lim_{x\to x_0} x \\ &= x_0^2 \end{aligned}$$

Verallgemeinert man diese beiden Beispiele, so sieht man, dass für alle Potenzfunktionen $f(x) = x^n$ (falls $n \leq 0$ allerdings nur für $x_0 \neq 0$) und für alle reellwertigen Polynome $f(x) = \sum_{\mu=0}^{n} a_\mu x^\mu$ ($\mu \in \mathbf{N}$, $a_\mu \in \mathbf{R}$) gilt: $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existiert mit $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. All diese Funktionen weisen also wohldefinierte Grenzwerte auf.

8.1.3 Grenzwert von $f(x)$ für x gegen ∞ und $-\infty$

Mit Hilfe des Grenzwertbegriffes für Folgen kann man auch das Verhalten reeller Funktionen für große Argumente behandeln. Dazu legt man wie beim Grenzwert an einer endlichen Stelle x_0 fest:

Definition:
Die Funktion f hat für x gegen Unendlich den Grenzwert z, wenn für *jede* reellwertige Folge (x_n), für die $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ gilt, die Bedingung

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = z \tag{8.9}$$

erfüllt ist. Man schreibt dann auch

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = z\ . \tag{8.10}$$

BEMERKUNG: In gleicher Weise wird der Grenzwert von $f(x)$ für x gegen minus Unendlich definiert.

BEMERKUNG: Die Rechenregeln (8.4) - (8.8) treffen entsprechend auch für $\lim_{x\to\infty} f(x)$ und $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ zu.

BEISPIEL:

Für $a \neq 0$, $b \neq 0$ und $c \neq 0$ gilt:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{ax}{bx+c} = \lim_{x\to\infty} \frac{a}{b + c\cdot x^{-1}} = \frac{a}{b + c\cdot \lim_{x\to\infty} x^{-1}} = \frac{a}{b + c\cdot 0} = \frac{a}{b} \tag{8.11}$$

8.2 Stetigkeit

Anschaulich versteht man unter einer stetigen Funktion f eine Funktion, deren Graph ohne Absetzen gezeichnet werden kann. Eine stetige Funktion macht also keine Sprünge. Mathematisch definiert man Stetigkeit mit Hilfe des Grenzwertes einer Funktion:

Definition (Stetigkeit):
Sei $M \subset \mathbf{R}$. Man nennt eine Funktion $f : M \to \mathbf{R}$ **stetig an der Stelle** $\mathbf{x}_0$, wenn der Grenzwert an der Stelle $x_0 \in M$ existiert und mit dem Funktionswert $f(x_0)$ übereinstimmt, das heißt wenn

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \ . \tag{8.12}$$

Ansonsten heißt f **unstetig an der Stelle** x_0.
Eine Funktion heißt **stetig auf M**, wenn sie für alle x_0 aus dem Definitionsgebiet M stetig ist.
Ist f auf ganz $\mathbf{R}$ stetig, so sagt man auch kurz: **f ist stetig**.

Aus den Rechenregeln für Grenzwerte von Funktionen ergeben sich die folgenden

Rechenregeln für stetige Funktionen:
Seien $f, g : M \to \mathbf{R}$ in x_0 stetige Funktionen. Dann gilt für alle $a \in \mathbf{R}$:

Konstanter Faktor :	af ist an der Stelle x_0 stetig.	(8.13)
Summe :	$f + g$ ist an der Stelle x_0 stetig.	(8.14)
Produkt :	$f \cdot g$ ist an der Stelle x_0 stetig.	(8.15)
Quotient :	$\frac{f}{g}$ ist an der Stelle x_0 stetig, falls $g(x_0) \neq 0$.	(8.16)
Komposition :	$g \circ f$ ist an der Stelle x_0 stetig, falls $f(x)$ an der Stelle $x = x_0$ stetig ist und $g(z)$an der Stelle $z = f(x_0)$ stetig ist.	(8.17)

Beweis von (8.13) – (8.17):
Die ersten vier Aussagen folgen direkt aus den Rechenregeln für Grenzwerte (8.4) – (8.7). Wir beweisen deshalb nur die fünfte Aussage.
In Kapitel 1 wurde die *Komposition* $g \circ f$ zweier reeller Funktionen f und g als Hintereinanderausführung $x \mapsto g(f(x))$ eingeführt. Unter den in (8.17) genannten Voraussetzungen gilt dann:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} (g \circ f)(x) &= \lim_{x \to x_0} g(f(x)) \\ &= g(\lim_{x \to x_0} f(x)) \\ &= g(f(\lim_{x \to x_0} x)) \\ &= g(f(x_0)) \\ &= (g \circ f)(x_0) \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, dass die Funktion $g \circ f$ stetig ist. □

BEISPIEL 1: **Anwendung der Produktregel:**

Die **Potenzfunktion** $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, x \mapsto x^k$ ist für alle $k \in \mathbf{N}$ stetig.

Dies sieht man folgendermaßen: Wir wissen, dass die Funktion $f(x) = x$ stetig ist.
Einmaliges Anwenden der Produktregel ergibt, dass $f(x) = x^2$ stetig ist.
Nochmaliges Anwenden der Produktregel ergibt, dass $f(x) = x^3$ stetig ist.
So erhält man nach $k-$maligem Anwenden der Produktregel, dass $f(x) = x^k$ stetig ist. □

BEISPIEL 2: **Konstanter Faktor:**

Nach Beispiel 1 sind die Potenzfunktionen $f(x) = x^k$ für alle $k \in \mathbf{N}$ stetig. Die Regel über konstante Faktoren (8.4) ergibt dann, dass auch die Funktionen $f(x) = ax^k$ für alle $a \in \mathbf{R}$ stetig sind.

BEISPIEL 3: **Anwendung der Summenregel:**

Zusammen mit den letzten beiden Beispielen folgt aus der Summenregel, dass jedes **Polynom** $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ mit $a_k \in \mathbf{R}$ stetig ist.

BEISPIEL 4: **Stetigkeit der Betragsfunktion:**

Die Betragsfunktion $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, x \mapsto |x|$ ist trotz ihres Knicks bei $x_0 = 0$ stetig. Anschaulich ist die Stetigkeit dadurch gegeben, dass man die Betragsfunktion ohne Absetzen zeichnen kann. Der ausführliche Beweis ist zur Übung empfohlen.

8.2.1 Sätze über stetige Funktionen

In diesem Abschnitt geben wir drei anschaulich sofort einsichtige Sätze an.

Der Nullstellensatz von Bolzano besagt, dass der Graph einer stetigen Funktion die $x-$Achse schneiden muß, wenn es einen Funktionswert unterhalb der $x-$Achse und einen oberhalb der $x-$Achse gibt.

Zur Wiederholung: Eine Nullstelle x_0 einer Funktion f ist eine Stelle mit $f(x_0) = 0$.

Satz (Nullstellensatz):
Sei $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ stetig. Ist weiterhin $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$ (oder $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$), so hat f in $[a, b]$ eine Nullstelle x_0.

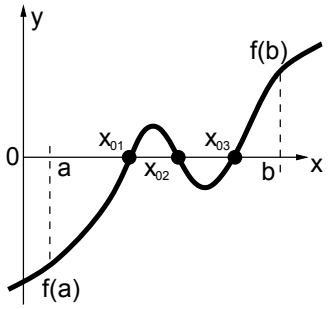


Abbildung 8.2: Skizze zum Nullstellensatz.

BEMERKUNG: Es sei an dieser Stelle daran erinnert, dass die Aussage "f hat eine Nullstelle" nach der mathematischen Sprachregelung bedeutet, dass f *mindestens* eine Nullstelle hat.

Die Aussage des Nullstellensatzes ist anschaulich gesehen fast trivial, denn stetige Funktionen sind ja gerade diejenigen Funktionen, deren Graph ohne Absetzen gezeichnet werden kann.

Der Zwischenwertsatz von Bolzano verallgemeinert den Nullstellensatz:

Satz (Zwischenwertsatz):
Sei $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ stetig. Dann nimmt f jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an. Genauer gesagt: Liegt d zwischen $f(a)$ und $f(b)$, gibt es (mindestens) ein c mit $a < c < b$, so dass $f(c) = d$.

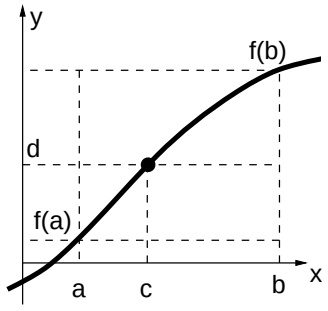


Abbildung 8.3: Skizze zum Zwischenwertsatz.

Die Aussage des Zwischenwertsatzes folgt direkt aus dem Nullstellensatz. Setzt man nämlich $g(x) = f(x) - d$, gilt entweder $g(a) > 0$ und $g(b) < 0$ oder aber $g(a) < 0$ und $g(b) > 0$. Damit erfüllt g die Bedingungen des Nullstellensatzes.

Anschaulich bedeutet der Zwischenwertsatz, dass stetige Funktionen keine Sprünge aufweisen. Sie nehmen vielmehr alle Zwischenwerte zwischen den beiden Funktionswerten $f(a)$ und $f(b)$ an.

Für den dritten Satz benötigen wir noch zwei Definitionen:

Definition (Maximum und Minimum):
Nimmt eine reellwertige Funktion $f : M \to \mathbf{R}$ ihre kleinste obere Schranke an, so heißt dieser Funktionswert **Maximum** der Funktion.
Man schreibt dafür $\max f$, $\max_{x \in M} f(x)$ oder auch $\max\{f(x) : x \in M\}$.
Nimmt eine reellwertige Funktion $f : M \to \mathbf{R}$ ihre größte untere Schranke an, so heißt dieser Funktionswert **Minimum** der Funktion.
Man schreibt dafür $\min f$, $\min_{x \in M} f(x)$ oder auch $\min\{f(x) : x \in M\}$.

BEMERKUNG: Eine Funktion muss ihre kleinste obere Schranke nicht unbedingt annehmen, wie am Beispiel der Funktion $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$, $f(x) = -x$ deutlich wird. Die kleinste obere Schranke dieser Funktion ist Null. Die Funktion nimmt diesen Funktionswert jedoch nicht an, da $x = 0$ nicht mehr im Definitionsgebiet von f liegt. Siehe dazu auch Abbildung 8.4.

Mit Hilfe der Definitionen von Maximum und Minimum können wir nun den Satz von Weierstrass über Maximum und Minimum angeben:

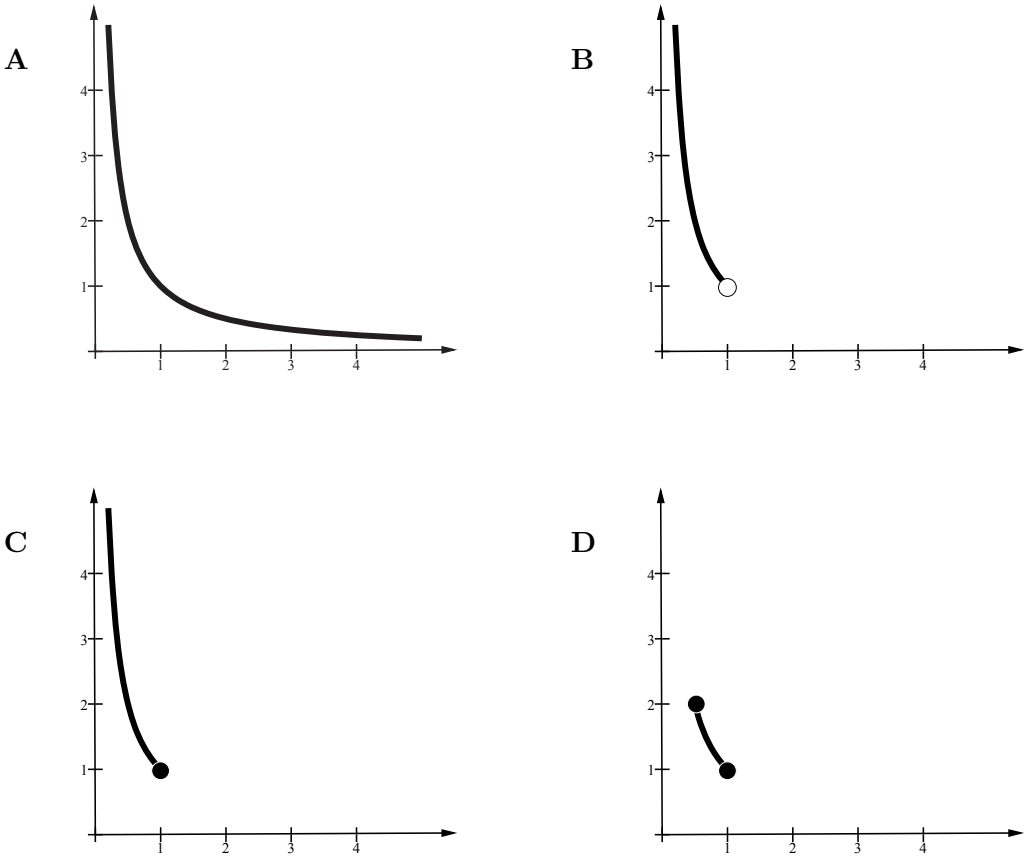


Abbildung 8.4: Skizze zur Erläuterung der Begriffe "kleinste obere Schranke", "größte untere Schranke", "Maximum" und "Minimum" am Beispiel der Funktion $f(x) = x^{-1}$.
In Abbildung A umfaßt der Definitionsbereich alle positiven reellen Zahlen. Die Funktion hat in diesem Fall keine obere Schranke. Die größte untere Schranke ist Null, sie wird von der Funktion jedoch nicht angenommen. Damit hat die Funktion $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}, x \mapsto x^{-1}$ weder ein Maximum noch ein Minimum.
In Abbildung B ist der Definitionsbereich auf das offene Intervall $(0, 1)$ eingeschränkt. Damit existiert weiterhin keine obere Schranke. Die größte untere Schranke ist nun Eins, sie wird von der Funktion jedoch nicht angenommen. Damit hat auch die Funktion $f : (0, 1) \to \mathbf{R}, x \mapsto x^{-1}$ weder ein Maximum noch ein Minimum.
In Abbildung C ist der Definitionsbereich auf das halboffene Intervall $(0, 1]$ eingeschränkt. Damit existiert weiterhin keine obere Schranke. Die größte untere Schranke ist wieder Eins, sie wird nun von der Funktion auch angenommen. Damit besitzt die Funktion $f : (0, 1] \to \mathbf{R}, x \mapsto x^{-1}$ kein Maximum aber ein Minimum.
In Abbildung D ist der Definitionsbereich auf das abgeschlossene Intervall $[1/2, 1]$ eingeschränkt. Damit ist 2 die kleinste obere Schranke und Eins die größte untere Schranke. Beide werden von der Funktion angenommen. Damit besitzt die Funktion $f : [1/2, 1] \to \mathbf{R}, x \mapsto x^{-1}$ sowohl ein Maximum als auch ein Minimum.

Satz vom Maximum und Minimum:
Sei $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ stetig, dann gibt es mindestens eine Stelle $x_1 \in [a, b]$, an der die Funktion ihr Minimum annimmt, und eine Stelle $x_2 \in [a, b]$, an der die Funktion ihr Maximum annimmt.

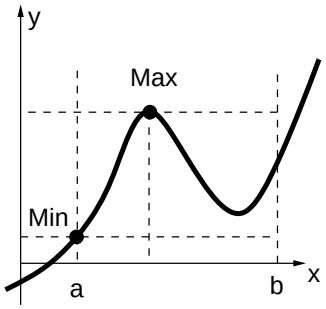


Abbildung 8.5: Skizze zum Satz vom Maximum und Minimum.

BEMERKUNG: Essentiell für die Gültigkeit des Satzes vom Maximum und Minimum ist die Wahl eines *abgeschlossenen* Intervalls $[a, b]$ — eines Intervalls, das seine beiden Grenzen a und b enthält. Das obige Beispiel der Funktion $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}, f(x) = -x$ erfüllt diese Bedingung nicht.

Der folgende Beweis zum Nullstellensatz ist auch deshalb aufgeführt, weil er sehr schön die zwingende Logik mathematischer Beweisführung verdeutlicht:

Beweis des Nullstellensatzes:
Wir definieren rekursiv die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ durch die folgende Vorschrift:
Anfangswert der beiden Folgen: $a_1 = a$ und $b_1 = b$.
Rekursionsvorschrift:
Die Folgenglieder a_{n+1} und b_{n+1} erhält man wie folgt aus den Gliedern a_n und b_n:
Wir betrachten die Zahl $\frac{a_n+b_n}{2}$. Diese liegt auf der x-Achse genau zwischen a_n und b_n. Es gibt nun drei Möglichkeiten:
1.Fall: $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) > 0$.
In diesem Fall setzen wir $a_{n+1} = a_n$ und $b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$.
2.Fall: $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) = 0$.
Unsere Suche ist beendet. Wir haben die gewünschte Nullstelle gefunden.
3.Fall: $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) < 0$.
In diesem Fall setzen wir $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$ und $b_{n+1} = b_n$.
Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ist monoton wachsend und nach oben beschränkt, die Folge $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ist monoton fallend und nach unten beschränkt. Nach dem Satz zur monotonen Konvergenz (Kapitel 5.3) konvergieren beide Folgen. Man kann sich nun überlegen, dass beide Folgen nach Konstruktion gegen denselben Grenzwert konvergieren müssen. Diesen Grenzwert nennen wir p:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = p$$

Wir zeigen nun, dass der Grenzwert p die gesuchte Nullstelle ist:
Da $f(a_n) \leq 0$ ist für alle $n \in \mathbf{N}$, gilt: $0 \geq \lim_{n\to\infty} f(a_n)$.
Da f stetig ist, gilt: $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(\lim_{n\to\infty} a_n) = f(p)$
Zusammengenommen ergibt das: $0 \geq f(p)$.
Analog argumentiert man mit der Folge $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ und erhält: $0 \leq f(p)$.
Insgesamt erhalten wir $f(p) = 0$: Der Grenzwert p ist die gesuchte Nullstelle. □

8.3 Aufgaben

1. (Grenzwerte) Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 2 & ; \quad x = 3 \\ 1 & ; \quad x \neq 3 \end{cases}$$

(a) Welchen Funktionswert hat $f(x)$ an der Stelle $x = 3$?

(b) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $f(x)$!

(c) Welchen Grenzwert hat $f(x)$ für $x \to 3$? (wie lauten der rechts- und der linksseitige Grenzwert?)

2. (Grenzwerte) Gegeben ist die Funktion

$$g(x) = \frac{1}{x-2} + 1$$

(a) Wie geht diese Funktion aus der Hyperbel $h(x) = 1/x$ hervor?

(b) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $g(x)$!

(c) Wie lauten der linksseitige und der rechtsseitige Grenzwert $\lim\limits_{x\to 2^-} g(x)$ und $\lim\limits_{x\to 2^+} g(x)$?

(d) Existiert $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$, $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$?

3. (Funktionen) Die beiden **Hyperbelfunktionen** $\sinh(x)$ (lies: **sinus hyperbolicus**) und $\cosh(x)$ (lies: **cosinus hyperbolicus**) sind definiert als

$$\sinh(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} \qquad \text{und} \qquad \cosh(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

(a) Welchen Funktionswert haben $\sinh(x)$ und $\cosh(x)$ an der Stelle $x = 0$?

(b) Welche Grenzwerte haben die beiden Funktionen für $x \to \pm\infty$?

(c) Welche Art von Symmetrie zeigen diese Funktionen?

(d) Skizzieren Sie die Graphen der beiden Funktionen!

4. (Grenzwerte von Funktionen) Überprüfen Sie ob die folgende Grenzwerte existieren und berechnen Sie gegebenenfalls ihre Werte:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} 2x^2$

(b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{(x-1)^3}$

(c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^4 + 5x^3}{x^7}$

(d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{8x^{21} + 2x^{13} - 20x^3}{4x^{21} - x^4}$

(e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{8x^{21} + 2x^{13} - 20x^3}{4x^{21} - x^4}$

(f) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{x^2 - x_0^2}{x - x_0}$

Kapitel 9

Differentiation

Will man den groben Verlauf einer Funktion $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, x \mapsto f(x)$ verstehen, so wird man damit beginnen, Funktionswerte an ausgewählten Stellen wie $x = 0$, $x = 1$, oder $x = -1$ zu berechnen. Dieses Vorgehen liegt nahe, ist jedoch letztlich nicht gut motiviert: Warum sollte man den Wert der Funktion gerade an den drei genannnten Stellen berechnen, und nicht an zwei, oder fünf, oder auch siebzehn anderen Stellen? Solange man f noch nicht kennt, ist ja kein x-Wert in irgendeiner Weise gegenüber anderen x-Werten ausgezeichnet. Um den Verlauf einer Funktion zu verstehen, sollte man deshalb vor allem Fragen stellen, die *qualitative Eigenschaften* der Funktion gezielt angehen. Dazu gehört die Frage, wie sich die Funktion für sehr große und sehr kleine Argumente verhält, $\lim_{x\to\infty} f(x)$ und $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, und wo ihre Nullstellen liegen, also die x-Werte, für die $f(x) = 0$ gilt. Von besonderer Bedeutung für das Verständnis einer Funktion ist auch die Frage, für welche Argumente die Funktion wächst oder fällt, ob sie ein Maximum oder Minimum besitzt, und wo diese Extremwerte liegen.

Ein zweiter, verwandter Fragenkreis: Bei der Analyse experimenteller Daten ist oft nicht allein der Wert der Messgröße an einer gewissen Stelle oder zu einem gewissen Zeitpunkt von Bedeutung, sondern auch Fragen zur räumlichen oder zeitlichen Veränderung einer Variablen: "Mit welcher Rate nimmt die Zellpopulation ab?", "Wie groß ist die räumliche (oder zeitliche) Variation der Konzentration einer Substanz?" oder "Zu welchem Zeitpunkt erreicht das Aktionspotential sein Maximum?"...

Ein dritter, ebenfalls verwandter Themenbereich: In Kapitel 6 und 7 dieses Skriptes werden dynamische Prozesse auf phänomenologischer Ebene mit Hilfe von Iterierten Abbildungen beschrieben. Die Zeit t wird hier also als eine diskrete Variable aufgefaßt, die sich schrittweise ändert. Damit wird jedoch die kontinuierliche Natur der Zeit nicht berücksichtigt. Dagegen beruhen die Grundgesetze der Physik und davon abgeleitete biophysikalische Modelle auf einer in der Zeit kontinuierlichen Entwicklung eines dynamischen Systems. Wie kann man derartige Bewegungsgleichungen mathematisch beschreiben und analysieren?

Alle drei Fragenkomplexe können mit Hilfe des Konzeptes "Ableitung" oder "Differentialquotient" behandelt werden, das wir nun ausführlich erörtern wollen.

9.1 Definition und geometrische Interpretation

Aufbauend auf dem Grenzwertbegriff für Funktionen definieren wir nun die *Differenzierbarkeit einer Funktion*:

Definition (Differenzierbarkeit): Die reelle Funktion $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, x \mapsto f(x)$ sei auf einem beliebigen Intervall $M \subset \mathbf{R}$ definiert. Die Funktion heißt **differenzierbar an der Stelle $\mathbf{x}_0 \in M$**, wenn der Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{oder, was dasselbe ist,} \quad \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{9.1}$$

exisitiert und endlich ist.
Dieser Grenzwert wird auch mit $f'(x_0)$ bezeichnet,

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \ , \tag{9.2}$$

und heißt **Ableitung von f nach x an der Stelle $\mathbf{x}_0$**.

Diese Notation geht auf Newton [1642-1727] zurück. Eine alternative Schreibweise stammt von seinem Zeitgenossen und Konkurrenten Leibniz [1646-1716]. Statt $f'(x_0)$ schreibt man hier in mehreren Varianten

$$f'(x_0) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0) = \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x_0} = \left.\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x_0} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f\right|_{x_0} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)\right|_{x_0} \tag{9.3}$$

und nennt die Größe $\mathrm{d}f/\mathrm{d}x$ **Differentialquotient** (lies: **"**$\mathrm{d}f$ **nach** $\mathrm{d}x$**"**).

Notiz:
Ist der Ausdruck (9.1) für alle $x_0 \in M$ definiert, so kann man aus der Funktion f eine *neue* Funktion $f' : M \to \mathbf{R}, x \mapsto f'(x)$ erzeugen, indem man jedem x den Wert der Ableitung an dieser Stelle zuordnet. Diese Funktion wird **Ableitung von f** genannt.

BEMERKUNG: Bei der Definition des Differentialquotienten zahlt es sich jetzt aus, dass der Begriff Grenzwert $\lim_{x \to x_0} f(x)$ ohne Bezug auf den Wert von f an der Stelle x_0 eingeführt wurde. Ansonsten würde man hier auf das Problem einer Division von Null durch Null stoßen!

BEISPIEL 1: **Die Ableitung der konstanten Funktion $f(x) = c$ ist $f'(x) = 0$.**

Beweis:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{c - c}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{0}{x - x_0} = 0$$

BEISPIEL 2: **Die Ableitung der linearen Funktion $f(x) = ax$ ist $f'(x) = a$.**

Beweis:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{ax - ax_0}{x - x_0} = a \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = a$$

BEISPIEL 3: **Die Ableitung der quadratischen Funktion $f(x) = x^2$ ist $f'(x) = 2x$.**

Beweis:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} (x + x_0) = 2x_0$$

BEISPIEL 4: **Für die Ableitung der Betragsfunktion $f(x) = |x|$ an der Stelle x_0 gilt: Für positive x_0 ist $|x|' = 1$, für negative x_0 ist $|x|' = -1$ und an der Stelle $x_0 = 0$ ist die Betragsfunktion nicht differenzierbar.**

Beweis:

1. Fall ($x_0 > 0$):

Für positive x_0 ist $|x_0| = x_0$. Weiterhin gilt: Wenn die Differenz $x_0 - x$ nur genügend klein und x_0 positiv ist, so wird auch x positiv sein (und damit $|x| = x$ gelten). Zusammen folgt aus beiden Ergebnissen:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|x| - |x_0|}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} (1) = 1$$

2. Fall ($x_0 < 0$):

Für negative x_0 ist $|x_0| = -x_0$. Weiterhin gilt: Wenn die Differenz $x_0 - x$ nur genügend klein und x_0 negativ ist, so wird auch x negativ sein (und damit $|x| = -x$ gelten). Zusammen folgt aus beiden Ergebnissen:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|x| - |x_0|}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{-x - (-x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{-(x - x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} (-1) = -1$$

3. Fall ($x_0 = 0$):

$$\lim_{x \to 0} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0} \operatorname{sign}(x)$$

Der Grenzwert der Signumfunktion $\operatorname{sign}(x)$ ist an der Stelle $x_0 = 0$ nicht definiert. Damit ist die Betragsfunktion für $x_0 = 0$ nicht differenzierbar.

ZUSAMMENFASSUNG: Nach Kapitel 8.2 ist die Betragsfunktion stetig — man kann ihren Graph zeichnen ohne abzusetzen. Ihre Ableitung ist für alle $x_0 \neq 0$ durch die Signumfunktion gegeben, für $x_0 = 0$ jedoch nicht definiert — anschaulich entspricht dies genau dem scharfen Knick der Betragsfunktion an dieser Stelle.

BEISPIEL 5: **Die Ableitung der Signumfunktion $f(x) = \operatorname{sign}(x) = x/|x|$ an der Stelle x_0 ist für alle $x_0 \neq 0$ gleich null. An der Stelle $x_0 = 0$ ist die Signumfunktion nicht differenzierbar.**

Beweis:

1. Fall ($x_0 > 0$):

Für positive x_0 ist $\operatorname{sign}(x_0) = 1$. Weiterhin gilt: Wenn die Differenz $x_0 - x$ nur genügend klein und x_0 positiv ist, so wird auch x positiv sein. Damit ist auch $\operatorname{sign}(x) = 1$, wenn $x_0 - x$ nur genügend klein ist. Zusammen folgt aus beiden Ergebnissen:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\operatorname{sign}(x) - \operatorname{sign}(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{1 - (1)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{0}{x - x_0} = 0$$

2. Fall ($x_0 < 0$):

Für negative x_0 ist $\operatorname{sign}(x_0) = -1$. Weiterhin gilt: Wenn die Differenz $x_0 - x$ nur genügend klein und x_0 negativ ist, so wird auch x negativ sein. Damit ist auch $\operatorname{sign}(x) = -1$, wenn $x_0 - x$ nur genügend klein ist. Zusammen folgt aus beiden Ergebnissen:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\operatorname{sign}(x) - \operatorname{sign}(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{-1 - (-1)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{0}{x - x_0} = 0$$

3. Fall ($x_0 = 0$):

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sign}(x) - \operatorname{sign}(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sign}(x)}{x}$$

Die Signumfunktion nimmt für alle $x \neq 0$ einen von Null verschiedenen Wert an, minus Eins für $x < 0$ und plus Eins für $x > 0$. Für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$, die gegen Null konvergiert, wächst daher der Quotient $\operatorname{sign}(x_n)/x_n$ über alle Grenzen. Damit ist der Grenzwert $\lim_{x \to x_0} \frac{\operatorname{sign}(x)}{x} = \infty$ zwar definiert, aber nicht endlich, und deshalb nicht differenzierbar (s. Definition auf S. 106).

ZUSAMMENFASSUNG: Die Ableitung der Signumfunktion verschwindet für alle $x_0 \neq 0$ und hat an der Stelle $x_0 = 0$ keinen endlichen Grenzwert (siehe auch Beispiel 3 in Kapitel 8.1). Deshalb ist die Signumfunktion nicht stetig und kann damit auch nicht differenzierbar sein.

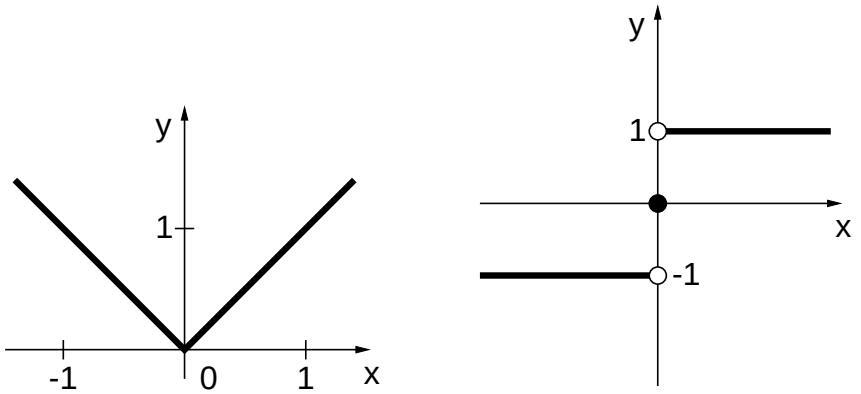


Abbildung 9.1: Graph der Betragsfunktion $f(x) = |x|$ und der Signumfunktion $f(x) = \text{sign}(x)$.

9.1.1 Geometrische Interpretation und Tangentengleichung

Wir wollen nun zeigen, dass die Ableitung einer Funktion f an der Stelle x_0 als Steigung der Tangente an der Stelle x_0 interpretiert werden kann. Dazu vorweg eine Definition und eine "Erinnerung":

Definition (Sekante):
Eine Gerade, die eine Funktion f in zwei Punkten $(x_1, f(x_1))$ und $(x_2, f(x_2))$ schneidet, heißt **Sekante** durch die Punkte $(x_1, f(x_1))$ und $(x_2, f(x_2))$.

Notiz (Steigung einer Geraden):
Die Steigung einer Geraden, die durch zwei Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) läuft, ist das Verhältnis der zugehörigen Achsenabschnitte, also der Quotient $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$. Siehe auch Gleichung (2.16).

Die Steigung der Sekante durch die zwei Punkte $(x, f(x))$ und $(x_0, f(x_0))$ ist damit durch den Ausdruck $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ gegeben.

Lässt man nun x sukzessive immer näher an x_0 wandern, schmiegt sich die Sekante immer enger an den Graphen der Funktion an, bis sie schließlich zur **Tangente an f im Punkt** $(x_0, f(x_0))$ wird.[1] Der Grenzwert (9.1) entspricht also der Steigung der Tangente an f an der Stelle x_0. Bei dieser Überlegung haben wir stillschweigend vorausgesetzt, dass sich die Steigung der Sekante nicht sprunghaft verändert, wenn wir den Wert x gegen x_0 gehen lassen, so dass wir überhaupt von einer Tangente der Funktion an der Stelle x_0 reden können. Dies entspricht gerade der Forderung nach der Differenzierbarkeit von f. Hat f dagegen einen Knick an der Stelle x_0, hat die Funktion an dieser Stelle keine Tangente und ist dort auch nicht differenzierbar.

Mit Hilfe der Ableitung $f'(x_0)$ kann man nun auch die Gleichung der Tangente an f an der Stelle x_0 aufstellen. Nach ihrer Definition ist diese Tangente eine Gerade durch den Punkt $(x_0, f(x_0))$, deren Steigung mit der Ableitung $f'(x_0)$ übereinstimmt. Aus diesen zwei Forderungen erhalten wir die

[1] Die Tangente ist eine Gerade durch *den Punkt* $(x_0, f(x_0))$. Wenn keine Verwechslung möglich ist, werden wir jedoch auch kurz von einer Tangente an f *an der Stelle* x_0 sprechen.

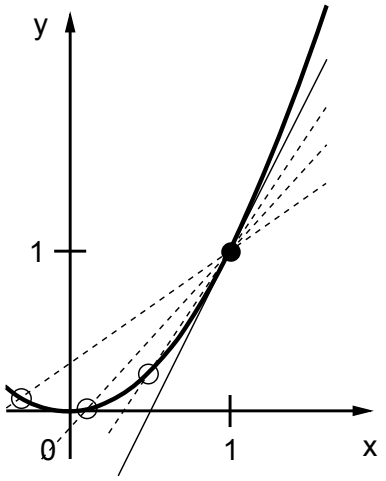


Abbildung 9.2: Graph der Funktion $f(x) = x^2$, einiger Sekanten durch die Punkte $(1, 1)$ und $(x, f(x))$, und der Tangente an f im Punkt $(1, 1)$.

Tangentengleichung:
Die Funktion f sei an der Stelle x_0 differenzierbar. Dann lautet die Geradengleichung der Tangente an f im Punkt $(x_0, f(x_0))$:

$$y(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) \ . \tag{9.4}$$

Siehe auch Abb. 2.8 auf S. 25, $y = mx + b$.

Setzen wir zur Probe $x = x_0$, erhalten wir $y(x_0) = f(x_0)$. Berechnen wir die Ableitung von $y(x)$, erhalten wir $y'(x) = f'(x_0)$. Die durch (9.4) beschriebene Gleichung hat also genau die zwei geforderten Eigenschaften.

BEISPIEL :

Wie lautet die Gleichung der Tangente der Funktion $f(x) = x^2$ an der Stelle $x_0 = 1$?

Die Ableitung der Funktion ist $f'(x) = 2x$, also gilt $f'(1) = 2$. Mit (9.4) erhalten wir daraus $y(x) = f(1) + f'(1) \cdot (x - 1) = 1 + 2(x - 1) = 2x - 1$.

Setzt man in diese Gleichung $x = 1$ ein, erhält man $y(1) = 1$, berechnet man die Steigung der Gerade, erhält man $y'(1) = 2$. Beide Werte stimmen wie gefordert mit den entsprechenden Werten von Funktion f an der Stelle $x_0 = 1$ überein.

Wie lautet die Gleichung der Tangente an der Stelle $x_0 = -1$?

Mit der gleichen Argumentation erhalten wir nun:
$y(x) = f(-1) + f'(-1) \cdot (x - (-1)) = 1 + (-2) \cdot (x + 1) = -2x - 1$.

9.1.2 Zusammenhang von Stetigkeit und Differenzierbarkeit

In Beispiel 4 von Abschnitt 9.1 haben wir mit der Betragsfunktion $f(x) = |x|$ eine Funktion kennen gelernt, die an der Stelle 0 zwar stetig, aber nicht differenzierbar ist. Anschaulich gesehen liegt das daran, dass der Graph im Punkt $(0, 0)$ einen Knick hat.

Also sind nicht alle stetige Funktionen auch differenzierbar. Man kann sich aber fragen, ob alle differenzierbaren Funktionen stetig sind. Diese Frage beantwortet der folgende Satz:

Satz (Differenzierbarkeit impliziert Stetigkeit):
Ist eine Funktion $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, x \mapsto f(x)$ an der Stelle x_0 differenzierbar, so ist sie dort auch stetig.
Die Umkehrung des Satzes lautet:
Ist eine Funktion $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, x \mapsto f(x)$ an der Stelle x_0 nicht stetig, so ist sie dort auch nicht differenzierbar.

Beweis:
Die Funktion $f(x)$ sei an der Stelle x_0 differenzierbar. Dann existiert nach Definition (9.1) der Grenzwert $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ und hat einen endlichen Wert. Damit gilt

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to x_0}[f(x) - f(x_0)] \\ &= \lim_{x\to x_0} \frac{[f(x) - f(x_0)](x - x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x\to x_0} \frac{[f(x) - f(x_0)]}{x - x_0} \cdot \lim_{x\to x_0}(x - x_0) = 0 \ , \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt ausgenutzt wurde, dass ganz allgemein $\lim_{x\to x_0}(x - x_0) = 0$ und $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ nach Voraussetzung endlich ist.
Der erste Ausdruck kann als $\lim_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)] = \lim_{x\to x_0} f(x) - \lim_{x\to x_0} f(x_0) = \lim_{x\to x_0}[f(x)] - f(x_0)$ geschrieben werden. Damit gilt insgesamt $\lim_{x\to x_0}[f(x)] = f(x_0)$. Die Funktion f ist also stetig. □

BEISPIEL : **Die Signumfunktion ist an der Stelle $x_0 = 0$ nicht differenzierbar.**

Nach Beispiel 3 in Kapitel 8.1 hat die Signumfunktion an der Stelle $x_0 = 0$ keinen Grenzwert, ist dort also auch nicht stetig. Damit ist sie nach dem obigen Satz an dieser Stelle auch nicht differenzierbar. Explizit wurde dies schon in Beispiel 5 von Kapitel 9.1 gezeigt.

9.2 Ableitungsregeln

Die folgenden Regeln gelten zunächst punktweise an einer Stelle x_0. Sind jedoch die Voraussetzungen für alle $x_0 \in \mathbf{R}$ erfüllt, so können die Regeln entsprechend als Aussagen über die Funktionen $f' : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, x \mapsto f'(x)$ interpretiert werden.

9.2.1 Summen-, Produkt- und Quotientenregel

Konstanter Faktor, Summen-, Produkt- und Quotientenregel
Seien $f, g : M \to \mathbf{R}$ in x_0 differenzierbare Funktionen und $a \in \mathbf{R}$. Dann gilt:

$$\textbf{Konstanter Faktor}: \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(a \cdot f) = a \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f \tag{9.5}$$

$$\textbf{Summenregel}: \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f + g) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} g \tag{9.6}$$

$$\textbf{Produktregel}: \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f \cdot g) = (\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f) \cdot g + f \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} g \tag{9.7}$$

$$\textbf{Quotientenregel}: \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f) \cdot g - f \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} g}{g^2} \tag{9.8}$$

BEMERKUNG: Auf der rechten Seite von (9.7) und (9.8) erscheint der Term $\mathrm{d}f/\mathrm{d}x$ in Klammern, um deutlich zu machen, dass die Ableitung hier nur auf die Funktion f wirkt, und nicht auch auf g wie im Ausdruck $\mathrm{d}/\mathrm{d}x\ (fg)$ der linken Seite von (9.7).

Beweis von (9.5) – (9.8):
Die ersten beiden Aussagen folgen direkt aus der Definition (9.1) und werden zur Übung empfohlen.[2]

Beweis der Produktregel:
Bevor wir die Definition (9.1) auf die Funktion $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ anwenden, formen wir den Differenzenquotienten durch Einfügen von $0 = -\frac{f(x_0)g(x)}{x-x_0} + \frac{f(x_0)g(x)}{x-x_0}$ wie folgt um:

$$\frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \frac{[f(x) - f(x_0)] \cdot g(x)}{x - x_0} + \frac{f(x_0) \cdot [g(x) - g(x_0)]}{x - x_0} \tag{9.9}$$

Damit können wir nun die Rechenregeln (8.5) und (8.6) für den Grenzwert einer Summe und eines Produktes zweier Funktionen benützen und erhalten:

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \lim_{x\to x_0} g(x) + f(x_0) \lim_{x\to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \end{aligned} \tag{9.10}$$

Da g als differenzierbar angenommen wird, ist g nach Absatz 9.1.2 auch stetig, so dass $\lim_{x\to x_0} g(x) = g(x_0)$. Daraus folgt (9.7). □

Beweis der Quotientenregel:

Wir betrachten nur den Fall $f(x) = 1$ und zeigen $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{g}\right) = -\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g}{g^2}$. Der allgemeine Fall folgt dann mit Hilfe der Produktregel (9.7).

$$\frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{x - x_0} = -\frac{1}{g(x)g(x_0)} \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \tag{9.11}$$

Bildet man nun wie in (9.10) den Grenzwert, erhält man (9.8). □

BEISPIEL 1: **Multiplikation mit einem konstanten Faktor:**
Sei $f(x) = 5x^2$. Dann gilt: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(5x^2) = 5 \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2) = 5 \cdot 2x = 10x$.

BEISPIEL 2: **Summenregel:**
Sei $f(x) = x^2$, $g(x) = x$. Dann gilt: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2 + x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x) = 2x + 1$.

BEISPIEL 3: **Produktregel:**
Wir wollen die Ableitung von x^3 berechnen und setzen dazu $f(x) = x^2$ und $g(x) = x$. Dann gilt: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^3) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2 \cdot x) = 2x \cdot x + x^2 \cdot 1 = 3x^2$.

BEISPIEL 4: **Ableitung von Potenzfunktionen:**
Durch sukzessives Anwenden der Produktregel wie in Beispiel 3 erhalten wir

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^n) = nx^{n-1} \quad \text{für } n \in \mathbf{N}. \tag{9.12}$$

BEISPIEL 5: **Ableitung eines Polynoms:**
Für die Ableitung eines Polynoms $f(x)$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k\ , \tag{9.13}$$

[2] Zusammen genommen bedeuten diese zwei Ausssagen, dass die mathematische Operation "Differentiation einer Funktion" eine lineare Operation ist, da für beliebige differenzierbare Funktionen f und g und beliebige $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ gilt: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\lambda f + \mu g) = \lambda \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f + \mu \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} g$.

folgt aus (9.12) und der Summenregel (9.6):

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{k=0}^{n} k\cdot a_k x^{k-1}\right)\\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(a_0+\sum_{k=1}^{n} k\cdot a_k x^{k-1}\right)\\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}a_0+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{k=1}^{n} k\cdot a_k x^{k-1}\right)\\ &= \sum_{k=1}^{n} k\cdot a_k x^{k-1} \quad \text{mit } a_k\in\mathbf{R} \text{ und } x\neq 0\ . \end{aligned} \tag{9.14}$$

BEISPIEL 6: **Ableitung einer Potenzreihe:**

Polynome haben endlich viele Glieder. In gleicher Weise, wie wir in Kapitel 5.4 eine Reihe als Grenzwert einer Summe mit unendlich vielen Gliedern einführten, definieren wir nun den Begriff **Potenzreihe** als Grenzwert eines Polynoms mit unendlich vielen Gliedern. Existiert dieser Grenzwert, schreiben wir

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\ . \tag{9.15}$$

Im Gegensatz zu den bisher betrachteten Reihen handelt es sich nun nicht um eine Reihe von Zahlen, sondern um eine *Reihe von Potenzfunktionen*. Sehen Sie den Unterschied?

Die Ableitung einer Potenzreihe ist analog zu (9.14) durch

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f=\sum_{k=1}^{\infty} k\cdot a_k x^{k-1} \quad \text{mit } a_k\in\mathbf{R} \tag{9.16}$$

gegeben.

BEISPIEL 7: **Quotientenregel:**

Wir wollen die Ableitung von $h(x)=x^{-1}=1/x$ berechnen. Aus (9.8) mit $f(x)=1$ und $g(x)=x$ folgt: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{-1})=[0\cdot x-1\cdot 1]/x^2=-x^{-2}$.

9.2.2 Ableitung von Funktion und Umkehrfunktion

Oft sucht man die Ableitung einer Funktion f, von deren Umkehrfunktion f^{-1} die Ableitung schon bekannt ist. Hier hilft folgende Beobachtung:

Funktion und Umkehrfunktion gehen durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden auseinander hervor — siehe auch Kapitel 2.1. Bei dieser Spiegelung wird beispielsweise der Punkt $(x,f(x))$ in den Punkt $(f(x),x)$ gespiegelt. Ist nun die Steigung der Tangente an f im Punkt $(x_0,f(x_0))$ gleich m, wobei wir $m\neq 0$ annehmen wollen, so ist die Steigung der Tangente an f^{-1} im Punkt $(f(x_0),x_0)$ gleich m^{-1}. Ist beispielsweise die Steigung der Tangente an f im Punkt $(x_0,f(x_0))$ gleich 1.25, bedeutet dies nach der Notiz zu Beginn von Abschnitt 9.1, dass sich y- zu x-Abschnitt im Steigungsdreieck wie $1.25:1$ verhalten. Spiegelt man diese Gerade, beträgt das Verhältnis $1:1.25=0.8:1$. Siehe auch Abbildung 9.3.

Damit ist der Wert der Ableitung der Funktion f genau das Inverse des Wertes der Ableitung ihrer Umkehrfunktion f^{-1}. Allerdings muss man beachten, dass die zwei Ableitungen an *unterschiedlichen* Stellen berechnet werden — die Ableitung von f an der Stelle x_0, die von f^{-1} an der Stelle $f(x_0)$. Insgesamt erhalten wir also:

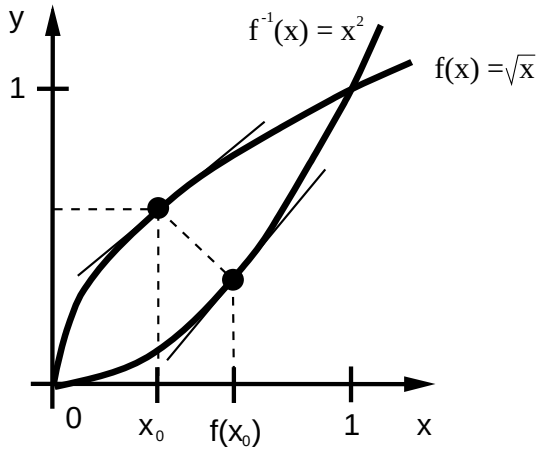


Abbildung 9.3: Graph der Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ und $f^{-1}(x) = x^2$.

Satz (Ableitung von Funktion und Umkehrfunktion):
Die Umkehrfunktion f^{-1} der Funktion f sei an der Stelle $f(x_0)$ differenzierbar und die Ableitung von f^{-1} sei an dieser Stelle von Null verschieden, $(f^{-1})'(f(x_0)) \neq 0$. Dann gilt:
Die Funktion f ist an der Stelle x_0 differenzierbar. Ihre Ableitung lautet

$$f'(x_0) = \frac{1}{(f^{-1})'(f(x_0))} \tag{9.17}$$

bzw. in der Schreibweise mit Differentialquotienten

$$f'(x_0) = \frac{1}{\left.\frac{\mathrm{d}f^{-1}}{\mathrm{d}y}\right|_{y=f(x_0)}} \ .$$

BEISPIEL : **Ableitung der Quadratwurzelfunktion:**

Die Wurzelfunktion $f : \mathbf{R_0^+} \to \mathbf{R_0^+}, x \mapsto x^{1/2}$ hat als Umkehrfunktion die Quadratfunktion $f^{-1} : \mathbf{R_0^+} \to \mathbf{R_0^+}, x \mapsto x^2$. Deren Ableitung ist die Funktion $(f^{-1})'(x) = 2x$. Will man also die Ableitung der Wurzelfunktion bestimmen, muss man nach (9.17) die Ableitung an der Stelle $f(x_0) = x_0^{1/2}$ berechnen. Man erhält $(f^{-1})'(x_0^{1/2}) = 2x_0^{1/2}$. Dieser Ausdruck ist für alle $x_0 \neq 0$ von Null verschieden. Damit gilt für $x_0 > 0$:

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^{1/2}\right|_{x_0} = \frac{1}{2}x_0^{-1/2} \tag{9.18}$$

An der Stelle $x_0 = 0$ verschwindet die Ableitung der Quadratfunktion, so dass die Division in (9.17) nicht ausgeführt werden kann. Anschaulich bedeutet dies: Für $x = 0$ steht die Tangente an $f(x) = x^{1/2}$ senkrecht.

BEISPIEL : **Ableitung beliebiger Wurzelfunktionen:**

Nach Kapitel 3.1.3 ist die Umkehrfunktion der Wurzelfunktion $f : \mathbf{R_0^+} \to \mathbf{R_0^+}, x \mapsto f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{1/n}$ die Potenzfunktion $f^{-1}(x) = x^n$. Die Ableitung der Potenzfunktion ist nach (9.12) durch $(f^{-1})' = nx^{n-1}$ gegeben. Mit dem gleichen

Argument wie im letzten Beispiel erhält man daraus für $x_0 > 0$:

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^{\frac{1}{n}}\right|_{x_0} = \frac{1}{n} x_0^{(\frac{1}{n}-1)} \tag{9.19}$$

Notiz:
In der Leibniz'schen Notation kann man sich den Zusammenhang zwischen der Ableitung der Funktion $y = f(x)$ und der Ableitung ihrer Umkehrfunktion $x = f^{-1}(y)$ besonders leicht merken:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}} \tag{9.20}$$

Vergleichen Sie dieses Ergebnis mit Gleichung (9.17)! Allerdings ist aus Gleichung (9.20) nicht ersichtlich, an welchen Stellen die jeweiligen Ableitungen zu nehmen sind. In dieser Hinsicht ist Formel (9.17) vorteilhafter.

9.2.3 Kettenregel

Mit den bisherigen Regeln können wir einfache Kombinationen von Funktionen, wie die Summe oder das Produkt zweier Funktionen ableiten. Will man jedoch auch beliebig komplizierte Funktionen differenzieren können, benötigt man eine Regel über die Ableitung der Komposition (Kapitel 2.2) zweier Funktionen.

Kettenregel:
Die Funktion h sei eine Komposition zweier reeller Funktionen f und g,

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) \ . \tag{9.21}$$

Die Funktion f sei an der Stelle x_0 differenzierbar, und die Funktion g sei an der Stelle $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar. Dann ist die Funktion h an der Stelle x_0 differenzierbar und es gilt:

$$\left.\frac{\mathrm{d}h(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x_0} = \left.\frac{\mathrm{d}g(f(x))}{\mathrm{d}x}\right|_{x_0} = \left.\frac{\mathrm{d}g(y)}{\mathrm{d}y}\right|_{f(x_0)} \cdot \left.\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x_0} \tag{9.22}$$

BEMERKUNG: Setzt man in (9.22) $y = f(x)$ und unterscheidet explizit zwischen $g(y)$ und $g(x) = g(f(x)) = h(x)$, kann man die Kettenregel kompakt in der sehr suggestiven Form

$$\left.\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\right|_{x_0} = \left.\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}y}\right|_{f(x_0)} \cdot \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x_0} \tag{9.23}$$

schreiben.

In dieser Form ist Ihnen die Kettenregel eventuell auch als "innere Ableitung mal äußere Ableitung" bekannt.

Beweis:
Mit der Definition $y = f(x)$ und $y_0 = f(x_0)$ gilt $1 = [f(x) - f(x_0)]/[y - y_0]$, und damit auch

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ . \tag{9.24}$$

Benützt man nun die Produktregel für Grenzwerte (8.6), erhält man

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} &= \lim_{x \to x_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{y \to y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ . \end{aligned} \tag{9.25}$$

Zur letzten Umformung: Da die Funktion f als an der Stelle x_0 differenzierbar angenommen wurde, ist sie dort nach Kapitel 9.1.2 auch stetig. Damit ist es unerheblich, ob der erste Grenzwert auf der rechten Seite von (9.25) als Grenzwert $x \to x_0$ oder als Grenzwert $y \to y_0$ genommen wird, woraus (9.22) folgt. □

BEISPIEL 1: **Ableitung der Funktion $h(x) = x^{3/2}$.**

Die Funktion h ist nach (3.3) und (3.7) für $x \geq 0$ definiert.

Um ihre Ableitung zu berechnen, schreiben wir

$$h(x) = (\sqrt{x})^3 \quad \text{d.h.} \quad f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2} \quad \text{und} \quad g(y) = y^3 \ .$$

Die Wurzelfunktion $f(x) = x^{1/2}$ ist nach Abschnitt 9.2.2 für alle $x > 0$ differenzierbar, die Funktion $g(y) = y^3$ für alle reellen y. Damit ist $h(x)$ für alle $x > 0$ differenzierbar. Wendet man die Kettenregel an, erhält man für alle $x > 0$: $h'(x) = 3(x^{1/2})^2 \cdot \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{3}{2}x^{1/2} = \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1}$.

BEISPIEL 2: **Ableitung beliebiger Potenzfunktionen:**

Die Ableitung der Potenzfunktion $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}, x \mapsto x^r$ kann man für rationale r ($r = p/q$ mit $p \in \mathbf{Z}$ und $q \in \mathbf{N}$) wie im letzten Beispiel berechnen. Unter Verwendung von (9.19) erhält man $(x^r)' = rx^{r-1}$. Für irrationale r ist x^r nach Kapitel 3.3 als Grenzwert einer Folge von Funktionen $f_n(x) = x^{(r_n)}$ mit $r_n \in \mathbf{Q}$ und $\lim_{n\to\infty} r_n = r$ definiert. Für jedes Glied dieser Folge von Funktionen ist der Exponent r_n eine rationale Zahl. Damit ist die Ableitung jeder dieser Funktionen wohldefiniert und durch $(x^{r_n})' = r_n x^{r_n-1}$ gegeben. Da die Folge $(r_n)_{n\in\mathbf{N}}$ gerade so gewählt ist, dass für ihren Grenzwert $\lim_{r_n\to\infty} r_n = r$ gilt, folgt für die Ableitung einer Potenzfunktion mit beliebigem reellen Exponenten r: $(x^r)' = rx^{r-1}$.

Notiz (Ableitung von Potenzfunktionen mit reellem Exponenten):
Die Ableitung der Potenzfunktion $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}, x \mapsto x^r$ lautet für alle reellen Exponenten $r \in \mathbf{R}$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^r = rx^{r-1} \tag{9.26}$$

9.3 Exponential- und Logarithmusfunktion

9.3.1 Ableitung der Exponentialfunktion

Die Exponentialfunktion wurde in Kapitel 3.4 vorgestellt. In Kapitel 6.1 sahen wir dann, dass ein durch die lineare Iterierte Abbildung $x_{t+1} = ax_t$ beschriebener Wachstums- beziehungsweise Zerfallsprozess exponentiell verläuft, $x_t = a^t x_0$. Schreibt man die Iterierte Abbildung in der Form einer Differenzengleichung (siehe dazu auch Gleichung 6.3), erhält man $x_{t+1} - x_t = (a-1)x_t$. Bei einer exponentiellen Folge ist also die Differenz zweier aufeinanderfolgender Folgenglieder x_{t+1} und x_t exakt proportional zu x_t.

Diese Beobachtung lässt vermuten, dass auch der Differentialquotient der Exponentialfunktion $x(t) = a^t$ an der Stelle t proportional zum Funktionswert an dieser Stelle ist $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a^t \propto a^t$. Dies ist in der Tat auch der Fall, wobei die Exponentialfunktion zur Basis e (Eulersche Zahl, e = 2.718282...) unter allen Exponentialfunktionen dadurch ausgezeichnet ist, dass die Proportionalitätskonstante genau Eins ist.

Bezeichnen wir die unabhängige Variable zur Allgemeinheit mit x, gilt also:

Notiz (Ableitung der Exponentialfunktion):
Die Ableitung der Exponentialfunktion $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, x \mapsto \mathrm{e}^x$ ist *für alle* $x \in \mathbf{R}$ identisch mit ihr selbst,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x\ . \tag{9.27}$$

Es gilt sogar: Alle Funktionen, die die Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) = f(x) \tag{9.28}$$

erfüllen, sind (eventuell bis auf eine multiplikative Konstante) mit der Exponentialfunktion identisch,

$$f(x) = c\ \mathrm{e}^x \quad \text{mit} \quad c \in \mathbf{R}\ . \tag{9.29}$$

In vielen Anwendnungen treten Exponentialfunktionen auf, bei denen das Argument nicht x selbst ist, sondern nur proportional zu x, $f(x) = \mathrm{e}^{cx}$. Die Ableitung dieser Funktionen ergibt sich mit Hilfe der Kettenregel (9.22) zu

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{e}^{cx} = c\,\mathrm{e}^{cx} \quad \text{für alle } c, x \in \mathbf{R}\ . \tag{9.30}$$

Die Funktion $f(x) = \mathrm{e}^{cx}$ erfüllt nun also die Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) = c f(x)\ .$$

Wir wollen auch diesen allgemeineren Fall im Kontext dynamischer Prozesse diskutieren. Dazu ersetzen wir die unabhängige Variable x wie zu Beginn dieses Abschnitts wieder durch t und die Funktion $f(x)$ durch $x(t)$. Die damit entstandene Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x(t) = c x(t) \tag{9.31}$$

beschreibt einen kontinuierlichen Wachstumsprozess, in dem die Menge x einer beliebigen Substanz (radioaktives Präparat, Biomasse ...) proportional zur gerade vorhandenen Menge wächst (c positiv) oder abnimmt (c negativ).

In dieser Interpretation impliziert der Satz, dass alle (!) denkbaren dynamischen Prozesse, in denen sich eine Substanz kontinuierlich und *proportional* zu ihrer gegenwärtige Menge verändert, durch **exponentielles Wachstum** beziehungsweise **exponentiellen Zerfall** gekennzeichnet sind — in gleicher Weise, wie wir dies bei in der Zeit diskreten Prozessen schon in Kapitel 6.1 sahen.[3] Siehe dazu auch nochmals Kapitel 3.4.4 – "Mathematik und Biologie: Exponentieller Zerfall"!

In der Statistik spielt die glockenförmige **Gauß-Funktion** eine sehr wichtige Rolle,

$$f_{\mathrm{Gauß}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\ \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\ . \tag{9.32}$$

[3] Gleichung (9.28) ist eine sogenannte **Differentialgleichung**. In diesem Typus von Gleichung ist die unbekannte Größe eine *Funktion* $f(x)$, nicht "nur" eine Zahl x wie beispielsweise in der Gleichung $e^x = 4$. Aus der Menge aller denkbaren Funktionen sucht man also nach all denjenigen Funktionen, die die Gleichung (9.28) für beliebige x erfüllen. Wie das Beispiel zeigt, ist die Antwort nicht eindeutig — die allgemeine Lösung von (9.28) umfasst eine ganze Lösungsschar, die durch den Parameter c parametrisiert wird. Die Situation ist direkt vergleichbar mit der bei Iterierten Abbildungen: dort sucht man nach einer Folge (also auch einer Funktion, nur dass der Definitionsbereich die natürlichen Zahlen sind), die die Iterierte Abbildung erfüllt. Die allgemeine Lösung enthält auch dort einen freien Parameter, der erst durch Angabe der Anfangsbedingung festgelegt wird.

Der Parameter σ ist ein Maß für die Breite der "Gauß-Glocke", der Vorfaktor $(2\pi)^{-1/2}\sigma^{-1}$ ist so gewählt, dass die Fläche zwischen dem Graph der Funktion und der Abszisse gerade Eins beträgt.[4] Für die Ableitung der Gauß-Funktion (9.32) erhält man mittels (9.22):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_{\text{Gauß}}(x) = -\frac{x}{\sigma^2\sqrt{2\pi\sigma^2}}\ \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} = -\frac{x}{\sigma^2} f_{\text{Gauß}}(x)\ . \tag{9.33}$$

Die Ableitung verschwindet also für $x = 0$, $x \to -\infty$ und $x \to \infty$, ist positiv für negative x-Werte und negativ für positive x-Werte.

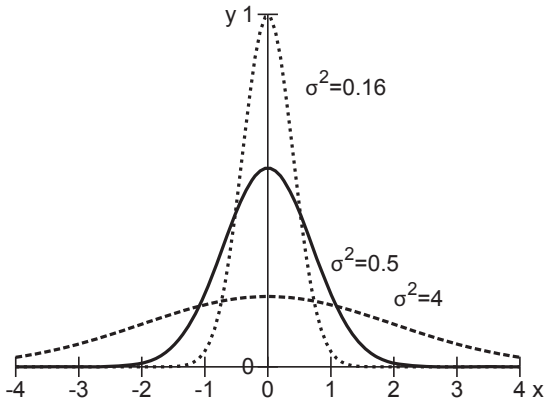


Abbildung 9.4: Graph der Gauß-Funktion $f_{\text{Gauß}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\ \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ für drei Werte des Parameters σ. Je größer σ ist, umso breiter und flacher ist die Gauß-Funktion, die Fläche zwischen dem Graph der Funktion und der Abszisse ist aber immer genau Eins.

Wie berechnet man die Ableitung von Exponentialfunktionen zu einer beliebigen Basis $a \neq \mathrm{e}$? Nach Formel (3.34) gilt $a^x = \mathrm{e}^{x\ln(a)}$. Wenden wir nun Gleichung (9.30) an, so folgt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\, a^x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\, \mathrm{e}^{x\ln(a)} = \ln(a)\, \mathrm{e}^{x\ln(a)} = \ln(a)\, a^x\ . \tag{9.34}$$

9.3.2 Potenzreihenentwicklung der Exponentialfunktion

Können wir die Exponentialfunktion als eine Potenzreihe (siehe auch Beispiel 6 in Abschnitt 9.2.1) schreiben, also auf die Form $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ bringen?

Dazu müssten nach (9.27) – (9.29) genau zwei Eigenschaften erfüllt sein: erstens muss die Potenzreihe an der Stelle $x = 0$ den Wert Eins annehmen, zweitens muss die Ableitung der Potenzreihe *für alle* x genau mit ihr identisch sein.

Die erste Eigenschaft kann dadurch erfüllt werden, dass man $a_0 = 1$ setzt – alle Potenzen x^k mit $k > 0$ verschwinden ja an der Stelle $x = 0$.

Die zweite Eigenschaft erfordert etwas mehr Arbeit: Leiten wir $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ nach x ab, erhalten wir: $e^x = \sum_{k=1}^{n} k{\cdot}a_k x^{k-1}$. Können wir aber die Gleichung

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \sum_{k=1}^{n} k{\cdot}a_k x^{k-1}\ . \tag{9.35}$$

[4] Die Gauß-Funktion spielt eine derart wichtige Rolle in der Mathematik und allen empirischen Wissenschaften, dass sie auf jedem Zehn-Mark-Schein abgedruckt ist...

mit festen Koeffizienten a_k *für alle* x erfüllen? Dies ist nur dann möglich, wenn die Koeffizienten jeder Potenz von x auf der linken und rechten Seite der Gleichung übereinstimmen. Betrachtet man beispielsweise die l-te Potenz auf beiden Seiten, so muss man also links $k = l$ setzen, rechts $k - 1 = l$. Daraus ergibt sich die Bedingung

$$ka_k = a_{k-1} \quad \text{für alle } 0 < k \leq n \ . \tag{9.36}$$

Falls n endlich ist, gilt zusätzlich $a_n = 0$. Dann muss jedoch wegen $ka_k = a_{k-1}$ auch a_{n-1}, dann mit dem gleichen Argument auch $a_{n-2}, \ldots, a_0$ verschwinden, im Widerspruch zur Forderung $a_0 = 1$. Will man also eine Lösung erhalten, muss man die Reihe zu beliebig hohen n fortsetzen.

Dividiert man nun beide Seiten von (9.36) durch k, erhält man eine durch $a_k = a_{k-1}/k$ rekursiv definierte Folge. Mit $a_0 = 1$ ist das k-te Glied dann gerade durch $a_k = 1/k!$ gegeben. Damit haben wir die erwünschte Potenzreihendarstellung der Exponentialfunktion gefunden:

$$\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \ . \tag{9.37}$$

Zur Probe differenziere man die rechte Seite der Gleichung nach x und überzeuge sich, dass die Ableitung der Potenzreihe mit der Potenzreihe selbst genau übereinstimmt!

Damit haben wir an einem Beispiel gesehen, wie man eine bekannte Funktion vollkommen neu als eine Potenzreihe darstellen kann. In den nächsten Kapiteln werden wir die Potenzreihendarstellungen der Sinus- und Cosinusfunktion herleiten und dann auch erkennen, dass ein überraschender und enger Bezug zwischen diesen drei wichtigen Funktionstypen besteht. Potenzreihen bieten darüber hinaus oft die Möglichkeit, Funktionen zu analysieren, für die keine kompakten Beschreibungen wie $f(x) = e^x$ existieren. Sie sind deshalb von großer Bedeutung in der Mathematik und den Natur- und Ingenieurwissenschaften.

9.3.3 Ableitung der Logarithmusfunktion

Der natürliche Logarithmus ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion. Setzen wir in Formel (9.17) also $f(x) = \ln(x)$ und $f^{-1}(x) = e^x$, erhalten wir:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln(x)\bigg|_{x_0} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\ln(x_0)}} = \frac{1}{x_0} \ .$$

Notiz (Ableitung der Logarithmusfunktion):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln(x) = \frac{1}{x} \quad \text{für alle } x > 0 \tag{9.38}$$

Mit Hilfe von Gleichung (3.38) ergibt sich daraus die Ableitung des Logarithmus zur Basis a zu

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \log_a(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\frac{1}{\ln(a)} \ln(x) \right) = \frac{1}{\ln(a)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln(x) = \frac{1}{\ln(a)\ x} \ . \tag{9.39}$$

BEISPIEL : **Ausblick: Ableitung der Funktion $f(x) = x^x$:**

Da $x^x = \mathrm{e}^{x \ln x}$, folgt aus der Kettenregel, Produktregel und Gleichung (9.39): $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^x = (1 + \ln x) x^x$.

9.4 Höhere Ableitungen

In Kapitel 9.1 wurde darauf hingewiesen, dass man aus einer differenzierbaren Funktion f eine *neue* Funktion f' erzeugen kann, indem man jedem x den Wert der Ableitung an dieser Stelle zuordnet. Diese Funktion wurde **Ableitung von f** genannt.

Mit Hilfe der Differentiation kann also aus der ursprünglichen Funktion f eine neue Funktion f' erzeugt werden. Diese kann ebenfalls auf Differenzierbarkeit untersucht werden: Falls auch die Funktion f' differenzierbar ist, kann die **zweite Ableitung von f** gebildet werden, für die man auch

$$(f')' = f'' = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} f \tag{9.40}$$

schreibt. Falls diese Funktion wiederum differenzierbar ist, kann die dritte Ableitung f''' gebildet werden etc. Diese Ableitungen werden auch als $\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}$ oder $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} f$ geschrieben und für $n > 1$ **höhere Ableitungen** genannt.

BEISPIELE:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^2 = 2x \ , \ \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} x^2 = 2 \ , \ \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} x^2 = 0 \quad \text{für } n > 2 \ .$$

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \exp(ax) = a^n \exp(ax) \quad \text{für alle } n \in \mathbf{N} \ .$$

9.5 Taylor-Entwicklung

Wie in Kapitel 9.1.1 beschrieben, ist die Tangente an eine differenzierbare Funktion an der Stelle x_0 durch die lineare Gleichung

$$y(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) \tag{9.41}$$

gegeben. In *linearer Näherung* stellt (9.41) also die beste Beschreibung von f nahe x_0 dar:

$$y(x_0) = f(x_0) \qquad \text{und} \qquad y'(x_0) = f'(x_0) \tag{9.42}$$

Will man jedoch die Funktion f in der Nähe der Stelle x_0 noch genauer als allein durch ihre Tangentengleichung charakterisieren, kann man sich die Frage stellen, welche *quadratische Funktion* man auf der rechten Seite von (9.41) addieren sollte, so dass auch die zweite Ableitung von f richtig wiedergegeben wird. Da weiterhin $y(x_0) = f(x_0)$ gelten soll, addieren wir eine Parabelfunktion mit Scheitel an der Stelle $x = x_0$, machen also den Ansatz

$$y(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + c \cdot (x - x_0)^2 \tag{9.43}$$

und versuchen, den Parameter c so zu bestimmen, dass zusätzlich zu (9.42) auch gilt:

$$y''(x_0) = f''(x_0) \ . \tag{9.44}$$

Setzt man diese Forderung in (9.43) ein, erhält man

$$2c = f''(x_0) \ , \tag{9.45}$$

so dass

$$y(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 \ . \tag{9.46}$$

Gleichung (9.46) stellt damit die beste Näherung von f im Punkt x_0 durch eine quadratische Funktion dar.

Erweitert man dieses Verfahren auf kubische und höhere Terme in $(x - x_0)$, erhält man — immer unter der Voraussetzung, dass die entsprechenden Ableitungen existieren — als Näherung in m-ter Ordnung:

$$y(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{m} \frac{(x - x_0)^k}{k!} \left. \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} f(x) \right|_{x_0} . \tag{9.47}$$

Die rechte Seite von (9.47) stellt eine endliche Reihe von Potenzfunktionen dar, oder anders ausgedrückt: die Teilsumme einer Folge, deren n-tes Glied durch $\frac{(x-x_0)^k}{k!} \left. \frac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}x^k} \right|_{x_0}$ gegeben ist. Siehe auch Beispiel 6 in Abschnitt 9.2!

Die Konvergenz von $y(x)$ gegen $f(x)$ für $m \to \infty$ wird durch den folgenden und sehr wichtigen **Satz von Taylor** [1685-1731] sichergestellt:

Satz von Taylor:
Wenn die Funktion $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, x \mapsto f(x)$ auf dem Interval $[a, b]$ Ableitungen jeder Ordnung besitzt und es Konstanten α und C gibt, so dass

$$\left| \frac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}x^k}(x) \right| \leq \alpha C^k \qquad \text{für alle } x \in [a, b] \text{ und alle } k \in \mathbf{N} \text{ ist,} \tag{9.48}$$

dann gilt für $x_0 \in [a, b]$:

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x - x_0)^k}{k!} \frac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}x^k}(x_0) . \tag{9.49}$$

Die Bedeutung dieses Satzes kann nicht genügend betont werden:

Die **Taylor-Entwicklung** (9.49) erlaubt es, eine gegebene Funktion f *an jeder beliebigen Stelle x mit jeder gewünschten Genauigkeit* zu berechnen — und zwar allein mit Hilfe der Funktions- und Ableitungswerte an einer einzigen Stelle! Eine entscheidende Voraussetzung muss f jedoch erfüllen: die Funktion muss Ableitungen jeder Ordnung besitzen. Diese Forderung ist für viele wichtige Funktionen (Polynome, Exponentialfunktion, Logarithmus, Sinus- und Cosinusfunktion ...) gegeben.

BEMERKUNG: Die Bedingung (9.48) im Satz von Taylor garantiert die Konvergenz der Potenzzreihe (9.47) für $m \to \infty$. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, ist nicht sichergestellt, ob die Potenzreihe zu $f(x)$ konvergiert oder ob sie überhaupt konvergiert.

BEISPIEL 1: **Quadratfunktion:**

Für die Quadratfunktion $f(x) = x^2$ gilt: $f'(x_0) = 2x_0$, $f''(x_0) = 2$, alle höheren Ableitungen verschwinden. Damit gilt: $f(x) = x_0^2 + 2 \cdot x_0 \cdot (x - x_0) + 1/2 \cdot 2 \cdot (x - x_0)^2 = ... = x^2$. Die Taylor-Entwicklung der Quadratfunktion ist also identisch mit der Ausgangsfunktion. Dieses Ergebnis muss auch allgemein auf alle endlichen Polynome zutreffen, da die Taylor-Entwicklung jeder Funktion mit nur endlich vielen von Null abweichenden Ableitungen eine endliche Reihe von Potenzfunktionen zuordnet. Da alle Ableitungen nach Definition an der Stelle x_0 übereinstimmen, müssen auch die Koeffizienten in der Potenzreihe übereinstimmen, so dass man wieder das Ausgangspolynom erhält. Interessanter ist das nächste Beispiel:

BEISPIEL 2: **Exponentialfunktion:**

Wir wissen schon, dass $\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}e^x = e^x$. Wählen wir nun speziell $x_0 = 0$, so gilt $\frac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}x^k}(0) = 1$ und aus (9.49) folgt dann:

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \ . \tag{9.50}$$

Die Taylorreihe der Exponentialfunktion stimmt also genau mit der Potenzreihe (9.37) überein! Siehe auch Abbildung 9.5.

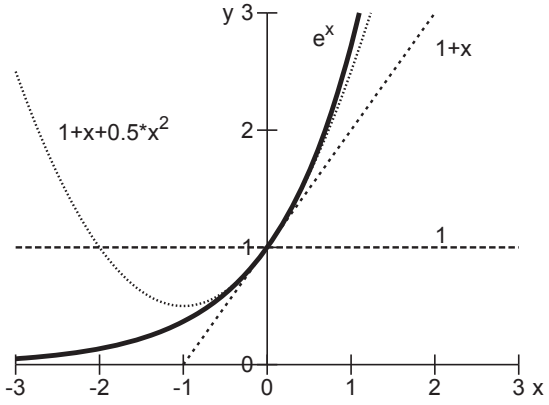


Abbildung 9.5: Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ und Näherungen mit Hilfe der Taylor-Entwicklung.

BEISPIEL 3: **Logarithmusfunktion:**

$f(x) = \ln(x)$. Hier gilt für $x_0 > 0$: $f'(x_0) = x_0^{-1}$, $f''(x_0) = -x_0^{-2}$, $f'''(x_0) = 2x_0^{-3}$, und allgemein: $\frac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}x^k}(x_0) = (-1)^{k+1}\frac{(k-1)!}{x^k}$. Entwickelt man den Logarithmus um $x_0 = 1$, kann man weiterhin zeigen, dass die Reihe für $0 < x \leq 2$ konvergiert, und dass gilt:

$$\ln(x) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{(x-1)^k}{k} \qquad \text{für} \quad 0 < x \leq 2 \ . \tag{9.51}$$

Wenn wir jetzt in (9.51) noch die Variablensubstitution $y = x - 1$ vornehmen, erhalten wir die sogenannte **Logarithmusreihe**:

$$\ln(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{y^k}{k} \qquad \text{für} \quad -1 < y \leq 1 \ . \tag{9.52}$$

Für $y = 1$ ergibt sich aus (9.52) die schöne Summenformel

$$\ln(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots \ . \tag{9.53}$$

Die rechte Seite von (9.53) kennen wir bereits als die alternierende harmonische Reihe!

BEMERKUNG: Gleichung (9.51) gilt nur für $0 < x \leq 2$. Will man den Logarithmus für $x > 2$ in eine Taylorreihe entwickeln, so suche man eine Zahl $a \in \mathbf{R}$, deren Logarithmus bekannt ist und für die $x/a \in (0, 2]$ gilt. Dann benütze man

die Identität $\ln(x) = \ln(a) + \ln(x/a)$ und wende (9.51) auf x/a an. Da die endliche Reihe (9.47) am schnellsten konvergiert, wenn ihr Argument möglichst nahe an x_0 liegt — hier $x_0 = 1$ — wähle man a am besten so, dass $|x - 1|$ möglichst klein ist.

9.6 Kurvendiskussion

Mit den jetzt bekannten Methoden können Sie das Verhalten einer beliebigen reellen Funktion im Detail untersuchen. Damit können Sie nicht nur den Verlauf von Polynomen und speziellen Funktionen wie $f(x) = \ln(x)$ verstehen, sondern auch zusammengesetzte Funktionen wie $f(x) = \exp[x^2 + \ln(x)]$. Selbst ohne Computer werden Sie dabei wesentliche Eigenschaften der betrachteten Funktion aufschlüsseln können. Gegenüber rechnergestützten Verfahren haben Sie den zusätzlichen Vorteil, Auswirkungen von Parameterveränderungen auf den Funktionsverlauf sofort voraussagen zu können.

Bei der Kurvendiskussion empfiehlt sich das folgende schrittweise Schema. Dabei sollten Sie Ihre Ergebnisse gleich in eine erste Skizze eintragen, um sich so Schritt für Schritt ein immer genaueres "Bild" vom Graph der betrachteten Funktion machen zu können.

1. Definitionsbereich, Singularitäten und (versteckte) Symmetrien

Für welche Argumente x ist $f(x)$ überhaupt definiert? Gibt es Stellen, an denen f singulär ist? Wechselt die Funktion an diesen Stellen ihr Vorzeichen?

Ist die Funktion periodisch oder weist sie Symmetrieeigenschaften auf? Ist f insbesondere gerade oder ungerade (siehe auch Kapitel 2.2)? Falls nein: gibt es vielleicht eine Variablentransformation $\tilde{x} = x - a$, so dass die Funktion in der neuen Variablen $\tilde{x}$ gerade oder ungerade ist?

2. Nullstellen

Für welche Argumente x ist der Funktionswert gleich Null? Die Antwort auf diese Frage erfordert die Lösung der Gleichung $f(x) = 0$. Für lineare und quadratische Funktionen kann diese Gleichung gelöst werden (siehe auch Kapitel 2.3). In vielen Fällen (z.B. Polynome höheren Grades) kann die Frage nach der exakten Lage von Nullstellen jedoch nur näherungsweise beantwortet werden.

3. Asymptotisches Verhalten

(A) Falls sich das Definitionsgebiet für positive und/oder negative x bis unendlich erstreckt: Können Sie qualitativ abschätzen, wie sich die Funktion asymptotisch verhält? Welche Werte erhalten Sie für $\lim_{x\to\infty} f(x)$ beziehungsweise $\lim_{x\to-\infty} f(x)$?

(B) Falls das Definitionsgebiet nach unten und/oder oben beschränkt ist: Wie verhält sich die Funktion an den Rändern?

4. Stetigkeit

Gibt es Argumente x, an denen $f(x)$ springt? Wenn ja: Um welchen Betrag und in welcher Richtung?

5. Differenzierbarkeit

Für welche x ist f differenzierbar? Wie lautet die erste Ableitung? Für welche x existiert auch die zweite Ableitung? Wie lautet sie?

6. Monotonie

Für welche Teilintervalle des Definitionsbereichs ist die Funktion monoton wachsend, für welche monoton fallend? Wo gilt strenge Monotonie?

(A) Falls die Funktion auf dem ganzen Definitionsbereich differenzierbar ist, können diese Fragen mit Hilfe der ersten Ableitung untersucht werden. Es gilt:

$$f'(x) > 0 \Rightarrow f \text{ wächst streng monoton.}$$

$$f'(x) < 0 \Rightarrow f \text{ fällt streng monoton.}$$

(B) An Stellen, an denen f nicht differenzierbar ist, greife man auf die Definition der Monotonie in Kapitel 2.1 zurück.

7. Lokale Extrema

Wo liegen lokale Extremwerte der Funktion?

(A) Falls die erste und die zweite Ableitung der Funktion auf dem gesamten Definitionsbereich existieren, können Sie wie folgt vorgehen:

Bestimmen Sie zuerst die Nullstellen der ersten Ableitung. Aus dem Vorzeichen der zweiten Ableitung an diesen Stellen ist dann ersichtlich, ob es sich um ein Maximum oder Minimum handelt:

$$f''(x_0) > 0 \Rightarrow f \text{ hat ein Minimum an der Stelle } x_0.$$

$$f''(x_0) < 0 \Rightarrow f \text{ hat ein Maximum an der Stelle } x_0.$$

Welchen Wert nimmt die Funktion an den lokalen Extrema an? Tragen Sie diese Punkte in Ihre Skizze ein!

Hat die Funktion f ein lokales Extremum an der Stelle x_0, muss die Tangente an den Graph von f im Punkt $(x_0, (f(x_0))$ parallel zur Abszisse verlaufen. Diese waagerechten Tangenten können leicht gezeichnet werden — und sind sehr hilfreich für die weitere Untersuchung.

(B) An Stellen, an denen die erste und/oder zweite Ableitung der Funktion f (wie im Fall der Betragsfunktion) nicht existiert, überlege man sich explizit, ob ein Minimum oder Maximum vorliegt.

8. Absolute Extrema

Welches ist das größte Maximum und das kleinste Minimum? Falls der Definitionsbereich ein Intervall ist, betrachte man auch explizit das Verhalten der Funktion an den Rändern des Intervalls. Auf Ableitungen der Funktion beruhende Methoden greifen an diesen Stellen nicht, wie das Beispiel $f : [0, 1] \to \mathbf{R}, x \mapsto x$ zeigt. Die zweite Ableitung dieser Funktion ist identisch Null, und trotzdem existiert ein Maximum und ein Minimum (siehe auch Kapitel 8.2.1).

9. Krümmungsverhalten

Um das Krümmungsverhalten einer Funktion zu beschreiben, werden in der Literatur oft verschiedene Begriffe benutzt. Wir verwenden folgende Notation:

Definition (Krümmungsverhalten): Eine Funktion f ist

- **konvex**, wenn $f''(x) > 0$ gilt,
- **konkav**, wenn $f''(x) < 0$ gilt.

Wenn $f''(x_0) > 0$ ist, so bedeutet dies, dass die erste Ableitung an der Stelle x_0 wächst, der Graph der Funktion also steiler wird: die Kurve krümmt sich bei x_0 nach oben (f ist konvex). Umgekehrt impliziert $f''(x_0) < 0$ eine Krümmung an der Stelle x_0 nach unten (f ist konkav). Falls $f''(x_0)$ verschwindet und $f'''(x_0) \neq 0$ liegt ein **Wendepunkt** vor.

BEISPIEL: Zur Illustration betrachten Sie die Funktionen $f_1(x) = x^2$ und $f_2(x) = -x^2$.

10. Graphische Darstellung

Nachdem Sie die obige Liste durchgegangen sind und Ihre Ergebnisse in einer ersten Skizze dargestellt haben, sollten Sie eine genauere Darstellung anfertigen. Dabei kann es von Fall zu Fall vorteilhaft sein, die Funktion an einigen Stellen exakt zu berechnen, wobei Ihnen hier ein Taschenrechner helfen wird. Insbesondere wenn Sie unter Zeitdruck arbeiten, sollten diese Stützpunkte mit Bedacht gewählt werden. Es empfiehlt sich, Funktionswerte vor allem dort explizit zu berechnen, wo Sie eine große Krümmung erwarten, oder in Abschnitten, wo die Funktion und ihre ersten beiden Ableitungen das Vorzeichen nicht wechseln, so dass die obigen qualitativen Methoden nicht greifen.

Weitere Möglichkeiten

Falls Sie am detaillierten Verlauf des Graphen an bestimmten Stellen x_0 besonderes Interesse haben, können Sie dort eine Taylor-Entwicklung durchführen und verfügen damit auch über die entsprechende Tangentengleichung, beziehungsweise über Gleichungen für sich an die Funktion anschmiegende Polynome endlicher Ordnung. Diese sind unter Umständen leicht zu zeichnen und geben Ihnen in der Nähe von x_0 sehr gute Information über das Verhalten der Ausgangsfunktion.

Regel von de l'Hospital

Gelegentlich kommt es vor, dass man den Wert einer Funktion $f(x)$ der Form $f(x) = g(x)/h(x)$ an einer Stelle x_0 bestimmen soll, an der sowohl g als auch h verschwinden oder gegen $\pm\infty$ gehen. Es ensteht also ein unbestimmter Ausdruck der Form $\frac{0}{0}$ bzw. $\frac{\infty}{\infty}$. Hier hilft folgender überraschend einfacher Satz weiter:

Satz (Regel von de l'Hospital):
Die Funktionen g und h seien auf dem Intervall $M \subset \mathbf{R}$ differenzierbar, $x_0 \in M$ und $h'(x_0) \neq 0$. Falls $\lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = 0$ oder $\lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = \pm\infty$, dann gilt

$$\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{h(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{g'(x)}{h'(x)} \; . \tag{9.54}$$

Beweis (Unbestimmter Ausdruck $\frac{0}{0}$):
Unter den Voraussetzungen des Satzes gilt

$$\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{h(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)-0}{h(x)-0} = \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{h(x)-h(x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}}{\frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0}} = \frac{g'(x_0)}{h'(x_0)} \; . \tag{9.55}$$

Hierbei wurde bei der letzten Umformung Gleichung (8.7) verwendet. Um dies zu ermöglichen mußte im obigen Satz $h'(x_0) \neq 0$ gefordert werden.

9.6.1 Ein Beispiel zur Kurvendiskussion: $f(x) = (1+x)\sqrt{1-x^2}$

Definitionsbereich, singuläre Stellen und Symmetrien: Die Funktion ist für $|x| \leq 1$ definiert und weder gerade noch ungerade. Für $|x| \leq 1$ gilt $0 \leq (1+x) \leq 2$ und $0 \leq \sqrt{1-x^2} \leq 1$, so dass f beschränkt ist.

Nullstellen: Die Nullstellen sind $x_1 = -1$ und $x_2 = +1$; zwischen ihnen gilt $f > 0$.

Asymptotisches Verhalten: Schon bekannt — siehe "Nullstellen"!

Stetigkeit: Die Funktion $h(x) = \sqrt{1-x^2}$ ist im Definitionsbereich stetig. Als Produkt von $h(x)$ und der stetigen Funktion $g(x) = 1+x$ ist auch f stetig.

Differenzierbarkeit: Für $|x| < 1$ lauten die ersten beiden Ableitungen von f:

$$f'(x) = \frac{-2x^2 - x + 1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{und} \qquad f''(x) = \frac{2x^3 - 3x - 1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} \; .$$

Monotonie: Die Nullstellen von f' erhält man, indem man diejenigen Nullstellen von $-2x^2-x+1$ bestimmt, die in $(-1,1)$ liegen. Als einzige Nullstelle findet man $x_3 = 1/2$. Im Interval $(-1, 1/2)$ ist f' positiv, also wächst f hier streng, während im Intervall $(1/2, 1)$ f' negativ ist, f also streng fallend ist.

Extrema: $x_3 = 1/2$ ist der einzige Extremwert in $(-1,1)$. Es ist ein Maximum und der zugehörige Funktionswert ist $f(1/2) = 3\sqrt{3}/4$.

Krümmungsverhalten: Zur Bestimmung der Nullstellen von f'' löse man die Gleichung $2x^3 - 3x - 1 = 0$. Eine ihrer Lösungen, nämlich -1 findet man durch Raten. Für die beiden anderen Lösungen hilft folgende Beobachtung:

> **Notiz (Division von Polynomen):**
> Kennt man eine Nullstelle x_0 eines Polynoms $p(x)$ vom Grad n, kann man das Polynom als $p(x) = (x - x_0) \cdot q(x)$ schreiben, wobei $q(x)$ ein Polynom vom Grad $n-1$ ist. Das Polynom $q(x)$ bestimmt man dadurch, dass man $p(x)$ durch $x - x_0$ genauso dividiert, wie man dies für reelle Zahlen tut.

In unserem speziellen Fall erhalten wir $(2x^3 - 3x - 1)/(x+1) = 2x^2 - 2x - 1$. Die beiden anderen Lösungen sind daher durch $(1+\sqrt{3})/2$ und $(1-\sqrt{3})/2$ gegeben.

Von den drei gefundenen Nullstellen liegt nur $x_4 = (1-\sqrt{3})/2 \approx -0.37$ in $(-1,1)$, also ist x_4 die einzige Nullstelle von f''. Im Intervall $(-1, x_4)$ ist f'' positiv, f also konvex, im Intervall $(x_4, 1)$ ist f'' negativ, f also konkav. $x_4 = (1-\sqrt{3})/2$ ist damit der einzige Wendepunkt in $(-1,1)$. Näherungsweise gilt $f(x_4) = 0.59$.

Weitere Details: Mit den obigen Betrachtungen ist der eigentliche "Fragenkatalog" abgearbeitet. Das exakte Verhalten von f in der Nähe von -1 und 1 ist aber noch nicht geklärt — wie läuft $f(x)$ für $x \to -1$ und $x \to 1$ gegen null?

Um diese Frage zu beantworten, betrachten wir die Ableitung f' an diesen beiden Stellen. Für $x \to 1$ konvergiert der Nenner von $f'(x)$ gegen 0, der Zähler gegen -2. Damit divergiert f' — die Funktion hat für $x = 1$ eine senkrechte Tangente.

An der Stelle $x = -1$ konvergieren dagegen sowohl Zähler als auch Nenner gegen 0, so dass wir zuerst einmal nicht wissen, ob auch f' selbst konvergiert. An dieser Stelle hilft

jedoch die Regel von de l'Hospital (9.54) weiter. Die Voraussetzungen dieser Regel treffen ja an der Stelle $x_0 = -1$ auf Zähler und Nenner der Ableitung $f'(x)$ zu. Wir setzen also $g(x) = -2x^2 - x + 1$ und $h(x) = \sqrt{1-x^2}$ und erhalten damit für den rechtsseitigen Grenzwert $\lim_{x\to -1^+} f'(x) = 0$.

Beachten wir noch, dass $f(0) = 1$, erhalten wir näherungsweise den dargestellten Graph. Beachten Sie, dass aus der Abbildung selbst das exakte Verhalten bei -1 nicht ersichtlich ist, und dass das Zeichenprogramm bei $+1$ "ausstieg". So zeigt selbst dieses einfache Beispiel deutlich die Grenzen rein numerischer Verfahren.

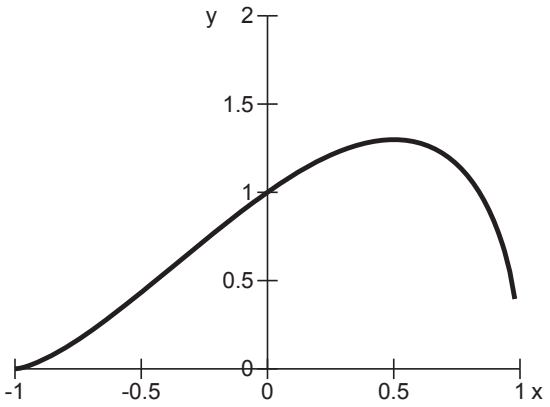


Abbildung 9.6: Computergenerierter Graph der Funktion $f(x) = (1+x)\sqrt{1-x^2}$.

9.7 Aufgaben

1. (Ableitung) Bestimmen Sie die maximalen Definitionsgebiete M der folgenden Funktionen und berechnen Sie die Ableitungen für alle $x \in M$. Hinweis: für die Ableitung der Exponentialfunktion gilt $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x$.

(a) $f(x) = x^2 - 7x^5$

(b) $f(x) = 2x^{3/2} + ax^{-4}$

(c) $f(x) = \dfrac{\frac{1}{2}x^2 + 2}{3x^3 - 4x}$

(d) $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x - b}$

(e) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$

(f) $f(x) = (1 - \gamma x^4)^{-5}$

(g) $f(x) = \mathrm{e}^{-3x^2}$

(h) $f(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}$

(i) $f(x) = \sqrt{x^2+1} - cx$

(j) $f(x) = \mathrm{e}^{k(x-x_0)} + 4\sqrt{x}$

(k) $f(x) = x^2 \cdot \mathrm{e}^{-3x}$

(l) $f(x) = \dfrac{(7x^2-4)^6}{\sqrt{x^2+1}}$

2. (verkürzte Diskussion) Gegeben sind die beiden Funktionen:

$$f(x) = x^3 - 9x \qquad \text{und} \qquad g(x) = x^4 - 5x^2 + 4$$

(a) Wie verhalten sich die Funktionen für sehr große und sehr kleine Werte von x?

(b) Berechnen Sie die Nullstellen!

(c) Welche Symmetrien besitzen die Funktionen?

(d) Berechnen Sie die 1., 2., 3. und 4. Ableitung von $f(x)$ und $g(x)$!

(e) Skizzieren sie die beiden Funktionen!

3. (Ableitung von Polynomen) Gegeben ist folgendes Polynom 4. Grades:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{4} \frac{1}{k+1} x^k$$

(a) Schreiben Sie die Summe aus!

(b) Wie lauten die lineare und die quadratische Näherung von $p(x)$?

(c) Wie verhält sich $p(x)$ für sehr kleine und sehr große Werte von x ?

(d) Berechnen Sie die Ableitung $p'(x) = \mathrm{d}p(x)/\mathrm{d}x$ des Polynoms!

(e) Wie verhält sich die Ableitung $p'(x)$ für sehr kleine und sehr große Werte von x ?

(f) Die Ableitung $p'(x)$ ist wiederum ein Polynom. Welchen Grad hat es?

4. (Ableitung) Bestimmen Sie die maximalen Definitionsgebiete M der folgenden Funktionen und berechnen Sie die Ableitungen für alle $x \in M$.

(a) $f(x) = x\mathrm{e}^{-x^2}$

(b) $f(x) = (x-1)\mathrm{e}^{-(x-1)^2}$

(c) $f(x) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}$

(d) $f(x) = \ln(x)$

(e) $f(x) = \log_{10}(x)$

(f) $f(x) = x\log_2(x)$

(g) $f(x) = x^x$

(h) $f(x) = ax^2 + bx + c$

(i) $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \ , \ a_k \in \mathbf{R}$

5. (Ableitung der Umkehrfunktion) Wir betrachten die Funktion $f(x) = \ln(x+1)$.

(a) Wie geht $f(x)$ aus der Funktion $g(x) = \ln(x)$ hervor?

(b) Welchen Definitions- und welchen Wertebereich hat $f(x)$?

(c) Für welche x ist f umkehrbar? Berechnen Sie die Umkehrfunktion f^{-1} von f !

(d) Skizzieren sie die Graphen von $f(x)$ und $f^{-1}(x)$!

(e) Berechnen Sie zuerst die Ableitung von f^{-1} und dann damit die Ableitung von $f(x)$!

6. (Taylorentwicklung) Gegeben seien die Funktionen Cosinus hyperbolicus und Sinus hyperbolicus:

$$f(x) = \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \text{und} \qquad g(x) = \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

(a) Berechnen Sie die ersten vier Ableitungen der beiden Funktionen und versuchen Sie diese jeweils durch $\cosh(x)$ oder $\sinh(x)$ auszudrücken! Geben Sie eine kompakte Form der n-ten Ableitung $f^{(n)}$ bzw. $g^{(n)}$ an!

(b) Stellen Sie die Taylorreihen von $\cosh(x)$ und $\sinh(x)$ für $x_0 = 0$ auf!

(c) Wie lauten die quadratischen Näherungen von $\cosh(x)$ und $\sinh(x)$ an der Stelle $x = 0$? Skizzieren Sie die Graphen der Näherungen zusammen mit denen der ursprünglichen Funktionen f und g!

(d) Wie hängen diese mit der Taylorreihe der Exponentialfunktion zusammen? Berechnen Sie dazu $\cosh(x) + \sinh(x)$ direkt und als Summe der entsprechenden Taylorreihen!

7. (Gauß-Funktion) Die Gauß-Funktion ist definiert als

$$f_{\text{Gauß}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

(a) Berechnen Sie die erste und die zweite Ableitung der Gauß-Funktion $f'_{\text{Gauß}}$ und $f''_{\text{Gauß}}$!

(b) Wie verhalten sich $f_{\text{Gauß}}$, $f'_{\text{Gauß}}$ und $f''_{\text{Gauß}}$ für sehr große und sehr kleine Werte von x ?

(c) Versuchen Sie $f_{\text{Gauß}}(-x)$, $f'_{\text{Gauß}}(-x)$ und $f''_{\text{Gauß}}(-x)$ jeweils durch $f_{\text{Gauß}}(x)$, $f'_{\text{Gauß}}(x)$ und $f''_{\text{Gauß}}(x)$ auszudrücken. Was sagt das Ergebnis über die Symmetrieeigenschaften der drei Funktionen aus?

(d) Berechnen Sie die Nullstellen der Gauß-Funktion und ihren beiden Ableitungen! Was bedeutet die Nullstelle von $f'_{\text{Gauß}}$ für $f_{\text{Gauß}}$? Was bedeuten die Nullstellen von $f''_{\text{Gauß}}$ für $f'_{\text{Gauß}}$? Was bedeuten die Nullstellen von $f''_{\text{Gauß}}$ für $f_{\text{Gauß}}$? Was beschreibt also der Parameter σ ?

(e) Berechnen Sie die Funktionswerte an der Stelle $x = 0$!

(f) Skizzieren Sie die Graphen der drei Funktionen $f_{\text{Gauß}}$, $f'_{\text{Gauß}}$ und $f''_{\text{Gauß}}$! Berücksichtigen Sie dabei die Ergebnisse aus (b)–(e), und dass die Funktionen durch Ableiten auseinander hervorgehen.

8. (Fortsetzung von Funktionen) Die Funktion f sei für $x < 0$ durch $g(x) = \mathrm{e}^x$ gegeben. Sie soll durch die Funktion $h(x) = a + bx$ für $x \geq 0$ fortgesetzt werden.

$$f(x) = \begin{cases} g(x) = \mathrm{e}^x & ; \quad x < 0 \\ h(x) = a + bx & ; \quad x \geq 0 \end{cases}$$

(a) Wie müssen a und b gewählt werden, so dass $g(0) = h(0)$ und $g'(0) = h'(0)$?

(b) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $f(x)$!

(c) Berechnen Sie allgemein auch $g''(x)$ und $h''(x)$. Was gilt für die zweite Ableitung der Funktion f an der Stelle $x = 0$?

(d) Es sei nun $h(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$. Bestimmen Sie die Parameter a_k so, daß alle Ableitungen von $g(x)$ und $h(x)$ an der Stelle $x = 0$ übereinstimmen. Wie lautet dann die Funktion $f(x)$?

9. (Beispiel aus der Neurobiologie) In der Netzhaut von Wirbeltieren befindet sich direkt unter den Photorezeptoren ein Netzwerk von sogenannten Horizontalzellen. Wird die Retina mit einem Lichtspalt der Breite $2d$ am Ort $x = 0$ beleuchtet, ergibt ein einfaches Modell folgenden Verlauf der Membranspannung $V(x)$ der Horizontalzellen am Ort in x rechtwinklig zum Spalt:

$$V(x) = \begin{cases} c_1 \exp\left(-\frac{|x|}{\lambda}\right) + E_0 & ; \quad |x| > d \\ c_2 \cosh\left(\frac{x}{\lambda}\right) + E_1 & ; \quad |x| \leq d \end{cases}$$

Darin ist E_0 das Ruhepotential der Zellen im Dunkeln, E_1 ist die Membranspannung, die sich einstellt, wenn die ganze Retina beleuchtet wird, und λ ist die Längskonstante, die beschreibt, wie weit sich eine Änderung der Membranspannung in dem Horizontalzellennetzwerk ausbreitet. c_1 und c_2 sind zwei beliebige Konstanten.

(a) Welche Membranspannung herscht in den Zellen, die weit vom Spalt entfernt sind?

(b) Welche Symmetrie hat die Funktion f ?

(c) Bestimmen Sie die beiden Konstanten c_1 und c_2 so, daß f und f' stetig an den Stellen $x = d$ und $x = -d$ ist!

(d) Skizzieren Sie den Graph der Funktion $f(x)$!

10. (Taylorentwicklung, Kurvendiskussion) Wir wollen beweisen, dass für $|x| \ll 1$ die Abschätzung $\sqrt{1-x^2} \approx 1 - \frac{1}{2}x^2$ gilt. Diese Abschätzung ist von zentraler Bedeutung für die Diskussion von Sinus und Cosinus (siehe Kapitel 10.2.1).

(a) Entwickeln Sie dazu die Funktion $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ in eine Taylorreihe nach x um $x_0 = 0$ und brechen Sie die Entwicklung nach dem quadratischen Term ab.

(b) Führen Sie auch eine Kurvendiskussion der Funktion $f(x)$ und $g(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2$ durch, um ein besseres Verständnis für beide Funktionen und damit auch für die Grenzen der obigen Abschätzung zu erhalten. (Definitionsbereich, Verhalten an den Rändern, Nullstellen, Funktionswert an der Stelle $x = 0$, Symmetrie, Extrema, Skizze).

11. (Taylorreihe) Berechnen Sie die ersten vier Ableitungen der Exponentialfunktion zur Basis $a \in \mathbf{R}^+$, $f(x) = a^x$, und geben Sie dann eine kompakte Formel für die n-te Ableitung an. Benutzen Sie dieses Ergebnis um die Taylorreihe von a^x aufzustellen! Wie hängt diese Reihe mit der Taylorreihe von e^x zusammen?

12. (Kurvendiskussion) Diskutieren Sie die Funktion $g(x) = \cos(ax^2)$ mit $x \in \mathbf{R}$ und $a \in \mathbf{R}^+$.

(a) Wie lautet die erste und zweite Ableitung von g?

(b) Welchen Wert haben $g(0)$, $g'(0)$ und $g''(0)$?

(c) Wie lautet die Taylor-Entwicklung von g um $x_0 = 0$ bis einschließlich des in x quadratischen Terms?

(d) Wie lautet die Tangentengleichung an g im Punkt $x_0 = 0$?

(e) Ist g gerade beziehungsweise ungerade?

(f) Hat g Nullstellen? Wenn ja, wo liegen diese?

(g) Wo liegen die Maxima und Minima von g?

(h) Skizzieren Sie grob den Graph der Funktion g.

Kapitel 10

Trigonometrische Funktionen

Die Funktionen Sinus, Cosinus und die davon abgeleiteten Funktionen Tangens und Cotangens werden zusammen mit ihren Umkehrfunktionen als **trigonometrische Funktionen** bezeichnet. Die trigonometrischen Funktionen sind neben den Potenz-, Exponential- und Logarithmusfunktionen die wichtigsten speziellen Funktionen in der Mathematik und den Naturwissenschaften. Dies kommt zum einen daher, dass sie in der Geometrie, und dabei vor allem in der Trigonometrie ("Dreiecksmessung"), eine zentrale Rolle spielen, zum anderen daher, dass die einfachsten und zugleich wichtigsten Schwingungstypen in biologischen, chemischen oder auch physikalischen Systemen durch sinusförmige Zeitverläufe charakterisiert sind. In Kapitel 14 (Lineare Differentialgleichungen) werden wir zeigen, dass sich ein sinusförmiger Zeitverlauf immer dann ergibt, wenn die Rückstellkräfte in einem schwingungsfähigen System proportional zur Größe der Auslenkung aus der Ruhelage sind. In der Physik haben Sie dieses Phänomen unter den Begriffen "Hookesches Federpendel" oder "harmonischer Oszillator" kennengelernt.

10.1 Winkelmessung und ebene Dreiecke

Bevor wir im Detail auf die trigonometrischen Funktionen eingehen, wollen wir die wichtigsten Eigenschaften ebener Dreiecke wiederholen.[1] Hierbei stoßen wir sofort auf das Konzept "Winkel zwischen zwei Geraden" und damit auch auf die Frage, wie man die Größe eines Winkels messen soll.

Im alltäglichen Leben werden Winkel im **Gradmaß** gemessen — ein rechter Winkel entspricht 90°, ein Vollwinkel 360°. Warum aber sollte ein rechter Winkel gerade 90° entsprechen, warum nicht 100°, 42° oder 117.18°? A priori gibt es keinen Grund, die Zahlen 90 beziehungsweise 360 in irgendeiner Weise auszuzeichnen. Dagegen existiert sehr wohl eine ausgezeichnete natürliche Einheit für die Winkelmessung: Betrachtet man nämlich einen Kreis mit Radius r, so ist sein Umfang U durch die Formel $U = 2\pi r$ gegeben. Weiterhin ist die Länge x eines Kreisbogens proportional zum eingeschlossenen Winkel α. Wenn wir den Winkel im Gradmaß messen und der Kreisbogen den Radius Eins hat, dann beträgt die Länge eines Kreisbogens also gerade $x = \alpha \cdot \pi/180°$.

Definieren wir die Größe eines Winkels als Länge des zugehörigen Kreisbogens eines Einheitskreises[2], so haben wir ein natürliches Maß ohne jegliche Beliebigkeit gewonnen.

[1] In der Umgangssprache und im weiteren Text werden wir unter dem Begriff "Dreieck" immer ein ebenes Dreieck verstehen, also eine durch drei sich paarweise schneidende Geraden begrenzte Teilmenge einer Ebene. Davon zu unterscheiden sind sphärische Dreiecke, durch drei Großkreise begrenzte Teilmengen einer Kugeloberfläche. Anmerkung: Für sphärische Dreiecke treffen die Sätze dieses Abschnitts *nicht* zu. Machen Sie sich dies am Beispiel der Winkelsumme eines Dreiecks deutlich, dessen Ecken der Nordpol und zwei Punkte auf dem Äquator sind! Denken Sie auch über die Eigenschaften sphärischer *Zweiecke* nach!

[2] Ein Kreis mit Radius Eins

Dieses Maß heißt **Bogenmaß**:

Definition (Gradmaß und Bogenmaß):
Ein rechter Winkel entspricht im Gradmaß 90°, im Bogenmaß entspricht er $\pi/2$.
Allgemein gilt:
Ein Winkel der Größe α im Gradmaß hat im Bogenmaß die Größe $x = \frac{\alpha \cdot \pi}{180°}$.

Notiz: Von nun an werden wir Winkel immer im Bogenmaß messen !

Umrechnungstabelle für spezielle Werte:

Winkel im Gradmaß	Winkel im Bogenmaß
30°	$\pi/6$
45°	$\pi/4$
60°	$\pi/3$
90°	$\pi/2$
180°	π
270°	$3\pi/2$
360°	2π

Satz (Winkelsumme im Dreieck):
Die Summe der drei Innenwinkel eines Dreiecks beträgt π (im Gradmaß: 180°).

Beweis:
Vorbemerkung: Zwei Geraden sind genau dann parallel, wenn sie von einer beliebigen dritten Gerade unter gleichem Winkel geschnitten werden. Zieht man also durch den Punkt C eine zur Basis $\overline{AB}$ parallele Gerade (siehe 10.1), so entspricht die Summe der Innenwinkel des Dreiecks ABC gerade dem halben Vollwinkel. □

Satz (Flächeninhalt eines Dreiecks):
Bezeichnen h_a, h_b und h_c die Höhen eines Dreiecks mit den Seiten a, b und c, so gilt für den Flächeninhalt:

$$F_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c \ . \tag{10.1}$$

Beweis:
Der Flächeninhalt eines Rechtecks mit den Seiten a und b beträgt $F_{\text{Rechteck}} = ab$.
Wie Abbildung 10.2 zeigt, ist der Flächeninhalt eines Parallelogramms gleich dem Produkt der Länge einer Seite und der dazugehörigen Höhe ist, $F_{\text{Parallelogramm}} = ah_a = bh_b$.
Daraus folgt Formel (10.1) für den Flächeninhalt eines (beliebigen) Dreiecks. □

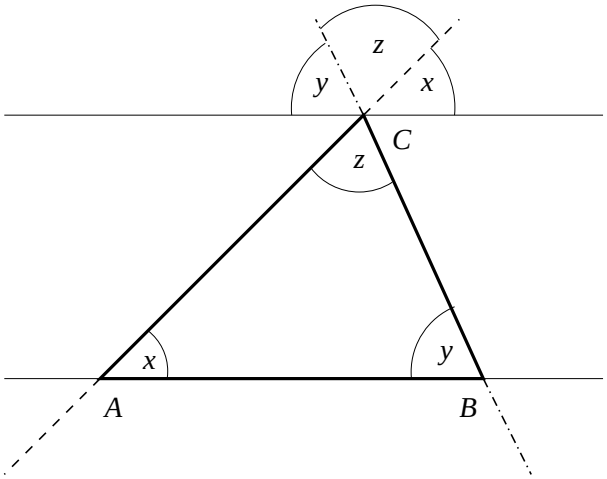


Abbildung 10.1: Winkelsumme im Dreieck.

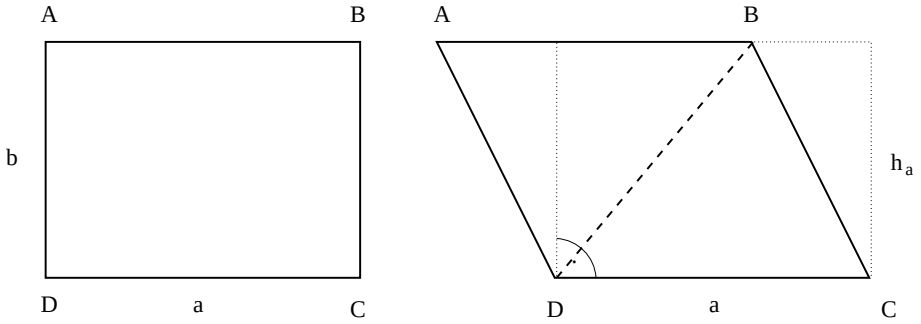


Abbildung 10.2: Flächeninhalt von Rechteck, Parallelogramm und der damit definierten Dreiecke DBC bzw. ABD.

Erinnerung:
In einem *rechtwinkligen* Dreieck wird die längste Seite **Hypothenuse** genannt, die beiden anderen Seiten heißen **Katheten**.

Satz von Pythagoras:
In einem rechtwinkligen Dreieck mit Katheten a und b und Hypothenuse c gilt

$$a^2 + b^2 = c^2 \ . \tag{10.2}$$

Beweis:

Mehrere schöne Beweise, mit denen Sie den Satz des Pythagoras nachvollziehen können, finden Sie in der deutschsprachigen Wikipedia unter `http://de.wikipedia.org/wiki/Satz_des_Pythagoras#Beweise`.

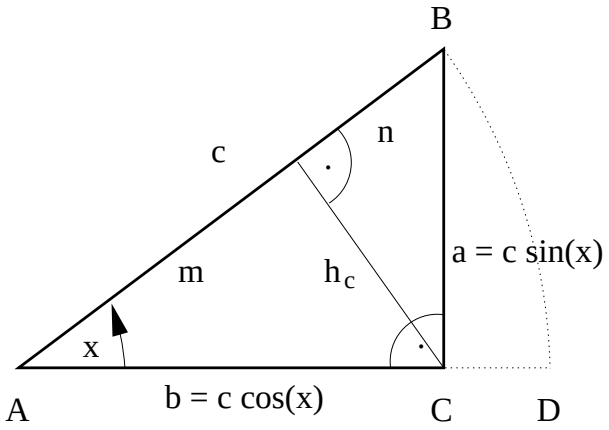
10.2 Sinus und Cosinus

Geometrische Definition:
In einem *rechtwinkligen* Dreieck (siehe Abbildung 10.3) sind **Sinus** und **Cosinus** als Verhältnis der dem betrachteten Winkel gegenüberliegenden beziehungsweise der am Winkel anliegenden Kathete zur Hypothenuse definiert,

$$\sin(x) = \frac{a}{c} \qquad \text{Merkhilfe : Sinus} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypothenuse}}$$

$$\text{und} \tag{10.3}$$

$$\cos(x) = \frac{b}{c} \qquad \text{Merkhilfe : Cosinus} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypothenuse}}$$



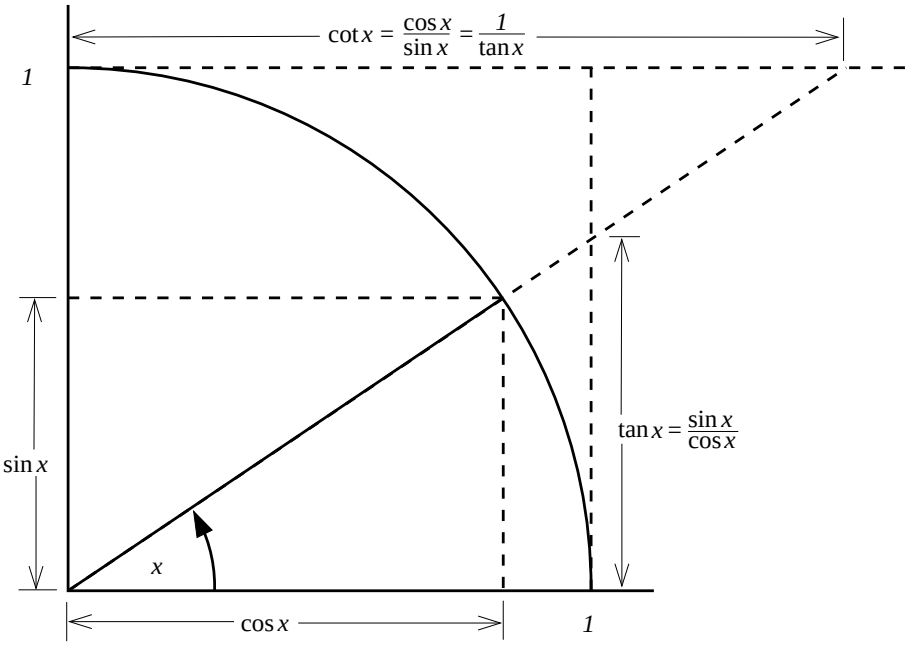


Abbildung 10.3: Bestimmungsgrößen eines rechtwinkligen Dreiecks und trigonometrische Funktionen.

Mit dem Satz von Pythagoras (10.2) folgt aus (10.3) die extrem hilfreiche Beziehung

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \ . \tag{10.4}$$

BEMERKUNG: Die Notation $\sin^2(x)$ bezeichnet nach der allgemeinen Konvention eigentlich die Funktion $\sin(\sin(x))$, ganz korrekt sollte man daher in (10.4) $[\sin(x)]^2$ und $[\cos(x)]^2$ schreiben. Wenn jedoch keine Verwechslungsgefahr besteht, zieht man die kürzere Notation $\sin^2(x)$ und $\cos^2(x)$ vor.

10.2.1 Näherungsformeln für kleine Winkel

Im Bogenmaß ist die Länge des Kreisbogens BD in Abbildung 10.3 durch $c \cdot x$ gegeben. Für kleine x ist diese Größe näherungsweise gleich der Länge $c \cdot \sin x$ des Lotes BC, so dass gilt:

$$\sin(x) \approx x \qquad \text{für} \qquad |x| \ll 1 \ . \tag{10.5}$$

Mit Hilfe des Satzes von Pythagoras erhält man aus (10.5) für den Cosinus die Näherungsformel

$$\cos(x) = \sqrt{1 - \sin^2(x)} \approx \sqrt{1 - x^2} \approx 1 - \frac{1}{2}x^2 \qquad \text{für} \qquad |x| \ll 1 \ , \tag{10.6}$$

wobei im letzten Schritt eine Taylorentwicklung der Funktion $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ vorgenommen wurde. Da $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = -1$ gilt $\sqrt{1 - x^2} \approx 1 - \frac{1}{2}x^2$ für $|x| \ll 1$. Die zwei Formeln (10.5) und (10.6) sind von größter praktischer Bedeutung, wenn es darum geht, das Verhalten der Sinus- oder Cosinus-Funktion für kleine Argumente x schnell abzuschätzen.

BEMERKUNG: Die Näherungsformeln (10.5) und (10.6) gelten nur, wenn x im Bogenmaß angegeben ist! (Wie lauten die den Formeln (10.5) und (10.6) entsprechenden Ausdrücke im Gradmaß?)

10.2.2 Sinus

Bis jetzt ist die Sinus-Funktion nur für Winkel $0 \leq x \leq \pi/2$ definiert. Für Winkel außerhalb dieses Intervalls definiert man gemäß Abbildung 10.4:

$$\sin(-x) = -\sin(x) \ , \tag{10.7}$$

$$\sin(x) = \sin(\pi - x) \tag{10.8}$$

und

$$\sin(x + 2\pi) = \sin(x) \ . \tag{10.9}$$

Damit ist die Sinus-Funktion auf ganz $\mathbf{R}$ definiert und hat folgende Eigenschaften:

Symmetrie-Eigenschaften der Sinus-Funktion:
Nach Gleichung (10.7) ist die Funktion $\sin(x)$ eine **ungerade Funktion**, nach (10.8) ist sie **achsensymmetrisch** bezüglich einer zur Ordinate parallelen Gerade durch den Punkt $(\pi/2, 0)$, nach (10.9) ist sie **periodisch** mit Periode 2π.

Spezielle Funktionswerte sind

$$\sin(0) = \sin(\pi) = 0 \ , \tag{10.10}$$

$$\sin(\pi/2) = 1 \tag{10.11}$$

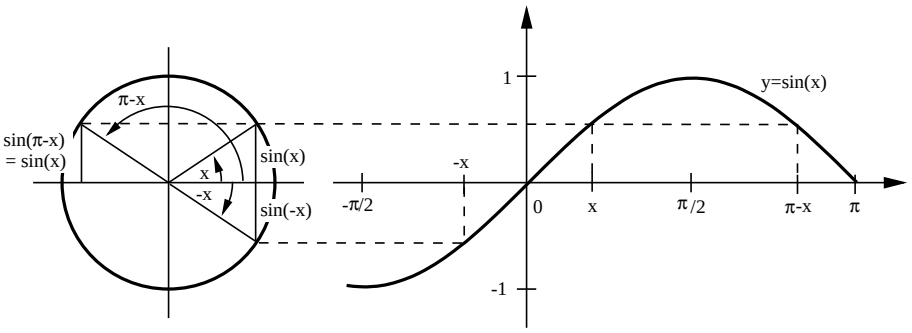


Abbildung 10.4: Sinus-Funktion: Geometrische Motivation und Graph der Funktion $f(x) = \sin(x)$ im Intervall $(-\pi/2, \pi)$.

und

$$\sin(3\pi/2) = -1 \ . \tag{10.12}$$

Später werden wir beweisen, dass die Funktion $f(x) = \sin(x)$ die lineare Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} f(x) = -f(x) \tag{10.13}$$

erfüllt. Die zweite Ableitung der Sinusfunktion ist also bis auf das Vorzeichen identisch mit der Funktion selbst — je positiver (negativer) der Funktionswert ist, um so stärker krümmt sich die Funktion nach unten (nach oben). An der Nullstelle der Funktion verschwindet die zweite Ableitung. Siehe auch nochmals Abbildung 10.4.

10.2.3 Cosinus

Aus Abbildung 10.5 sind die zwei Identitäten

$$\cos(x) = \sin(x + \pi/2) \tag{10.14}$$

und

$$\sin(x) = -\cos(x + \pi/2) \tag{10.15}$$

ersichtlich.

Zusammen mit (10.7), (10.8) und (10.9) gilt daher

$$\cos(-x) = \cos(x) \ , \tag{10.16}$$

$$\cos(x) = -\cos(\pi - x) \tag{10.17}$$

und

$$\cos(x + 2\pi) = \cos(x) \ . \tag{10.18}$$

Symmetrie-Eigenschaften der Cosinus-Funktion:
Nach Gleichung (10.16) ist die Funktion $\cos(x)$ eine **gerade Funktion**, nach (10.17) ist sie **punktsymmetrisch** bezüglich des Punktes $(\pi/2, 0)$, nach (10.18) ist sie wie die Funktion $\sin(x)$ **periodisch** mit Periode 2π.

Aus (10.14) und (10.10) – (10.12) folgen die speziellen Funktionswerte

$$\cos(\pi/2) = \cos(3\pi/2) = 0 \ , \tag{10.19}$$

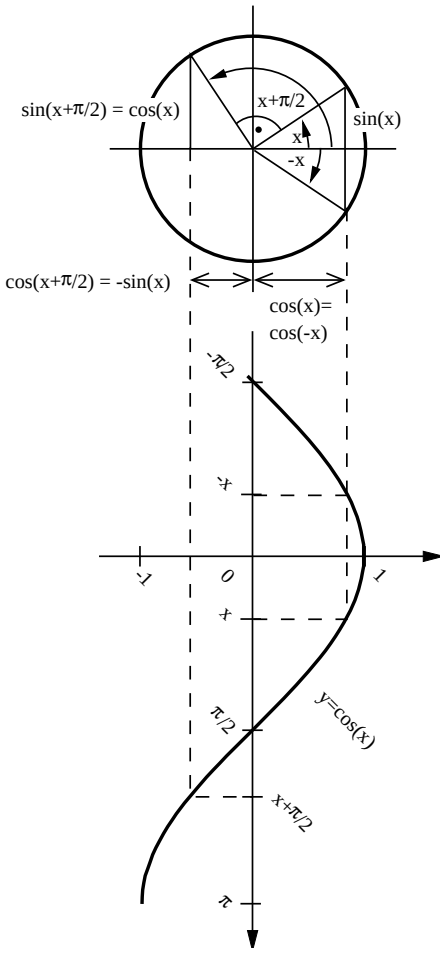


Abbildung 10.5: Cosinus-Funktion: Geometrische Motivation und Graph der Funktion $f(x) = \cos(x)$ im Intervall $(-\pi/2, \pi)$.

$$\cos(0) = 1 \tag{10.20}$$

und

$$\cos(\pi) = -1\ . \tag{10.21}$$

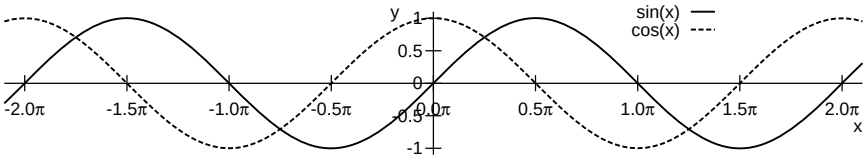


Abbildung 10.6: Vergleich der Sinus- und Cosinus-Funktion.

10.2.4 Werte von Sinus und Cosinus für spezielle Argumente

Für $x = 0$, $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$ und $\pi/2$ nehmen die Funktionen Sinus und Cosinus einfache Werte an, die aus dem Satz vom Pythagoras und Symmetrieüberlegungen abgeleitet werden können ("nd" bedeutet "nicht definiert"):[3]

[3]Die Funktionen $\tan(x)$ [Tangens] und $\cot(x)$ [Cotangens] werden in Abschnitt 10.3 definiert.

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin(x)$	$0 = \frac{1}{2}\sqrt{0}$	$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$1 = \frac{1}{2}\sqrt{4}$
$\cos(x)$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan(x)$	0	$\sqrt{1/3}$	1	$\sqrt{3}$	nd
$\cot(x)$	nd	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{1/3}$	0

SELBSTTEST: Leiten Sie die angegebenen Werte her. Skizzieren Sie dazu die diesen Spezialfällen entsprechende Dreiecke und überlegen Sie sich, welche Symmetrien existieren.

Die Werte der trigonometrischen Funktionen für Argumente x, die gegenüber den tabellierten Argumenten um $\pi/2$, π oder $3\pi/2$ verschoben sind, folgen direkt mit Hilfe der Symmetrieeigenschaften (10.7) bis (10.9) und (10.14) bis (10.18).

Dabei gilt für die Vorzeichen:

	0	$0<x<\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}<x<\pi$	π	$\pi<x<\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}<x<2\pi$
$\sin(x)$	0	+	1	+	0	−	−1	−
$\cos(x)$	1	+	0	−	−1	−	0	+
$\tan(x)$	0	+	nd	−	0	+	nd	−
$\cot(x)$	nd	+	0	−	nd	+	0	−

10.2.5 Additionstheoreme

Um Ableitungen von Sinus und Cosinus zu berechnen, müssen wir Ausdrücke der Form $\sin(x+y)$ und $\cos(x+y)$ für kleine y auswerten. Dazu leiten wir zuerst ganz allgemein die Additionstheoreme für die Sinus- und Cosinus-Funktion her. Wir fragen also, ob $\sin(x+y)$ beziehungsweise $\cos(x+y)$ durch Kombinationen von trigonometrischen Funktionen der Einzelwinkel x und y ausgedrückt werden können.[4]

In der Skizze sind die Längen $\overline{AB}$ und $\overline{AD}$ jeweils als Eins gewählt, $\sin(x+y)$ entspricht also der Strecke $\overline{DF}$. Weiterhin bemerken wir, dass die Hypothenusen und längeren Katheten der beiden Dreiecke ABC und DEF lotrecht aufeinander stehen. Die beiden Dreiecke sind also ähnliche Dreiecke, womit entsprechende Seiten zueinander proportional sind. Dies bedeutet insbesondere

$$\sin(x+y) : \overline{DE} = \overline{AC} : \overline{AB} = \cos(x) : 1 = \cos(x) \ . \tag{10.22}$$

Wir wissen jedoch noch nicht, wie groß $\overline{DE}$ ist. Es gilt aber

$$\overline{DE} = \overline{DG} + \overline{GE} \quad \text{wobei} \quad \overline{DG} = \sin(y) \tag{10.23}$$

und

$$\overline{GE} : \overline{AG} = \overline{CB} : \overline{AC} \ . \tag{10.24}$$

[4]Für andere wichtige Funktionen kennen wir bereits die entsprechenden Formeln. Für Exponentialfunktionen ist die Situation besonders einfach: $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$. Für Potenzfunktionen gilt der binomische Satz: $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$. Für Logarithmusfunktionen exisitiert dagegen *keine* vergleichbare Formel. Die Logarithmusfunktionen sind ja genau so definiert, dass sie vereinfacht werden können, wenn ihr Argument ein *Produkt* ist, $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$, nicht jedoch wenn es eine Summe ist.

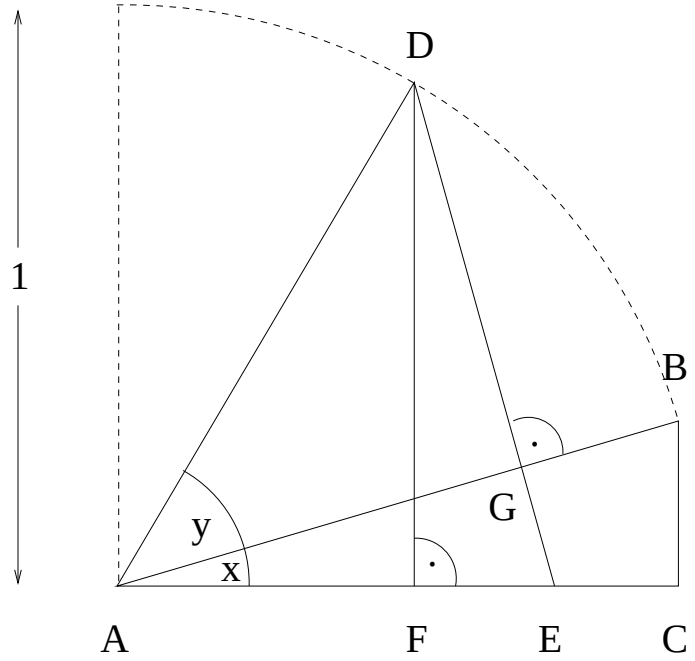


Abbildung 10.7: Skizze zum Additionstheorem der Sinus-Funktion.

Da

$$\overline{AG} = \cos(y) \ , \quad \overline{CB} = \sin(x) \quad \text{und} \quad \overline{AC} = \cos(x) \ , \tag{10.25}$$

folgt aus (10.24) und (10.25)

$$\overline{GE} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \cos(y) \tag{10.26}$$

und zusammen mit (10.22) und (10.23) das gesuchte Additionstheorem für den Sinus: $\sin(x+y) = \cos(x)\sin(y) + \sin(x)\cos(y)$. Ersetzen wir in dieser Formel y durch $y + \pi/2$ und wenden (10.14) und (10.15) an, so erhalten wir das entsprechende Additionstheorem für den Cosinus. Wir fassen zusammen:

Satz (Additionstheoreme für Sinus und Cosinus):
Sei $x, y \in \mathbf{R}$. Dann gilt:

$$\sin(x+y) = \cos(x)\sin(y) + \sin(x)\cos(y) \tag{10.27}$$

und

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \ . \tag{10.28}$$

Für Interessierte: Leiten Sie (10.28) direkt nach dem Muster von (10.27) her!

10.2.6 Ableitung von Sinus und Cosinus

Mit Hilfe der Additionstheoreme und der Näherungsformeln (10.5) und (10.6) können wir nun die Ableitungen von Sinus und Cosinus berechnen:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x)\sin(h)+\sin(x)\cos(h)-\sin(x)}{h} \\
&= \cos(x)\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h}+\sin(x)\lim_{h\to 0}\left[\frac{\cos(h)-1}{h}\right] \\
&= \cos(x)\cdot 1+\sin(x)\cdot 0 \\
&= \cos(x)\ .
\end{aligned}$$

In gleicher Weise erhält man:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos(x) = -\sin(x)\ .$$

SELBSTTEST: Leiten Sie die Gleichung her!

Wir halten fest:

Satz (Ableitung der Sinus- und Cosinus-Funktion):
Sie $x \in \mathbf{R}$. Dann gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin(x) = \cos(x) \tag{10.29}$$

und

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos(x) = -\sin(x)\ . \tag{10.30}$$

BEMERKUNG: Kennt man eines der beiden Additionstheoreme (10.27) oder (10.28), so kann man das zweite auch durch Ableitung erhalten:

$$\begin{aligned}
\cos(x+y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin(x+y) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\cos(x)\sin(y)]+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\sin(x)\cos(y)] \\
&= -\sin(x)\sin(y)+\cos(x)\cos(y)
\end{aligned}$$

Berechnen wir nun mit Hilfe von (10.29) und (10.30) die *zweite* Ableitung der Sinus- bzw. Cosinus-Funktion, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\sin(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin(x)\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos(x) = -\sin(x) \\
\text{und} \qquad & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (10.31) \\
\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\cos(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos(x)\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[-\sin(x)] = -\cos(x)
\end{aligned}$$

Sinus wie Cosinus haben also beide die Eigenschaft, dass ihre zweiten Ableitungen *bis auf das Vorzeichen* mit der jeweiligen Ausgangsfunktion übereinstimmen. Im Gegensatz dazu ist $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\exp(x) = +\exp(x)$: Bei der Exponentialfunktion ergibt sich *kein* Vorzeichenwechsel. Dies ist letztlich der wesentliche Unterschied zwischen exponentiellem Wachstum und Zerfall auf der einen, und harmonischen Schwingungen auf der anderen Seite.

In späteren Kapiteln werden wir beim Studium von Differentialgleichungen zweiter Ordnung noch mehrmals auf diese Verbindung der auf den ersten Blick so unterschiedlichen Funktionen $\exp(x)$ und $\sin(x)$ bzw. $\cos(x)$ stoßen. Dieser Zusammenhang wird jedoch auch schon offensichtlich, wenn wir die Taylorentwicklung von Sinus und Cosinus betrachten.

10.2.7 Taylorentwicklung der Sinus- und Cosinus-Funktion

Im Kapitel 9.3.2 war die Entwicklung der Exponentialfunktion diskutiert worden. Aus der Forderung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\exp(x) = \exp(x)$ und $\exp(0) = 1$ hatten wir die Reihendarstellung

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \tag{10.32}$$

gewonnen. Für $|x| \ll 1$ folgt daraus in linearer Näherung:

$$\exp(x) \approx 1 + x \qquad \text{für} \qquad |x| \ll 1 \; . \tag{10.33}$$

Wendet man den gleichen Zugang auf Sinus und Cosinus an, so folgt aus (10.31) und der Forderung $\sin(0) = 0$ beziehungsweise $\cos(0) = 1$

$$\begin{aligned} \sin(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ... \end{aligned} \tag{10.34}$$

und

$$\begin{aligned} \cos(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ... \end{aligned} \tag{10.35}$$

SELBSTTEST: Leiten Sie diese beiden Formeln her!

BEMERKUNG: Nach dem Muster von (10.31) können sofort auch alle höheren Ableitungen von Sinus- oder Cosinus-Funktionen gebildet werden. Nach viermaliger Ableitung erhält man dabei die jeweilige Ausgangsfunktion zurück, woraus $\frac{\mathrm{d}^{n+4}}{\mathrm{d}x^{n+4}}\sin(x) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\sin(x)$ und $\frac{\mathrm{d}^{n+4}}{\mathrm{d}x^{n+4}}\cos(x) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\cos(x)$ folgt. Insbesondere gilt für $x_0 = 0$: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos(x)\big|_0 = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\sin(x)\Big|_0 = \frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}x^3}\cos(x)\Big|_0 = \frac{\mathrm{d}^4}{\mathrm{d}x^4}\sin(x)\Big|_0 = \ldots = 0$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin(x)\big|_0 = \frac{\mathrm{d}^4}{\mathrm{d}x^4}\cos(x)\Big|_0 = \frac{\mathrm{d}^5}{\mathrm{d}x^5}\sin(x)\Big|_0 = \frac{\mathrm{d}^8}{\mathrm{d}x^8}\cos(x)\Big|_0 = \ldots = 1$ und weiterhin $\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}x^3}\sin(x)\Big|_0 = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\cos(x)\Big|_0 = \frac{\mathrm{d}^7}{\mathrm{d}x^7}\sin(x)\Big|_0 = \frac{\mathrm{d}^6}{\mathrm{d}x^6}\cos(x)\Big|_0 = \ldots = -1$. Damit können die Sinus- und Cosinus-Funktion auch direkt mit Hilfe der Taylorentwicklung (9.49) um $x_0 = 0$ entwickelt werden, was wieder (10.34) und (10.35) ergibt.

Für kleine Werte von x erhält man aus (10.34) und (10.35) die aus der geometrischen Betrachtung her schon bekannten Näherungsformeln:

$$\sin(x) \approx x \qquad \text{für} \qquad |x| \ll 1 \; . \tag{10.36}$$

$$\cos(x) \approx 1 - \frac{1}{2}x^2 \qquad \text{für} \qquad |x| \ll 1 \; . \tag{10.37}$$

Man beachte auch die hohe formale Ähnlichkeit der Exponential- mit den Winkelfunktionen:

$$\begin{array}{lccccccccc} \exp(x) & = & 1 & + & x & + & x^2/2 & + & x^3/6 & + & \ldots \\ \sin(x) & = & & & x & & & - & x^3/6 & + & \ldots \\ \cos(x) & = & 1 & & & - & x^2/2 & & & + & \ldots \end{array}$$

Diese Ähnlichkeit wird uns im nächsten Kapitel auch bei der Diskussion komplexer Zahlen begegnen, und wir werden dann auch den inneren Zusammenhang dieser auf den ersten Blick doch so unterschiedlichen Funktionen besser verstehen.

Zuerst jedoch noch zu den von Sinus und Cosinus abgeleiteten Funktionen:

10.3 Tangens und Cotangens

Das Verhältnis der beiden Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks wird durch die Funktionen **Tangens** (tan) und **Cotangens** (cot) beschrieben (siehe auch nochmals Abbildung 10.3),

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \qquad \text{für} \qquad \cos(x) \neq 0 \ , \tag{10.38}$$

$$\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \qquad \text{für} \qquad \sin(x) \neq 0 \ , \tag{10.39}$$

womit für $\tan(x) \neq 0$ gilt:

$$\cot(x) = \frac{1}{\tan(x)} \ . \tag{10.40}$$

Aus den Symmetrieeigenschaften von Sinus und Cosinus folgt

$$\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x) \ , \tag{10.41}$$

$$\tan(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \tan(x) \ , \tag{10.42}$$

$$\cot(-x) = \frac{\cos(-x)}{\sin(-x)} = \frac{\cos(x)}{-\sin(x)} = -\cot(x) \ , \tag{10.43}$$

$$\cot(x+\pi) = \frac{\cos(x+\pi)}{\sin(x+\pi)} = \frac{-\cos(x)}{-\sin(x)} = \cot(x) \ . \tag{10.44}$$

Tangens und Cotangens sind also ungerade Funktionen mit Periode π, sie weisen damit genau **die halbe Periode** von Sinus oder Cosinus auf. Weiterhin gilt

$$\tan(x+\pi/2) = \frac{\sin(x+\pi/2)}{\cos(x+\pi/2)} = \frac{\cos(x)}{-\sin(x)} = -\cot(x) \tag{10.45}$$

und

$$\cot(x+\pi/2) = \frac{\cos(x+\pi/2)}{\sin(x+\pi/2)} = \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x) \ . \tag{10.46}$$

Für die Ableitungen erhält man mit Hilfe der Quotientenregel:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} \tag{10.47}$$

und

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cot(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)} \ . \tag{10.48}$$

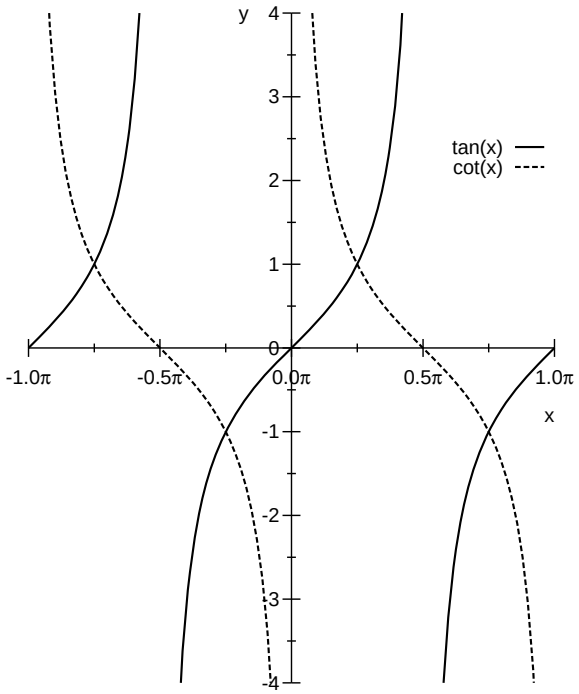


Abbildung 10.8: Graph der Tangens- und Cotangens-Funktion, $f(x) = \tan(x)$ und $f(x) = \cot(x)$ im Intervall $[-\pi, \pi]$.

10.4 Umkehrfunktionen

10.4.1 Arcussinus

Variiert man x zwischen $-\pi/2$ und $\pi/2$ so wird der gesamte Wertebereich, $-1 \leq \sin(x) \leq 1$, erreicht. Damit kann auf dem Intervall $[-1, 1]$ die Umkehrfunktion des Sinus, der **Arcussinus** (arcsin) definiert werden. Als Wertebereich wird dabei üblicherweise das Intervall $[-\pi/2, \pi/2]$ gewählt.

BEMERKUNG: Zur Namensgebung: $y = \arcsin x$ bezeichnet genau den Winkel y im Bogenmaß (*Arcus*), dessen Sinus den Wert x besitzt.

Für die Ableitung des Arcussinus erhält man für $-1 < x < 1$ aus dem allgemeinen Satz zur Ableitung von Umkehrfunktionen (Gleichung 9.17):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \,, \tag{10.49}$$

Herleitung von Gleichung (10.49)
Aus Gleichung (9.17) folgt $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \arcsin(x) = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}$. Nach dem Satz des Pythagoras gilt $\cos(x) = \pm\sqrt{1 - \sin^2(x)}$, wobei das positive Vorzeichen zu wählen ist, falls $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$, das negative Vorzeichen, falls $\pi/2 \leq x \leq 3\pi/2$. (Warum ist dies so?). Damit gilt $\cos(\arcsin(x)) = \pm\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(x))} = \pm\sqrt{1 - x^2}$. Da wir als Wertebereich von $\arcsin(x)$ das Intervall $[-\pi/2, \pi/2]$ gewählt haben, folgt (10.49). □

10.4.2 Arcuscosinus

Analog zum Arcussinus definiert man auf dem Intervall $[-1, 1]$ den **Arcuscosinus** als Umkehrfunktion zum Cosinus und wählt als Wertebereich üblicherweise das Intervall $[0, \pi]$.

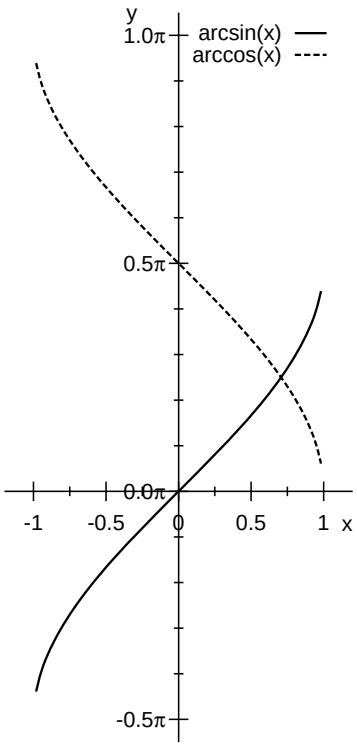


Abbildung 10.9: Graph der Funktionen Arcussinus und Arcuscosinus $f(x) = \arcsin(x)$ und $f(x) = \arccos(x)$ im Intervall $(-1, +1)$.

Der Satz zur Ableitung von Umkehrfunktionen ergibt für $-1 < x < 1$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \arccos(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \ . \tag{10.50}$$

10.4.3 Arcustangens und Arcuscotangens

Der Wertebereich von Tangens und Cotangens ist ganz $\mathbf{R}$, so dass ihre Umkehrfunktionen **Arcustangens** (arctan) und **Arcuscotangens** (arccot) ebenfalls auf ganz $\mathbf{R}$ definiert werden können. Als Wertebereich für den Arcustangens wird üblicherweise das Intervall $[-\pi/2, \pi/2]$ verwendet, für den Arcuscotangens das Intervall $[0, \pi]$.

Für die Ableitungen gilt mit Hilfe des Satzes zur Ableitung von Umkehrfunktionen:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \arctan(x) = \frac{1}{1+x^2} \tag{10.51}$$

und

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \operatorname{arccot}(x) = -\frac{1}{1+x^2} \ . \tag{10.52}$$

SELBSTTEST: Leiten Sie Gleichung (10.50), (10.51) und (10.52) nach dem Muster von (10.49) her.

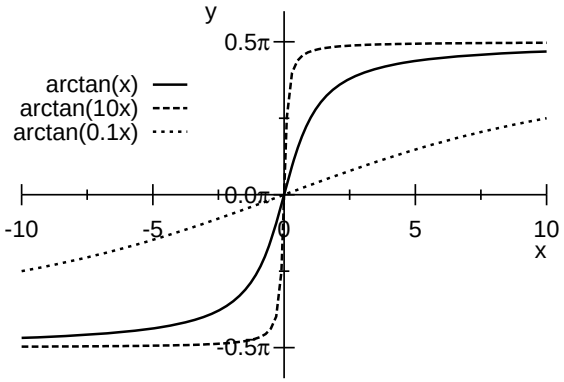


Abbildung 10.10: Graph der Funktion Arcustangens, $f(x) = \arctan(x)$.

10.5 Aufgaben

1. (Trigonometrische Funktionen)

(a) Leiten Sie die Funktionswerte von Sinus, Cosinus, Tangens und Cotangens für $x = \pi/6$, $\pi/4$ und $\pi/3$ her. Betrachten Sie dazu rechtwinklige Dreiecke mit den entsprechenden Winkeln und der Hypothenusenlänge Eins. Wenden Sie den Satz von Phytagoras an, um die Länge der Katheten zu berechnen. Hinweis: in welchem Verhältnis stehen die Seiten eines Dreiecks, in dem alle Winkel gleich 60° sind?

(b) Fertigen Sie eine Skizze der Graphen der Funktionen Sinus, Cosinus, Tangens und Cotangens an und tragen Sie die Ergebnisse aus Aufgabenteil (a) ein!

2. (Additionstheoreme) Die Additionstheoreme für Sinus und Cosinus lauten

$$\begin{aligned} \sin(x+y) &= \cos(x)\sin(y) + \sin(x)\cos(y) \\ \cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \end{aligned}$$

(a) Überprüfen Sie beispielhaft die Richtigkeit der Additionstheoreme, indem Sie dazu $\sin(\pi/2)$ und $\cos(\pi/2)$ berechnen und dabei einmal $\pi/2 = \pi/4 + \pi/4$ und einmal $\pi/2 = \pi/6 + \pi/3$ setzen. Verwenden Sie die bekannten Werte der Winkelfunktionen aus der vorherigen Aufgabe.

(b) Leiten Sie die beiden Additionstheoreme jeweils einmal nach x und einmal nach y ab. Was fällt Ihnen auf? Warum sind die Ableitungen nach x und nach y identisch?

3. (Tangens und Cotangens) Der Tangens und der Cotangens sind wie folgt definiert:

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \quad \text{und} \quad \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

(a) Wo haben die beiden Funktionen ihre Nullstellen?

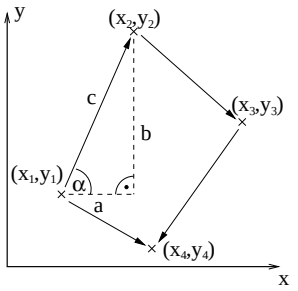
(b) Wie verhält sich der Tangens bzw. der Cotangens an den Stellen, wo $\cos(x) = 0$ bzw. $\sin(x) = 0$ ist?

(c) Berechnen Sie die erste Ableitung von Tangens und Cotangens durch Anwendung der Quotientenregel. Welchen Wert haben die Ableitungen an den Nullstellen von Tangens und Cotangens?

(d) Skizzieren Sie die Graphen von Tangens und Cotangens.

4. (Anwendung aus der Populationsökologie) In Oberbergen (Kaiserstuhl) wurde das Wanderverhalten der Zebraschnecke (*Zebrina detrita*) untersucht. Die Vermutung war, daß sich die Schnecken in den Böschungen zwischen den Weinbergen hauptsächlich hangaufwärts bewegen, um Abdriftverluste, die durch starke Regenfälle oder Erosion entstehen, auszugleichen. Es mußte also die mittlere Ausbreitungsrichtungsrichtung der Schnecken festgestellt werden. Dazu wurden am ersten Tag etwa 100 Schnecken, die innerhalb eines Quadratmeters gefunden wurden, individuell markiert und ihre Position vermerkt. Die Position setzt sich aus einem x-Wert, der die Lage parallel zur Böschung festlegt, und einem y-Wert, der die Lage senkrecht zur Böschung festlegt, zusammen. Jede Schnecke hat also am ersten Tag ein Koordinatenpaar (x_1, y_1) zugeordnet bekommen. In den darauffolgenden drei Tagen wurden die Schnecken gesucht und ihre neue Position bestimmt: (x_2, y_2) am zweiten, (x_3, y_3) am dritten und (x_4, y_4) am vierten Tag.

(a) Wir betrachten eine einzelne Schnecke. Wie weit ist sie vom 1. auf den 2. Tag gekrochen? Betrachten Sie dazu das rechtwinklige Dreieck in der Abbildung. Wie lang sind die Katheten a und b, ausgedrückt in den Koordinaten der Schnecke am ersten und am zweiten Tag, (x_1, y_1) und (x_2, y_2)? Berechnen Sie damit die Distanz c!



(b) In welche Richtung ist Sie gekrochen? Berechnen Sie den Winkel α (siehe Abbildung), wiederum in Abhängigkeit der beiden Koordinatenpaare.

(c) In welche Richtung und wie weit ist die Schnecke vom 2. auf den 3., vom 3. auf den 4. und vom 1. auf den 4. Tag gekrochen?

5. (Ableitung der Umkehrfunktion, Trigonometrische Funktionen) Berechnen Sie die ersten Ableitungen von Arcussinus und Arcustangens durch Anwendung der Regel zur Differentiation von Umkehrfunktionen. Berücksichtigen Sie auch die Beziehung $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$, so dass in Ihren Ergebnissen keine trigonometrische Funktionen mehr vorkommen!

6. (Kurvendiskussion) Diskutieren Sie das Verhalten der Funktion Arcustangens und der Funktion "Tangens Hyperbolicus", $\tanh(x) := \sinh(x)/\cosh(x)$. Vergleichen Sie anschließend das Verhalten dieser beiden Funktionen.

Anmerkung: Der Tangens Hyperbolicus tritt bei vielen Betrachtungen zur Kinetik chemischer Reaktionen auf und wird auch gerne als phänomenologische Beschreibung monotoner Abhängigkeiten mit Sättigung (zum Beispiel: Aktivität eines Neurons als Funktion der Stimulierung) verwendet. Beide Funktionen gehören damit zum Basisrepertoire der mathematischen Biologie.

Kapitel 11

Komplexe Zahlen

In Kapitel 1.3.2 hatte uns die Frage nach der Wurzel aus +2 von den rationalen zu den reellen Zahlen geführt. Für den "biologischen Hausgebrauch" mag diese Zahlenmenge auf den ersten Blick ausreichend erscheinen, doch zeigt die Frage "Was ist die Wurzel aus −1?", dass wichtige mathematische Operationen nicht innerhalb der reellen Zahlen ausgeführt werden können — das Quadrat einer beliebigen reellen Zahl muss eine positive reelle Zahl sein, also kann die Wurzel aus −1 keine reelle Zahl sein. Damit können wir beispielsweise quadratische Gleichungen wie $ax^2 + bx + c = 0$ nicht lösen, wenn die Diskriminante $D = b^2/4 - ac$ negativ ist (siehe auch Kapitel 2.4).

Wie wir in den nächsten Kapiteln sehen werden, ist die Einführung von Wurzeln aus negativen Zahlen und das Konzept der sogenannten "komplexen Zahlen" von großer praktischer Bedeutung. Ihrer Bezeichnung widersprechend *vereinfachen* die komplexen Zahlen viele mathematische Probleme. So erleichtern sie die Lösung von auch biologisch relevanten Differentialgleichungen und das Rechnen mit Winkelfunktionen.

11.1 Definition der Imaginären Einheit

Wie in der Einleitung erwähnt, kann die Wurzel aus −1 keine reelle Zahl sein. Um diesen "gordischen Knoten" der Zahlentheorie zu durchschlagen, definieren wir beherzt eine *neue* Zahl:

Definition:
Die **imaginäre Einheit** i ist definiert als Wurzel aus −1, sie erfüllt also die Gleichung

$$\mathrm{i}^2 = -1 \ . \tag{11.1}$$

Abgesehen von dieser neuen Definition versuchen wir, die von den reellen Zahlen her bekannten Gesetze so weit wie möglich beizubehalten. So sind Wurzeln aus negativen Zahlen in gleicher Weise wie Wurzeln aus positiven Zahlen nur bis auf ihr Vorzeichen bestimmt. Die Gleichung $x^2 = -1$ besitzt also zwei Lösungen, $x_1 = \mathrm{i}$ und $x_2 = -\mathrm{i}$ da gilt: $(-\mathrm{i})^2 = (-1)^2 \cdot \mathrm{i}^2 = \mathrm{i}^2 = -1$.

Sie können i auch schlicht als bequeme Schreibweise oder *Abkürzung* für $\sqrt{-1}$ benützen und dann so weiterrechnen, wie Sie das von den reellen Zahlen her gewohnt sind. Damit gilt $1 \cdot \mathrm{i} = \mathrm{i}$, $0 \cdot \mathrm{i} = 0$, etc. — und natürlich als Definition immer auch die Gleichung $\mathrm{i} \cdot \mathrm{i} = -1$.

11.2 Arithmetische Darstellung und Gaußsche Zahlenebene

Nachdem i keine reelle Zahl ist, kann sie auch nicht auf der Zahlengeraden liegen. Vom bisherigen Konzept einer eindimensional angeordneten Menge von Zahlen müssen wir also Abschied nehmen und zu einer neuen, zweidimensionalen Zahlenstruktur übergehen, die auch **komplexe Ebene** oder **Gaußsche Zahlenebene C** genannt wird.

Definition:
Sei $x, y \in \mathbf{R}$. Dann wird der Ausdruck

$$z = x + \mathrm{i}y \tag{11.2}$$

eine **komplexe Zahl** $z \in \mathbf{C}$ genannt, wobei x **Realteil** und y **Imaginärteil** von z heißen, was auch als

$$x = \mathrm{Re}\,(z) \qquad , \qquad y = \mathrm{Im}\,(z) \tag{11.3}$$

geschrieben wird.

BEMERKUNG: Im Moment wissen wir noch nicht, ob wir mit dieser zweidimensionalen Anordnung in dem Sinne "durchkommen" werden, dass alle aus **R** bekannten arithmetischen Operationen nun auch wirklich *innerhalb* von **C** definiert werden können. Bis zum Ende dieses Kapitels werden wir uns jedoch davon überzeugt haben!

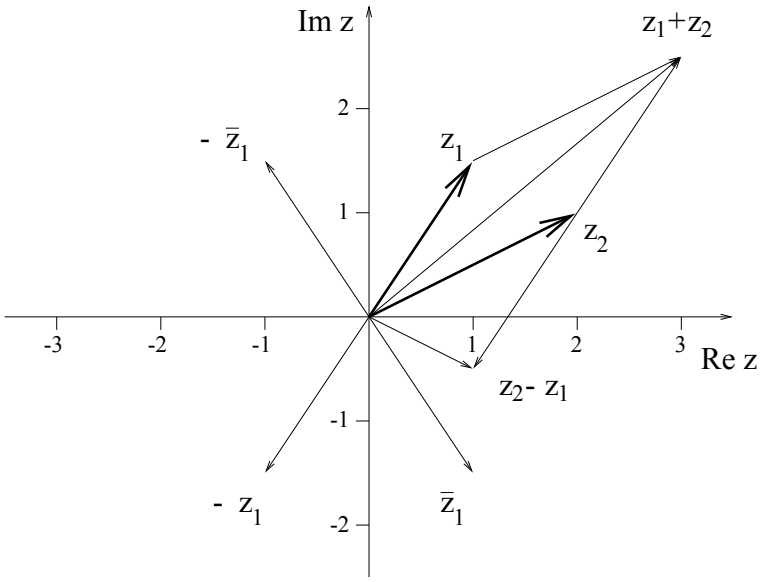


Abbildung 11.1: Gaußsche Zahlenebene und Addition komplexer Zahlen.

Vergißt man für einen Moment die Motivation der Gaußschen Zahlenebene, so kann man die komplexe Zahl z als einen Vektor in einem zweidimensionalen Raum auffassen, x und y spielen dann die Rolle **cartesischer Koordinaten** dieses Vektors. Mit Hilfe der so getroffenen Identifizierung werden wir auch die Addition und Subtraktion von komplexen Zahlen im nächsten Abschnitt motivieren.

Verschwindet der Imaginärteil ($y = 0$), so liegt eine reelle Zahl $z = x + 0 \cdot \mathrm{i} = x \in \mathbf{R}$ vor; die reellen Zahlen können also als Teilmenge der komplexen Zahlen in die komplexe Ebene "eingebettet" werden. Komplexe Zahlen, deren Realteil x verschwindet, für die also $z = \mathrm{i}y$ mit $y \in \mathbf{R}$ gilt, heißen **imaginäre Zahlen** — was für eine Wortschöpfung!

Die Menge aller reellen Zahlen bildet die **reelle Achse**, die aller imaginären Zahlen die **imaginäre Achse**. Anders ausgedrückt: die imaginären Zahlen, $z = \mathrm{i}y$ mit $y \in \mathbf{R}$ liegen in gleicher Weise wie die reellen Zahlen auf einer Geraden, und da $0 \cdot \mathrm{i} = 0$ sein soll, schneiden sich beide Geraden im Ursprung ($z = 0 = 0 + \mathrm{i} \cdot 0$).

BEMERKUNG: Da die komplexen Zahlen nicht auf einer Gerade sondern in einer Ebene liegen, kann man sie nicht wie reelle Zahlen der Größe nach anordnen. Aussagen wie "$z_1 < z_2$" sind also für $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$ überhaupt *nicht* definiert!

11.3 Addition und Subtraktion

Will man für die komplexen Zahlen die von den reellen Zahlen her bekannten Operationen widerspruchsfrei definieren, so müssen die alten Rechenregeln insbesondere für den Fall zutreffen, dass der Imaginärteil einer komplxen Zahl verschwindet. Dies kann für die Addition und Subtraktion dadurch erreicht werden, dass man diese Operationen komponentenweise für Real- und Imaginärteil definiert:

Definition (Addition und Subtraktion):
Seien z_1 und z_2 zwei komplexe Zahlen, $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$ und $z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$.
Dann ist ihre Summe als

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + \mathrm{i}(y_1 + y_2) \tag{11.4}$$

definiert, ihre Differenz als

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + \mathrm{i}(y_1 - y_2)\ . \tag{11.5}$$

Die von den reellen Zahlen her bekannten Eigenschaften der Addition (Kommutativgesetz, Assoziativgesetz) können damit direkt auf die komplexen Zahlen übertragen werden. Das Nullelement bezüglich der Addition komplexer Zahlen ist die altbekannte '0' der reellen Zahlen. Im Raum der komplexen Zahlen gilt dabei $0 = 0 + \mathrm{i} \cdot 0$, d.h. $\mathrm{Re}\,(0) = 0$ *und* $\mathrm{Im}\,(0) = 0$.

Das zu $z = x + \mathrm{i}y$ bezüglich der Addition **inverse Element** $-z$ ist komponentenweise gegeben durch $-z = -x - \mathrm{i}y$. Abgesehen von der über die Multiplikation $\mathrm{i} \cdot \mathrm{i} = -1$ geschaffenen Verbindung, auf die wir im nächsten Unterkapitel ausführlich zu sprechen kommen, können Real- und Imaginärteil im Moment noch vollkommen getrennt behandelt werden — wie die zwei Komponenten eines Vektors in der Ebene. Deshalb entspricht die Addition zweier komplexer Zahlen auch genau einer **Vektoraddition**. Daraus folgt:

Satz (Gleichheit zweier komplexer Zahlen):
Zwei komplexe Zahlen $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$ und $z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$ sind genau dann gleich, wenn sie sowohl in ihrem Realteil als auch in ihrem Imaginärteil übereinstimmen:

$$z_1 = z_2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x_1 = x_2 \ \text{ und } \ y_1 = y_2\ . \tag{11.6}$$

Der Satz zeigt auch deutlich:

Notiz:
Einer Gleichung für komplexe Zahlen entsprechen
zwei reelle Gleichungen — eine für die Realteile und eine für die Imaginärteile.

Geometrisch gesehen ist $-z$ der Punkt der Gaußschen Zahlenebene, den man durch *Punktspiegelung* von z am Ursprung 0 erhält. Ordnet man jeder komplexen Zahl durch *Achsenspiegelung* an der reellen Achse eine neue Zahl $\bar{z}$ zu, die die **zu z konjugiert-komplexe Zahl** $\bar{z}$ genannt wird,

$$\bar{z} = x - \mathrm{i}y \ , \tag{11.7}$$

so kann man Real- und Imaginärteil kompakt durch

$$\mathrm{Re}\,(z) = \frac{z+\bar{z}}{2} \qquad , \qquad \mathrm{Im}\,(z) = -\mathrm{i}\frac{z-\bar{z}}{2} = \frac{z-\bar{z}}{2\mathrm{i}} \ . \tag{11.8}$$

darstellen – siehe auch nochmals Abbildung 11.1.

11.4 Polarkoordinatendarstellung

Im Sinn der Trigonometrie und Vektorrechnung definiert man den **Betrag** $|z|$ einer komplexen Zahl $z = x + \mathrm{i}y$ mit Hilfe des Satzes von Pythagoras als Länge r des ihr in der komplexen Zahlenebene zugeordneten Vektors,

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \ . \tag{11.9}$$

Der Winkel ϕ zwischen der x-Achse und dem Vektor wird als **Argument** $\arg\,(z)$ von z bezeichnet,

$$\phi = \arg\,(z) = \begin{cases} \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) & \text{für } x > 0 \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{für } x = 0 \text{ und } y > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{für } x = 0 \text{ und } y < 0 \\ \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) + \pi & \text{für } x < 0 \text{ und } y \geq 0 \\ \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) - \pi & \text{für } x < 0 \text{ und } y < 0 \ . \end{cases} \tag{11.10}$$

Durch (11.9) und (11.10) gewinnt man aus den cartesischen Koordinaten x und y die **Polarkoordinaten** r und ϕ, die umgekehrte Transformation wird durch

$$x = r\cos(\phi) \qquad , \qquad y = r\sin(\phi) \tag{11.11}$$

vermittelt, so dass zwei äquivalente Darstellungen vorliegen, von denen man je nach Notwendigkeit Gebrauch macht. Mit (11.11) lässt sich (11.2) auch als

$$z = r[\cos(\phi) + \mathrm{i}\sin(\phi)] \tag{11.12}$$

schreiben.

BEMERKUNG: Für komplexe Zahlen z der Form $z = \cos(\phi) + \mathrm{i}\sin(\phi)$ gilt nach (11.9): $|z| = \sqrt{\cos^2(\phi) + \sin^2(\phi)} = 1$. Wo liegen sie also in der komplexen Ebene?

Wir fassen zusammen:

Notiz (Umrechnung Cartesischen Koordinaten — Polarkoordinaten):
Aus den cartesischen Koordinaten x und y einer komplexen Zahl $z = x + \mathrm{i}y$ erhält man ihre Polarkoordinaten durch

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \text{und} \qquad \phi = \arg\,(z).$$

Siehe auch (11.9) und (11.10). Aus den Polarkoordinaten r und ϕ einer komplexen Zahl $z = r(\cos\phi + \mathrm{i}\sin\phi)$ erhält man ihre cartesischen Koordinaten durch

$$x = r\cos\phi \qquad \text{und} \qquad y = r\sin\phi \ .$$

In der Polarkoordinatendarstellung gilt damit: Zwei komplexe Zahlen sind genau dann gleich, wenn sie sowohl in ihrem Betrag als auch in ihrem Argument übereinstimmen, d.h. für $z_1 = r_1(\cos\phi_1 + \mathrm{i}\sin\phi_1)$ und $z_2 = r_2(\cos\phi_2 + \mathrm{i}\sin\phi_2)$ gilt $z_1 = z_2$ genau dann wenn $r_1 = r_2$ und $\phi_1 = \phi_2 + 2k\pi$ mit $k \in \mathbf{Z}$.

11.5 Multiplikation

Fordert man, dass die für die Multiplikation reeller Zahlen geltenden Regeln (Kommutativgesetz, Assoziativgesetz, Distributivgesetz) auch für komplexe Zahlen gelten soll, so folgt aus der Definition $\mathrm{i}\cdot\mathrm{i} = -1$:

Satz (Multiplikation):
Seien z_1 und z_2 zwei komplexe Zahlen, $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$ und $z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$.
Dann gilt für ihr Produkt

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + \mathrm{i}y_1)\cdot(x_2 + \mathrm{i}y_2) \\ &= x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot \mathrm{i}y_2 + \mathrm{i}y_1 \cdot x_2 + \mathrm{i}y_1 \cdot \mathrm{i}y_2 \\ &= x_1x_2 - y_1y_2 + \mathrm{i}(x_1y_2 + x_2y_1)\ . \end{aligned} \tag{11.13}$$

Aus (11.13) folgt, dass das Produkt einer komplexen Zahl z mit einer *reellen* Zahl c einer Streckung ($c > 1$) beziehungsweise einer Stauchung ($c < 1$) des der Zahl z zugeordneten Vektors in der Gaußschen Zahlenebene entspricht.

Wie aber ist die Multiplikation zweier beliebiger komplexer Zahlen geometrisch zu deuten?

Zur Beantwortung dieser Frage empfiehlt es sich, zur Polardarstellung überzugehen. Mit $z_1 = r_1(\cos\phi_1 + \mathrm{i}\sin\phi_1)$ und $z_2 = r_2(\cos\phi_2 + \mathrm{i}\sin\phi_2)$ erhalten wir aus (11.13) mit Hilfe der Additionstheoreme (10.27) und (10.28)

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1r_2[(\cos\phi_1\cos\phi_2 - \sin\phi_1\sin\phi_2) + \mathrm{i}(\cos\phi_1\sin\phi_2 + \sin\phi_1\cos\phi_2)] \\ &= r_1r_2[\cos(\phi_1+\phi_2) + i\sin(\phi_1+\phi_2)]\ . \end{aligned} \tag{11.14}$$

Damit gilt:

$$|z_1 \cdot z_2| = r_1r_2 \qquad \text{und} \qquad \arg(z_1 \cdot z_2) = \phi_1 + \phi_2\ . \tag{11.15}$$

Notiz (Interpretation der Multiplikation):
Der Betrag $|z_1z_2|$ des Produktes zweier komplexer Zahlen z_1 und z_2 entspricht dem Produkt der beiden Beträge, das Argument der Summe beider Argumente. Bezogen auf die Gaußsche Zahlenebene bedeutet dies, dass der Abstand r des dem Produkt zweier komplexen Zahlen entsprechenden Punktes vom Ursprung durch das Produkt $r_1 \cdot r_2$ der Abstände der beiden Punkte gegeben ist, der Winkel ϕ durch die Summe $\phi_1 + \phi_2$ der beiden Winkel — siehe auch Abbildung 11.2.

Aus (11.13) und (11.9) erhalten wir für das Produkt von $z = x + \mathrm{i}y$ und $\bar{z} = x - \mathrm{i}y$: $z\bar{z} = x^2 + y^2 + \mathrm{i}(xy - xy) = x^2 + y^2 = |z|^2$. Also erfüllt der Betrag von z die Gleichung

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}}\ . \tag{11.16}$$

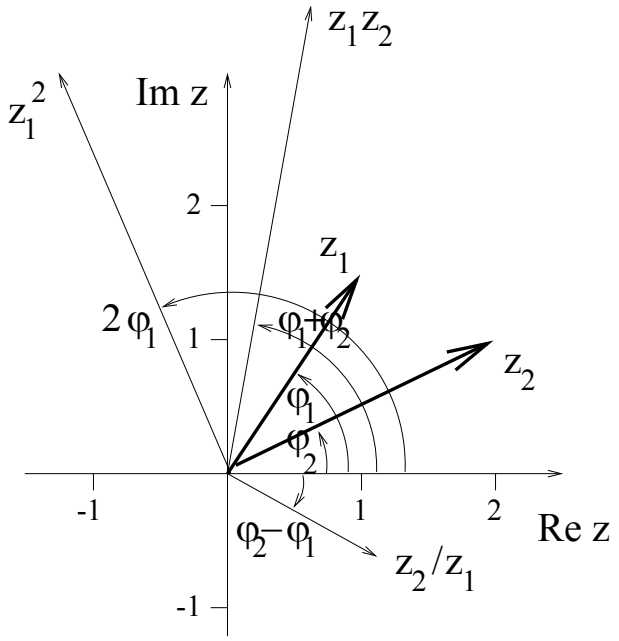


Abbildung 11.2: Multiplikation und Division komplexer Zahlen.

BEISPIEL:

Das Produkt von i mit i hat den Abstand eins vom Ursprung, da $|\mathrm{i}| = 1$, und den Winkel π von der reellen Achse, da $\arg(\mathrm{i}) = \pi/2$. Damit gilt $\mathrm{i} \cdot \mathrm{i} = -1$ wie gefordert.

Durch sukzessive Anwendung von (11.14) folgt für Potenzen von komplexen Zahlen die sehr kompakte **Moivresche Formel**:[1]

Satz (Moivresche Formel):
Sei $z = r(\cos\phi + \mathrm{i}\sin\phi) \in \mathbf{C}$. Dann gilt:

$$z^n = r^n[\cos(n\phi) + \mathrm{i}\sin(n\phi)] \qquad \text{für } n \in \mathbf{N}\ . \tag{11.17}$$

11.6 Division

Aus (11.14) folgt, dass die zu $z = r(\cos\phi + \mathrm{i}\sin\phi)$ bezüglich der Multiplikation inverse Zahl $1/z$ in Polarkoordinaten durch $|z^{-1}| = 1/r$ und $\arg(z^{-1}) = -\phi$ gegeben ist – siehe

[1] **Für Interessierte:** Die Moivresche Formel kann auch dazu verwendet werden, die n-te Wurzel aus einer komplexen Zahl zu ziehen. Sucht man nämlich für eine vorgegebene komplexe Zahl z nach den Lösungen der Gleichung $w^n = z$, so sagt (11.17), dass der Betrag $|w|$ der gesuchten Zahl w der n-ten Wurzel aus dem Betrag $|z|$ der Zahl z entsprechen und der Winkel $\arg(w)$ der Gleichung $n \cdot \arg(w) = \arg(z)$ genügen muss. Die letzte Gleichung hat allerdings n verschiedene Lösungen für $\arg(w)$ mit $0 < \arg(w) \leq 2\pi$. Geometrisch gesehen sind dies all die Winkel $\arg(w)$ mit $0 < \arg(w) \leq 2\pi$, deren n-faches Vielfaches gerade mit dem Winkel $\arg(z)$ (modulo 2π) übereinstimmt.

Bemerkung zur modulo-Operation: Die beiden Zahlen a und b seien positive reelle Zahlen. Dividiert man a durch b, so kann man das Ergebnis immer als $a/b = n + x$ schreiben, mit $n \in \mathbf{N}$ und $x \in \mathbf{R}$ mit $0 \leq x < 1$. Das Produkt $x \cdot b$ wird dann als "a modulo b" bezeichnet. Beispiele: 8 modulo 3 ist 2, 9 modulo 4 ist eins, $3\pi/2$ modulo π ist $\pi/2$.

Mit Hilfe der Moivreschen Formel ist nun also die n-te Wurzel für alle komplexen Zahlen wohldefiniert. Die Gleichung $w = z^{1/n}$ hat genau n verschiedene Lösungen, die Wurzel $\sqrt{z}$ also immer genau zwei unterschiedliche Lösungen, so wie wir dies bisher schon für Wurzeln aus positiven Zahlen gewohnt waren.

auch 11.2:

Satz (Inverses Element):
Sei $z = r(\cos\phi + \mathrm{i}\sin\phi) \in \mathbf{C}$. Falls $z \neq 0$ existiert das zu z inverse Element z^{-1},

$$z^{-1} = r^{-1}(\cos\phi - \mathrm{i}\sin\phi) \ . \tag{11.18}$$

Mit Hilfe des inversen Elements kann der Quotient zweier komplexer Zahlen z_1 und z_2 sofort über die Identität $z_1/z_2 = z_1 \cdot z_2^{-1}$ berechnet werden:

Satz (Division):
Seien $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$ und $z_2 \neq 0$. Dann ist der Quotient z_1/z_2 gegeben durch

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1} = r_1 \cdot r_2^{-1}[\cos(\phi_1 - \phi_2) + \mathrm{i}\sin(\phi_1 - \phi_2)] \ . \tag{11.19}$$

Beweis:
Aus Gleichung (11.18) folgt:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2^{-1} &= r_1(\cos\phi_1 + \mathrm{i}\sin\phi_1) \cdot r_2^{-1}(\cos\phi_2 - \mathrm{i}\sin\phi_2) \\ &= r_1 \cdot r_2^{-1}[(\cos\phi_1 + \mathrm{i}\sin\phi_1) \cdot (\cos\phi_2 - \mathrm{i}\sin\phi_2)] \\ &= r_1 \cdot r_2^{-1}[\cos(\phi_1 - \phi_2) + \mathrm{i}\sin(\phi_1 - \phi_2)] \end{aligned}$$

Dabei wurden im letzten Schritt die Additionstheoreme (10.27) und (10.28) mit $x = \phi_1$ und $y = -\phi_2$ verwendet. □

BEMERKUNG: Gleichung (11.18) zeigt, dass man die Moivresche Formel für alle $n \in \mathbf{Z}$ fortsetzen kann.

In cartesischen Koordinaten erhält man aus (11.13) für $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$ und $z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1 + \mathrm{i}y_1}{x_2 + \mathrm{i}y_2} = \frac{x_1 + \mathrm{i}y_1}{x_2 + \mathrm{i}y_2} \cdot \frac{x_2 - \mathrm{i}y_2}{x_2 - \mathrm{i}y_2} \\ &= \frac{(x_1 + \mathrm{i}y_1)(x_2 - \mathrm{i}y_2)}{(x_2 + \mathrm{i}y_2)(x_2 - \mathrm{i}y_2)} \\ &= \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + \mathrm{i}(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2} \\ &= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \mathrm{i}\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \ . \end{aligned} \tag{11.20}$$

Die Inverse z^{-1} einer komplexen Zahl z erhält man aus (11.20) indem man $z = z_2$ und $z_1 = 1 = 1 + \mathrm{i} \cdot 0$ setzt, d.h. $x_1 = 1$, $y_1 = 0$, $x_2 = x$ und $y_2 = y$:

$$z^{-1} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \mathrm{i}\frac{y}{x^2 + y^2} \tag{11.21}$$

Notiz:
Die obigen Rechnungen zeigen, dass man mit komplexen Zahlen "ganz normal" rechnen kann. Man achte nur darauf, nach einer Division den Nenner reell zu machen (durch Erweitern mit der zum Nenner konjugiert-komplexen Zahl) und dann Real- und Imaginärteil zu trennen.

An diesen Beispielen wird auch deutlich, dass Multiplikation und Division komplexer Zahlen am geschicktesten in Polarkoordinaten, Addition und Subtraktion dagegen am einfachsten in cartesischen Koordinaten durchgeführt werden.

11.6.1 Taylorentwicklung der komplexen Exponentialfunktion

Die bisherigen Beispiele zeigen, dass Addition, Multiplikation und davon abgeleitete Funktionen einschließlich der Wurzelfunktion für komplexe Zahlen wohldefiniert sind. Wie bei den reellen Zahlen kann man dann in einem nächsten Schritt auch wieder Polynome betrachten. Dies ist von besonderem Interesse, da die speziellen Funktionen und dabei insbesondere die Exponentialfunktion im Komplexen sehr einfach über die schon bekannte Potenzreihe (9.37), nun aber mit komplexwertiger Variable $z = x+\mathrm{i}y$ ($x, y \in \mathbf{R}$) definiert werden kann,

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \ . \tag{11.22}$$

Nachdem die Potenzen z^n der komplexen Zahl $z = x + \mathrm{i}y$ genau den gleichen Gesetzen unterliegen wie die Potenzen der *reellwertigen* Summe $x + y$ bei der Auswertung des *reellwertigen* Ausdruck $\exp(x + y)$, muss

$$\exp(x + \mathrm{i}y) = \mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}y} \tag{11.23}$$

gelten. Man kann dieses Ergebnis — allerdings nur mit erheblichem Aufwand — auch direkt mit Hilfe der binomischen Formel aus Kapitel 3.5 berechnen. Dies wird jedoch im Rahmen dieser Vorlesung *nicht* als Übung empfohlen.

Was aber ist $\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}$ für $y \in \mathbf{R}$?

Da $(\mathrm{i}y)^2 = -y^2$, $(\mathrm{i}y)^3 = -\mathrm{i}\cdot y^3$, $(\mathrm{i}y)^4 = y^4$, ... zerfällt die Reihe (11.22) in zwei Teilreihen, eine reellwertige Reihe und eine Reihe mit rein imaginären Termen. Weiterhin treten in der ersten Reihe nur geradzahlige, in der zweiten Reihe nur ungeradzahlige Potenzen von y auf. Der Vergleich mit (10.34) und (10.35) enthüllt dann die sehr schöne und verblüffend einfache Formel

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{\mathrm{i}y} &= 1 + \mathrm{i}y + \frac{(\mathrm{i}y)^2}{2!} + \frac{(\mathrm{i}y)^3}{3!} + \frac{(\mathrm{i}y)^4}{4!} + \frac{(\mathrm{i}y)^5}{5!} + \frac{(\mathrm{i}y)^6}{6!} + \frac{(\mathrm{i}y)^7}{7!} + \ldots \\ &= 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \ldots + \mathrm{i}\cdot\left[y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \ldots\right] \\ &= \cos y + \mathrm{i}\sin y \qquad \text{für } y \in \mathbf{R} \end{aligned} \tag{11.24}$$

Damit wird im Raum der komplexen Zahlen die äußerst enge Verknüpfung von Exponential- und Winkelfunktionen deutlich sichtbar!

Berechnet man $\exp(\mathrm{i}y)$ und $\exp(-\mathrm{i}y)$ nach Gleichung (11.24) und addiert beziehungsweise subtrahiert die beiden rechten Seiten, so erhält man eine neue Darstellung der Cosinus- und Sinusfunktion,

$$\cos y = \frac{\exp(\mathrm{i}y) + \exp(-\mathrm{i}y)}{2} \tag{11.25}$$

und

$$\sin y = \frac{\exp(\mathrm{i}y) - \exp(-\mathrm{i}y)}{2\mathrm{i}} \ . \tag{11.26}$$

Durch geschickte Kombination zweier komplexwertiger Funktionen auf den rechten Seiten von (11.25) und (11.26) ergeben sich zwei reellwertige Funktionen, Sinus und Cosinus, auf der jeweils linken Seite! Dies ist aber letztlich nicht überraschend: Nach (11.7) gilt

$$\overline{\exp(\mathrm{i}y)} = \overline{\cos y + \mathrm{i}\sin y} = \cos y - \mathrm{i}\sin y = \exp(-\mathrm{i}y) \ , \tag{11.27}$$

so dass (11.25) und (11.26) nach (11.8) genau dem Real- und Imaginärteil von $\exp(\mathrm{i}y)$ entsprechen — und diese beide Zahlen sind nach Definition jeweils reellwertige Größen.

Angewendet auf die imaginären Zahlen $z_1 = \mathrm{i}y_1$ und $z_2 = \mathrm{i}y_2$ liefert (11.24) schließlich noch

$$\begin{aligned}\cos(y_1+y_2)+\mathrm{i}\sin(y_1+y_2) &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}y_1+\mathrm{i}y_2} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}y_1}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}y_2} \\ &= [\cos(y_1)+\mathrm{i}\sin(y_1)][\cos(y_2)+\mathrm{i}\sin(y_2)] \\ &= [\cos(y_1)\cos(y_2)-\sin(y_1)\sin(y_2)] \\ &\quad +\mathrm{i}[\cos(y_1)\sin(y_2)+\sin(y_1)\cos(y_2)]\ . \end{aligned} \tag{11.28}$$

Vergleicht man nun jeweils Realteil und Imaginarteil der linken Seite mit dem entsprechenden Real- und Imaginärteil der rechten Seite — beide Ausdrücke müssen ja in Real- und Imaginärteil übereinstimmen — so bekommt man auf einen Schlag die Additionstheoreme (10.27) und (10.28) für Sinus und Cosinus.

Neben dieser wichtigen, alternativen Herleitung der Additionstheoreme liefert (11.24) eine sehr interessante, und vielleicht auch für den einen oder die andere ästhetisch ansprechende Beziehung zwischen den vier grundlegenden Zahlen e, i, π und 1,

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1\ . \tag{11.29}$$

Eine vergleichbare Verknüpfung von π, e und 1 ist innerhalb der reellen Zahlen nicht denkbar.

BEMERKUNG: An dieser Stelle wird auch der sprachliche Bezug zu den Funktionen Sinus Hyperbolicus und Cosinus Hyperbolicus deutlich, die als

$$\cosh(y) = \frac{\exp(y)+\exp(-y)}{2} \tag{11.30}$$

und

$$\sinh(y) = \frac{\exp(y)-\exp(-y)}{2} \tag{11.31}$$

definiert sind.

In gleicher Weise, wie wir hier die Exponentialfunktion im Raum der komplexen Zahlen eingeführt haben, kann man auch den komplexen Logarithmus definieren, und sich darüberhinaus ganz allgemein mit dem Studium **komplexwertiger Funktionen** beschäftigen, was die Lösung vieler Probleme aus der angewandten Mathematik in Physik, Chemie, Biologie und den Ingenieurwissenschaften erheblich erleichtert. Wir wollen dies aber im Rahmen der Vorlesung nicht tun und uns vielmehr, nachdem wir nun die wichtigsten speziellen Funktionen und ihre Beziehungen kennengelernt haben, mit der Integration als der zur Differentiation entgegengesetzten Operation befassen.

11.7 Aufgaben

1. (Komplexe Zahlen: Addition) Berechnen Sie jeweils die Summe und Differenz der komplexen Zahlen z_1 und z_2. Tragen Sie anschließend jeweils beide Zahlen und das Ergebnis in die Gaußsche Zahlenebene ein. Berechnen Sie außerdem Betrag und Argument des Ergebnisses (Sie können beides durch Messen in der Zeichnung überprüfen!) und die zu Ihrem Ergebnis konjugiert komplexe Zahl.

(a) $z_1 = 1+3i$, $z_2 = 2+i$

(b) $z_1 = i$, $z_2 = -2$

2. (Komplexe Zahlen: Multiplikation) Berechnen Sie das Produkt von $-i$ mit

(a) i (c) -3

(b) $-i$ (d) $2i+1$

in cartesischen Koordinaten. Führen Sie in (a) und (c) die Rechnung auch in Polarkoordinaten durch.

3. (Komplexe Zahlen: Potenzen) Berechnen Sie mit Hilfe der Moivreschen Formel folgende Potenzen der komplexen Zahl z. Dazu müssen Sie zuerst den Betrag und das Argument von z bestimmen. Tragen Sie jeweils z und die berechnete Potenz von z in die Gaußsche Zahlenebene ein.

(a) z^2 , für $z = 1 + i$ (b) z^3 , für $z = 2i$

4. (Komplexe Zahlen, trigonometrische Funktionen) Wir wollen mit Hilfe der Moivreschen Formel zeigen, dass gilt: $\sin(3\phi) = 3\cos^2(\phi)\sin(\phi) - \sin^3(\phi)$. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(a) Berechnen Sie z^3 mit der Formel von Moivre für $z = \cos(\phi) + i\sin(\phi)$.

(b) Berechnen Sie mit dem binomischen Satz $z^3 = [\cos(\phi) + i\sin(\phi)]^3$ und trennen Sie das Ergebnis in Real- und Imaginärteil.

(c) Vergleichen Sie nun jeweils Real- und Imaginärteil aus den Ergebnissen von (a) und (b). Welche Gleichung für $\sin(3\phi)$ erhalten Sie?

(d) Testen Sie Ihr Resultat für $\phi = 0$, $\phi = \pi/4$, $\phi = \pi/3$ und $\phi = \pi/2$.

5. (Imaginäre Exponentialfunktion) Sie kennen bereits die Taylorreihe der Exponentialfunktion

$$\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

(a) Geben Sie die Taylorreihe von $\mathrm{e}^{i\phi}$ an, indem Sie in die Taylorreihe der Exponentialfunktion $i\phi$ statt x einsetzen.

(b) Schreiben Sie die ersten sechs Glieder dieser Reihe aus, verwenden Sie dabei $i^2 = -1$ und trennen Sie nach Real- und Imaginärteil.

(c) Sie kennen auch schon die Taylorreihen von $\sin(\phi)$ und $\cos(\phi)$

$$\sin(\phi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\phi^{2k+1} \qquad \text{und} \qquad \cos(\phi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\phi^{2k}$$

Erkennen Sie diese im Real- und Imaginärteil aus Teilaufgabe (b) wieder? Ist also die Beziehung

$$\mathrm{e}^{i\phi} = \cos(\phi) + i\sin(\phi)$$

richtig?

(d) Die Polarkoordinatendarstellung einer beliebigen komplexen Zahl z lautet

$$z = r[\cos(\phi) + i\sin(\phi)]$$

Ersetzen Sie darin $\cos(\phi) + i\sin(\phi)$ durch das Ergbnis aus (c).

(e) Berechnen Sie Betrag und Argument der komplexen Zahl $z = 1+i$. Stellen Sie z in der im Aufgabenteil (d) gefundenen kompakten Form der Polarkoordinatendarstellung dar.

6. (Komplexe Zahlen: Division) Berechnen Sie Real- und Imaginärteil des Quotienten $q = z_1/z_2$ für folgende Zahlen z_1 und z_2. Erweitern Sie dazu den Bruch mit der komplex konjugierten Zahl $\bar{z}_2$ des Nenners z_2 und wenden Sie die dritte binomische Formel an, um den Nenner reell zu machen.

(a) $z_1 = 1 - i$, $z_2 = 1 + i$

(b) $z_1 = 3i - 2$, $z_2 = 2 - 4i$

(c) $z_1 = a + ib$, $z_2 = c + id$

7. (Moivresche Formel) In Aufgabe 5 wurde gezeigt, dass eine komplexe Zahl z auch in folgender kompakter Form (Polarkoordinatendarstellung) dargestellt werden kann:

$$z = r\mathrm{e}^{i\varphi} \quad , \quad r = |z| \quad \text{und} \quad \varphi = \arg(z)$$

(a) Berechnen Sie z^3 für $z = 2\mathrm{e}^{i\pi/6}$ und geben Sie das Ergebnis in der arithmetischen Darstellung ($z = x + iy$) an. Verwenden Sie dabei

$$\mathrm{e}^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$$

und die Tabelle im Abschnitt 10.2.4 der Werte von Sinus und Cosinus für spezielle Argumente.

(b) Berechnen Sie allgemein z^n für $z = r\mathrm{e}^{i\varphi}$ und geben Sie das Ergebnis wie in Teilaufgabe (a) in der arithmetischen Darstellung an. Sie erhalten so die Moivresche Formel.

8. (Komplexe Zahlen: Wurzeln) Mit Hilfe der Darstellung $z = r\mathrm{e}^{i\varphi}$ können wir sehr einfach Wurzeln von beliebigen komplexen Zahlen z berechnen. Dazu aber erst eine Vorüberlegung:

(a) Schreiben Sie die komplexe Zahl $z_0 = \sqrt{2}\ \mathrm{e}^{i\pi/4}$ in der arithmetischen Darstellung. Gehen Sie dabei wie in Aufgabe 7 (a) vor.

(b) Was erhalten Sie für die arithmetische Darstellung der Zahlen $z_1 = \sqrt{2}\ \mathrm{e}^{i(\pi/4+2\pi)}$, $z_0 = \sqrt{2}\ \mathrm{e}^{i(\pi/4+4\pi)}$ und allgemein $z_0 = \sqrt{2}\ \mathrm{e}^{i(\pi/4+2k\pi)}$, ($k \in \mathbf{Z}$) ?

(c) Zeigen Sie für beliebige Zahlen z, daß gilt

$$z = r\mathrm{e}^{i\varphi} = r\mathrm{e}^{i(\varphi+2k\pi)} \ , \quad k \in \mathbf{Z}$$

Jede komplexe Zahl kann also auf unendlich viele verschiedene Weisen dargestellt werden (für jedes k eine).

(d) Ziehen Sie nun aus $z = 4\mathrm{e}^{i(\pi+2k\pi)}$, $k \in \mathbf{Z}$ die Wurzel, berechnen Sie also $z^{1/2}$. Welchen Betrag hat $z^{1/2}$? Was erhalten Sie als Argument von $z^{1/2}$ für $k = 0, 1, 2, 3, 4$? Wieviele tatsächlich verschiedene Zahlen erhalten Sie also? Zeichnen Sie diese und z in die Gaußsche Zahlenebene ein. Haben Sie gemerkt, dass Sie gerade die Wurzel aus einer negativen Zahl gezogen haben?

(e) Berechnen Sie genauso wie in (d) die dritte Wurzel aus $z = 8\mathrm{e}^{i\pi/2}$. Vergessen Sie nicht den Term $2k\pi$ im Argument von z. Wieviele verschiedene Lösungen erhalten Sie diesmal? Skizzieren Sie das Ergebnis und z in der Gaußschen Zahlenebene.

(f) Wir wollen die Gleichung $x^2 = 9$ nach x auflösen. Dazu müssen wir aus 9 die Wurzel ziehen. Gehen Sie dabei so vor wie in Teilaufgabe (d) (welchen Betrag und welches Argument hat die reelle Zahl 9 ?). Wieviele Lösungen erhalten Sie? Kommt Ihnen das bekannt vor?

Kapitel 12

Integralrechnung

12.1 Einführung und Definition

In Kapitel 9 haben wir den Begriff der Ableitung kennengelernt und dazu verwendet, Eigenschaften vorgegebener Funktionen zu untersuchen. An diesen Beispielen ist auch deutlich geworden, dass die Ableitung einer Funktion *lokale* Eigenschaften widerspiegelt: so ist die Steigung einer Funktion unabhängig vom Funktionswert. Wir wollen nun ein weiteres wichtiges mathematisches Konzept diskutieren, mit Hilfe dessen *großräumige* Eigenschaften einer Funktion erfasst werden können.

BEMERKUNG: Falls Sie sich interaktiv mit dem Konzept Integral auseinandersetzen wollen, werfen Sie einen Blick auf: `http://www-hm.ma.tum.de/integration`.

Geometrische Definition:
Das **bestimmte Integral** einer beschränkten Funktion $f(x) : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, x \mapsto f(x)$ zwischen der **unteren Grenze** a und **oberen Grenze** b,

$$I_f(a,b) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \ , \tag{12.1}$$

ist definiert als die Größe der Fläche zwischen der Funktion und der x–Achse.
Dabei werden Bereiche oberhalb der x–Achse positiv, Bereiche unterhalb der x–Achse negativ gezählt.

BEMERKUNG: Wie bei Summen (siehe dazu auch Gleichung (1.25)) hängt der Wert des Integrals *nicht* von der Bezeichnung der Laufvariablen ab. Es gilt also $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(v)\mathrm{d}v$.

Mit Hilfe der sogenannten **Riemann-Summen** kann der Integralbegriff auch formal definiert werden. Hierbei nähert man für eine gegebene Zerlegung des Intervalls $[a,b]$ die Fläche zwischen Funktion und x–Achse durch die Summe der Rechteckflächen unterhalb bzw. oberhalb der Funktion (siehe Abbildung 12.1) und spricht entsprechend von Unter- und Obersummen der Funktion. Konvergieren nun Unter- wie Obersumme bei immer stärkerer Verfeinerung der Zerlegung des Intervalls zu einem *gemeinsamen* Grenzwert, so nennt man die Funktion über dem Intervall $[a,b]$ **Riemann-integrierbar**, oder auch kurz: **integrierbar**.

BEMERKUNG: Damit die Unter- und Obersummen endlich sind, werden wir vorerst immer nur **beschränkte Funktionen** f betrachten, ohne dies jedes Mal zu betonen. Später werden wir sehen, wie diese Einschränkung aufgehoben werden kann.

BEISPIEL:

Bei gleichmäßiger Zerlegung des Intervalls $[0,1]$ in n Teilintervalle ist die Obersumme der Funktion $f(x) = x^2$ durch $a_n = n^{-3}[1+2^2+3^2+\ldots+n^2]$ gegeben, die Untersumme durch $b_n = n^{-3}[0+1+2^2+\ldots+(n-1)^2]$. Beide Folgen konvergieren gegen den gleichen Grenzwert $\lim_{n\to\infty}(a_n) = \lim_{n\to\infty}(b_n) = 1/3$. Also gilt $\int_0^1 x^2 \mathrm{d}x = 1/3$.

SELBSTTEST: Führen Sie die einzelnen Teilschritte dieser Ableitung durch!

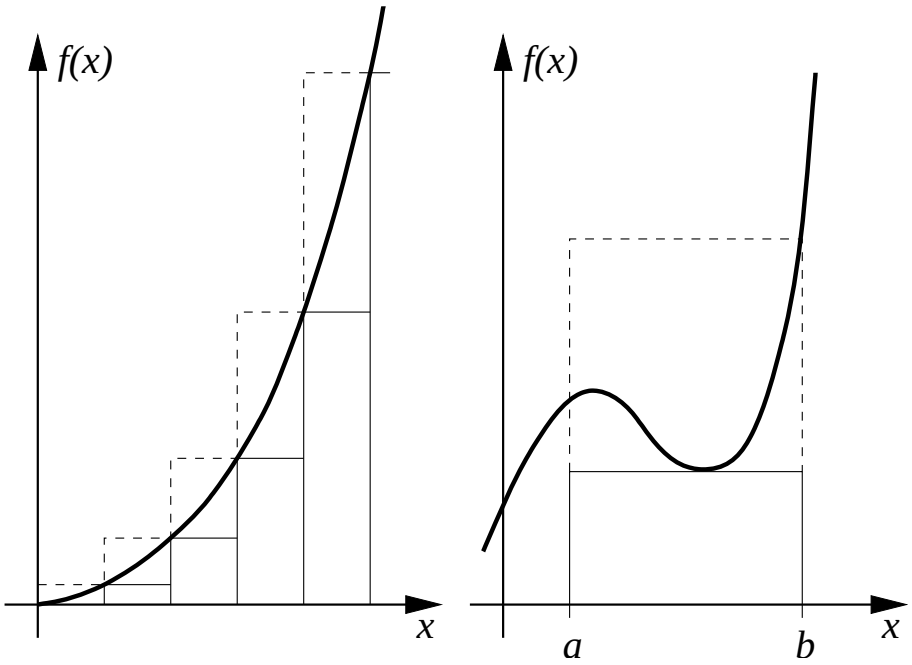


Abbildung 12.1: Links: Riemann-Summen und Integral einer Funktion; **Rechts:** Illustration zum Mittelwertsatz.

Aus der geometrischen Definition des Integrals folgt, dass integrierbare Funktionen nicht unbedingt stetig oder differenzierbar sein müssen. Man kann jedoch umgekehrt zeigen, dass alle auf einem Interval $[a,b]$ stetigen Funktionen und alle auf $[a,b]$ monotonen Funktionen über $[a,b]$ auch integrierbar sind.

Als Beispiel einer nicht Riemann-integrierbaren Funktion merke man sich die Funktion, die jede rationale Zahl auf 0, jede irrationale Zahl auf 1 abbildet. Hier gilt für jede Zerlegung des Intervalls $[a,b]$, dass die Untersumme unabhängig von der gewählten Zerlegung immer 0, die Obersumme immer 1 ist. Also existiert kein gemeinsamer Grenzwert der beiden Folgen und damit ist das Riemann-Integral nicht definiert.

12.2 Eigenschaften des bestimmten Integrals

Aus der Definition der Riemann-Summen ergeben sich unmittelbar die folgenden

Sätze über das bestimmte Integral einer beschränkten Funktion f:
[1] Wenn $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ und $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ existieren, so gilt für beliebige $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\mathrm{d}x \ . \tag{12.2}$$

Die Integration ist also wie die Differentiation eine *lineare* Operation.
[2] Ist f über $[a, b]$ integrierbar und $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ so ist f auch über $[\alpha, \beta]$ integrierbar.
[3] Ist f über $[a, b]$ und $[b, c]$ integrierbar, so ist f auch über $[a, c]$ integrierbar und es gilt

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x \ . \tag{12.3}$$

[4] Um lästige Fallunterscheidungen zu vermeiden, definiert man

$$\int_b^a f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \ . \tag{12.4}$$

Mit der Definition (12.4) gilt (12.3) für beliebige Punkte a, b und c in einem Intervall, über dem f integrierbar ist.
[5] Ist $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$, so ist

$$\int_a^b f(x) \geq 0 \ . \tag{12.5}$$

[6] Wenn $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ existiert, so existiert auch $\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$ und es gilt

$$\left| \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \right| \leq \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x \ . \tag{12.6}$$

[7] Das Produkt integrierbarer Funktionen ist integrierbar.
[8] Der Quotient integrierbarer Funktionen ist integrierbar, falls der Nenner an keiner Stelle des betrachteten Intervalls verschwindet.
[9] Mittelwertsatz der Integralrechnung:
Die Funktion f sei auf dem Intervall $[a, b]$ stetig. Dann gibt es (mindestens) ein $c \in [a, b]$ so dass

$$f(c) = \langle f \rangle_{a,b} \ . \tag{12.7}$$

Hierbei ist der **Mittelwert** $\langle f \rangle_{a,b}$ einer Funktion f auf dem Intervall $[a, b]$ seinem Namen entsprechend als mittlerer Funktionswert definiert,

$$\langle f \rangle_{a,b} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \ . \tag{12.8}$$

Beweis des Mittelwertsatzes der Integralrechnung:
Nach dem Satz vom Maximum und Minimum (Kapitel 8.1) nimmt die Funktion f auf dem Intervall $[a, b]$ ein absolutes Maximum $f_{\max}$ und ein absolutes Minimum $f_{\min}$ an, da sie nach Voraussetzung stetig ist. Weiterhin gilt für den Mittelwert immer $f_{\max} \geq \langle f \rangle_{a,b} \geq f_{\min}$. Wegen ihrer Stetigkeit nimmt f jeden Wert zwischen $f_{\min}$ und $f_{\max}$ an (Zwischenwertsatz, Kapitel 8.2.1), also auch den Wert $\langle f \rangle_{a,b}$ (Siehe auch Abbildung 12.1). □

Nach diesen allgemeinen Regeln wollen wir nun untersuchen, wie Integration und Differentiation miteinander zusammenhängen.

12.3 Integration und Differentiation

Definition (Stammfunktion):
Sei $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ eine reellwertige Funktion. Existiert eine reellwertige und auf dem Intervall $[a, b]$ differenzierbare Funktion F, für die

$$F'(x) = f(x) \tag{12.9}$$

gilt, so heißt F **Stammfunktion** von f.

BEMERKUNG: Zu gegebener Funktion f ist F also eine Funktion, deren Ableitung gleich f ist.

Frage: Ist F eindeutig durch f bestimmt?

Antwort: Nein, da mit $F(x)$ auch $F(x) + c$ für beliebigen Wert der Konstanten c eine Stammfunktion ist! Dies sind aber auch alle möglichen Stammfunktionen zur Funktion f, da nur die Ableitung einer Konstanten für alle x verschwindet.

Für stetige Funktionen f erhalten wir eine Stammfunktion $F(x)$ dadurch, dass wir $F(x)$ als Integral über f mit beliebiger, aber fester unterer Grenze a und variabler oberer Grenze x wählen,

$$F(x) = \int_a^x f(s)\mathrm{d}s \ . \tag{12.10}$$

Mit Hilfe der Definitionen (9.2) und (12.1) und der Gleichungen (12.3) und (12.4) gilt dann nämlich für stetige Funktionen $f(x)$

$$\begin{aligned} F'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{\int_a^x f(y)\ \mathrm{d}y - \int_a^{x_0} f(y)\ \mathrm{d}y}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{\int_{x_0}^x f(y)\ \mathrm{d}y}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} \langle f \rangle_{x_0,x} = f(x_0) \ . \end{aligned} \tag{12.11}$$

Damit ist $F(x) = I_f(a, x)$ eine Stammfunktion zur Funktion $f(x)$.

In gleicher Weise, wie mit Hilfe der Differentiation aus einer Funktion f eine neue Funktion f' erzeugt werden kann, kann durch Integration eine Funktion $F(x)$ erzeugt werden, deren Ableitung gerade wieder f ist. Da die Stammfunktion einer Funktion f jedoch nur bis auf eine additive Konstante bestimmt ist, ordnet die Integration einer bestimmten Funktion f nicht eine einzige Funktion zu, sondern eine ganze Menge von Stammfunktionen. Diese Menge wird auch **unbestimmtes Integral** von f genannt und oft abgekürzt mit

$$\int f(x)\mathrm{d}x \ . \tag{12.12}$$

BEMERKUNG: Wir sind bisher davon ausgegangen, dass f eine stetige Funktion ist. Solange aber f auf dem Intervall $[a, b]$ an nur endlich vielen Stellen x_i um einen jeweils endlichen Wert springt, können wir die Funktion (wie bisher) über jedem Teilintervall $[x_i, x_{i+1}]$ integrieren. Wir definieren dann das Integral über dem ganzen Intervall im Sinn von (12.3) als Summe dieser Teilintegrale. Allerdings gilt (12.9) *nicht* an den Sprungstellen x_i: dort ist f unstetig, so dass F' nicht definiert ist.

Aus der Definition einer Stammfunktion ergibt sich der folgende, zentrale Satz:

Satz (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung):
Sei f integrierbar und stetig auf $[a, b]$. Dann gilt für jede Stammfunktion F von f

$$\int_a^b f(s)\mathrm{d}s = \int_a^b F'(s)\mathrm{d}s = F(b) - F(a) \ . \tag{12.13}$$

BEMERKUNG: Integration und Differentiation sind also exakt entgegengesetzte mathematische Operationen. Weiterhin sagt (12.13) aus, dass wir bei Kenntnis einer Stammfunktion F zu einer gegebenen Funktion f das Integral $\int_a^b f(s)\mathrm{d}s$ für beliebige Grenzen a und b berechnen können.

Ein Hinweis zur Notation: Den Ausdruck $F(b) - F(a)$ kürzt man in Anlehnung an die Notation eines Integrals gerne mit $F|_a^b$ oder $[F]_a^b$ ab. Damit lautet Gleichung (12.13)

$$\int_a^b f(s)\mathrm{d}s = F|_a^b = [F]_a^b \ . \tag{12.14}$$

Sind die Stammfunktionen zweier Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ bekannt, so können wir wegen der Linearität der Integration (12.2) auch sofort die Stammfunktion von $h(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$ für beliebiges α und β berechnen — dieses Vorgehen entspricht genau dem beim Auffinden der Ableitung von $\alpha f(x) + \beta g(x)$ in Kapitel 9.2.1.

Im Gegensatz zur Produkt- und Quotientenregel der Differentiation gibt es jedoch im allgemeinen keine Regeln, wie das Produkt oder der Quotient von Funktionen integriert werden kann. Aus den Sätzen [7] und [8] in Kapitel 12.2 folgt zwar, dass die jeweiligen Stammfunktionen existieren, nicht jedoch, wie sie berechnet werden können.

Das Auffinden von Stammfunktionen ist in vielen Fällen schwierig, oft existiert auch gar keine geschlossene analytische Formel für die Stammfunktion einer vorgegebenen Funktion. Es gibt jedoch ausführliche Tabellen für Stammfunktionen und Integrale, beispielsweise im "Taschenbuch der Mathematik" von Bronstein und Semendjajew (Verlag Harri Deutsch, Frankfurt), in dem sich auch viele andere nützliche mathematische Formeln und Tabellen sowie Kurzzusammenfassungen der wichtigsten mathematischen Gebiete finden.

Daneben bieten heute Softwarepakete wie Mathematica, Maple und Matlab neben numerischer Integration auch Routinen, die (wenn möglich) analytische Integralausdrücke liefern.

Zwei Methoden zur Bestimmung von Stammfunktionen werden wir in den Kapiteln 12.7 und 12.8 kennenlernen, zuerst aber eine Tabelle mit den Stammfunktionen elementarer Funktionen.

12.4 Integrale spezieller Funktionen

Funktion $f = F'$ $(a, n, x \in \mathbf{R})$	Stammfunktion $F = \int f(x)\mathrm{d}x$	Einschränkung (wo relevant: $k \in \mathbf{Z}$)
Potenzen:		
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	$n \neq -1; x \neq 0$ für $n < -1$
x^{-1}	$\ln\lvert x\rvert$	$x \neq 0$
Exponentialfunktion:		
$\exp(ax)$	$a^{-1}\exp(ax)$	$a \neq 0$
a^x	$(\ln a)^{-1}a^x$	$a \neq 1$
Logarithmus:		
$\ln(ax)$	$x \cdot [\ln(ax) - 1]$	$a \cdot x > 0$
Trigonometrische Funktionen:		
$\sin(ax)$	$-a^{-1}\cos(ax)$	$a \neq 0$
$\cos(ax)$	$a^{-1}\sin(ax)$	$a \neq 0$
$\tan(ax)$	$-a^{-1}\ln\lvert\cos(ax)\rvert$	$a \neq 0$, $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$
$\cot(ax)$	$a^{-1}\ln\lvert\sin(ax)\rvert$	$a \neq 0$, $x \neq k\pi$
$\frac{1}{\cos^2(ax)}$	$a^{-1}\tan(ax)$	$a \neq 0$, $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$
$\frac{1}{\sin^2(ax)}$	$-a^{-1}\cot(ax)$	$a \neq 0$, $x \neq k\pi$
Hyperbelfunktionen:		
$\sinh(ax)$	$a^{-1}\cosh(ax)$	$a \neq 0$
$\cosh(ax)$	$a^{-1}\sinh(ax)$	$a \neq 0$
$\tanh(ax)$	$a^{-1}\ln\cosh(ax)$	$a \neq 0$
$\coth(ax)$	$a^{-1}\ln\lvert\sinh(ax)\rvert$	$a \neq 0$, $x \neq 0$
$\frac{1}{\cosh^2(ax)}$	$a^{-1}\tanh(ax)$	$a \neq 0$
$\frac{1}{\sinh^2(ax)}$	$-a^{-1}\coth(ax)$	$a \neq 0$, $x \neq 0$
Weitere wichtige Funktionen:		
$\frac{1}{a^2+x^2}$	$\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)$	$a \neq 0$
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$\frac{1}{2}[x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)]$	$\lvert x\rvert \leq a$

12.5 Rechenbeispiele zur Integration

BEISPIEL 1: **Welchen Wert hat das Integral $\int_2^4 x^2 \mathrm{d}x$?**

Nach der Tabelle in Abschnitt 12.4 ist $\frac{1}{3}x^3$ eine Stammfunktion von x^2.

Also gilt: $\int_2^4 x^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3\big|_2^4 = \frac{1}{3}(4^3 - 2^3) = 18\frac{2}{3}$

BEISPIEL 2: **Welchen Wert hat das Integral $\int_{-1}^3 (2x^3 + x - 4)\mathrm{d}x$?**

Eine Stammfunktion lautet: $\frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - 4x$.

Also gilt: $\int_{-1}^3 (2x^3 + x - 4)\mathrm{d}x = (\frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - 4x)\big|_{-1}^3 =$
$[\frac{1}{2}3^4 + \frac{1}{2}3^2 - 4\cdot 3] - [\frac{1}{2}(-1)^4 + \frac{1}{2}(-1)^2 - 4\cdot(-1)] = \frac{81}{2} + \frac{9}{2} - 12 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - 4 = 28.$

BEISPIEL 3: **Wie groß ist die Fläche unter der Sinusfunktion $\sin(x)$ von $x = 0$ bis $x = \pi$?**

Gesucht ist also das Integral $\int_0^\pi \sin(x)\mathrm{d}x$.

Es gilt $\int_0^\pi \sin(x)\mathrm{d}x = -\cos x|_0^\pi = -\cos(\pi) - [-\cos(0)] = 1 + 1 = 2$. Hätten Sie eine derart einfache Lösung erwartet?

BEISPIEL 4: **Welche Fläche $F(r)$ hat ein Kreis mit Radius r?**

Um diese Frage zu beantworten, berechnen wir die Fläche unter dem Viertelkreis $\sqrt{r^2 - x^2}$ mit den Grenzen $x = 0$ und $x = r$. Diese Fläche entspricht genau einem Viertel der gesuchten Kreisfläche — siehe auch Abbildung 12.2. Eine Stammfunktion (siehe Tabelle in Abschnitt 12.4) von $\sqrt{r^2 - x^2}$ ist $\frac{1}{2}[x\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 \arcsin\left(\frac{x}{r}\right)]$. Die Kreisfläche hat also den Wert
$F(r) = 4 \cdot \frac{1}{2}\left[x\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 \arcsin\left(\frac{x}{r}\right)\right]\Big|_0^r = 2 \cdot [r^2 \arcsin(1) - r^2 \arcsin(0)]$
$= 2r^2\pi/2 = r^2\pi.$

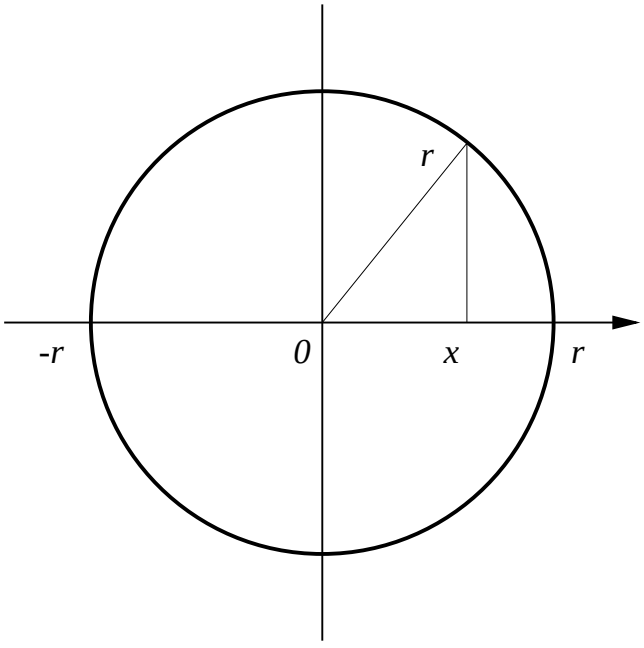


Abbildung 12.2: Kreisfläche und Volumen einer Kugel.

BEMERKUNG: Die Formel $F(r) = \pi r^2$ für die Fläche eines Kreises mit Radius r kennen Sie sicher schon, hier haben wir sie mit den uns jetzt zur Verfügung stehenden Methoden hergeleitet. Wir können nun weiterhin die Frage stellen, wie sich die Kreisfläche ändert, wenn man den Radius r verändert. Mathematisch bedeutet dies, dass wir nach der Ableitung $\mathrm{d}F(r)/\mathrm{d}r$ der Kreisfläche nach dem Radius fragen. Führen wir die Ableitung durch, so erhalten wir den Ausdruck $\mathrm{d}F(r)/\mathrm{d}r = \pi\mathrm{d}(r^2)/\mathrm{d}r = 2r\pi$. Auch diesen Ausdruck kennen Sie schon: es ist die Formel für den Umfang eines Kreises mit Radius r. Dieses Ergebnis erklärt sich dadurch, dass die Fläche eines Kreisrings mit innerem Radius r und Breite b durch die Differenz der Flächen zweier Kreise mit Radius $r+b$ und r, also durch $F(r+b) - F(r) = \pi[(r+b)^2 - r^2] = \pi[2rb + b^2] = b\pi[2r + b]$ gegeben ist. Im Grenzfall $b \to 0$ kann der zweite Summand in der Klammer gegenüber dem ersten vernachlässigt werden. In diesem Grenzfall ist die Fläche des Kreisringes aber auch durch das Produkt von Breite und Umfang gegeben, so dass der Umfang eines Kreises mit Radius r in der Tat durch $2\pi r$ gegeben ist.

Mit dieser geometrischen Interpretation hätten wir die Fläche eines Kreises mit Radius r auch als Integral $\int_0^r (2\pi x)\mathrm{d}x = 2\pi(x)|_0^r = 2\pi[r^2/2 - 0] = \pi r^2$, erhalten können — derselbe Ausdruck wie in Beispiel 4.

In gleicher Weise kann man nun auch das Volumen, beispielsweise einer Kugel, als Integral über geeignet gewählte Schnittflächen berechnen. Bezeichnet die Variable x wieder den Abstand vom Mittelpunkt (nun: der Kugel), so ist die Schnittfläche als Funktion von x durch $S(x) = \pi(r^2 - x^2)$ gegeben. Daraus ergibt sich das Volumen der Kugel zu $V(r) = \int_{-r}^{r} S(x)\mathrm{d}x = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\mathrm{d}x = \pi(r^2 x - x^3/3)\big|_{-r}^{r} = 2\pi(r^3 - r^3/3) = \frac{4}{3}\pi r^3$.

BEMERKUNG: Durch Differenzieren nach r erhalten wir daraus mit der gleichen Überlegung wie in der letzten Bemerkung die Oberfläche $O(r)$ einer Kugel mit Radius r: $O(r) = dV(r)/dr = 4\pi r^2$. Die Oberfläche einer Kugel mit Radius r ist also genau viermal so groß wie die Fläche eines Kreises mit gleichem Radius.

12.6 Uneigentliche Integrale

Bei der Definition des bestimmten Integrals mit Hilfe der Riemann-Summen wurde in Abschnitt 12.1 vorausgesetzt, dass die Funktion $f(x)$ *beschränkt* und das Integrationsintervall *endlich* ist.

Integrale, die diese Bedingungen nicht erfüllen, werden **uneigentliche Integrale** genannt. Man definiert sie als Grenzwerte von Integralen, in denen der Integrand beziehungsweise die Integrationsgrenzen endlich sind. Falls der entsprechende Grenzwert existiert, wird er **konvergentes uneigentliches Integral** genannt, ansonsten **divergentes uneigentliches Integral**.

BEISPIELE:

$$\int_1^\infty x^{-2}\mathrm{d}x = \lim_{a\to\infty} \int_1^a x^{-2}\mathrm{d}x = \lim_{a\to\infty} \left(-x^{-1}\big|_1^a\right) = \lim_{a\to\infty} \left(-a^{-1} + 1\right) = 1$$

$\int_1^\infty x^{-1}\mathrm{d}x$ divergiert, da

$$\lim_{a\to\infty} \int_1^a x^{-1}\mathrm{d}x = \lim_{a\to\infty} \left(\ln x|_1^a\right) = \lim_{a\to\infty} \left(\ln a\right)$$

divergiert.

12.7 Partielle Integration

Die sogenannte **partielle Integration** erlaubt es in vielen Fällen, Produkte von integrierbaren Funktionen zu integrieren:

Satz (Partielle Integration):
Die Funktionen f und g seien auf dem Intervall $[a, b]$ differenzierbar. Dann gilt:

$$\int_a^b f'(x)g(x)\ \mathrm{d}x = [f(x)g(x)]\big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x\ . \tag{12.15}$$

Beweis:
Die Regel ergibt sich direkt aus der Produktregel (9.7) für Ableitungen: $(f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g'$. Integriert man nämlich beide Seiten dieser Gleichung, so erhält man

$$\int_a^b (f\cdot g)'(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^b [f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)]\mathrm{d}x\ .$$

Die linke Seite kann mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (12.13) direkt ausgewertet werden und wir erhalten:

$$[f(x)g(x)]\big|_a^b = \int_a^b f'(x)g(x)\mathrm{d}x + \int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x$$

oder

$$\int_a^b f'(x)g(x)\mathrm{d}x = [f(x)g(x)]\big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x\ . \qquad \square$$

Auf den ersten Blick sieht die rechte Seite von (12.15) komplizierter als die linke Seite aus. Welchen Nutzen hat dann aber die partielle Integration?

Lassen Sie uns dazu die Integration des Produktes $h_1(x)\cdot h_2(x)$ zweier vorgegebener Funktionen $h_1(x)$ und $h_2(x)$ betrachten. Wenn die Ableitung einer dieser beiden Funktionen eine einfache Gestalt hat, und gleichzeitig die Stammfunktion der anderen Funktion nicht komplizierter ist als diese Funktion selbst, dann ist die rechte Seite von (12.15) eventuell leichter berechenbar als die linke Seite.

BEISPIEL 1:

Das Integral $\int_a^b x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ sei zu berechnen. Die Ableitung von x ist 1, das Integral von e^{-x} ist $-\mathrm{e}^{-x}$. Damit ist genau der gerade angesprochene Fall eingetreten. Wir wählen deshalb in (12.15) $f'(x) = \mathrm{e}^{-x}$ und $g(x) = x$, und erhalten $f(x) = -\mathrm{e}^{-x}$ und $g'(x) = 1$, so dass

$$\begin{aligned}\int_a^b \mathrm{e}^{-x}\cdot x\ \mathrm{d}x &= (-\mathrm{e}^{-x}x)\big|_a^b - \int_a^b (-\mathrm{e}^{-x})\cdot 1\ \mathrm{d}x \\ &= -\mathrm{e}^{-b}b + \mathrm{e}^{-a}a\ -\mathrm{e}^{-x}\big|_a^b = \mathrm{e}^{-a}(1+a) - \mathrm{e}^{-b}(1+b)\end{aligned} \tag{12.16}$$

Die partielle Integration kann also genau deshalb erfolgreich durchgeführt werden, da einerseits die Ableitung von x Eins ist und andererseits die Stammfunktion der Exponentialfunktion wieder die Exponentialfunktion ist, so dass das Integral auf der rechten Seite von (12.15) eine einfache Gestalt hat und direkt gelöst werden kann.

BEMERKUNG: Für das uneigentliche Integral $\int_0^\infty x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ erhalten wir aus (12.16): $\int_0^\infty x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = 1$.

BEISPIEL 2:

Integrale der Form $\int_a^b x^n \mathrm{e}^{cx} \mathrm{d}x$ mit $n \in \mathbf{N}$ und $a, b, c \in \mathbf{R}$ behandelt man nach dem gleichen Muster: man leitet die Potenzfunktion x^n ab und integriert die Exponentialfunktion. In jedem Schritt erniedrigt sich dabei der Exponent der Potenzfunktion um eins, an der Form der Exponentialfunktion ändert sich bis auf Multiplikation mit c^{-1} nichts,

$$\int_a^b x^n \mathrm{e}^{cx} \mathrm{d}x = \frac{1}{c} x^n \mathrm{e}^{cx} \Big|_a^b - \frac{n}{c} \int_a^b x^{n-1} \mathrm{e}^{cx} \mathrm{d}x \ . \tag{12.17}$$

Nach n partiellen Integration hat man damit das ursprüngliche Integral gelöst.

BEISPIEL 3:

Bei Integralen der Form $\int_a^b x^n \sin(cx) \mathrm{d}x$ oder $\int_a^b x^n \cos(cx) \mathrm{d}x$ geht man in gleicher Weise vor. Mit jeder partiellen Integration verringert sich der Exponent der Potenzfunktion wieder um eins, während die Komplexität der Winkelfunktion nicht anwächst — aus Cosinus wird Sinus, aus Sinus wird minus Cosinus. Damit ist man auch hier nach n Schritten am Ziel.

BEISPIEL 4:

Bei Integralen der Form $\int_a^b x^n \ln(cx) \mathrm{d}x$ geht man genau umgekehrt wie in Beispiel 1 vor. Man integriert die Potenzfunktion, differenziert den Logarithmus und nützt dann die Identität $\mathrm{d}(\ln x)/\mathrm{d}x = x^{-1}$ aus. Ein Beispiel: Das Integral $\int_a^b \ln(x) \mathrm{d}x$. Wir schreiben diesen Ausdruck als $\int_a^b 1 \cdot \ln(x) \mathrm{d}x$ und interpretieren die Eins als Ableitung von x. Damit erhalten wir:

$$\int_a^b \ln(x) \mathrm{d}x = x \cdot \ln x \big|_a^b - \int_a^b x \cdot x^{-1} \mathrm{d}x = b \ln b - a \ln a - b + a \ . \tag{12.18}$$

Mit genau dieser Methode wurde auch die Stammfunktion für $\ln x$ in der Tabelle von Abschnitt 12.4 bestimmt.

BEISPIEL 5:

Bei Integralen wie $I = \int_a^b \sin(cx) \exp(\alpha x) \mathrm{d}x$ oder $I = \int_a^b \cos(cx) \exp(\beta x) \mathrm{d}x$ integriert man zweimal partiell und erhält damit am Schluss eine Gleichung der Form $I = \beta + \gamma I$, wobei β und γ von den Integartionskonstanten a und b und den Parametern c und α abhängen. Diese Gleichung kann man für $\gamma \neq 0$ nach I auflösen und erhält $I = \beta/(1-\gamma)$.

12.8 Substitution

Integrale, deren Integranden in die Form $g(f(x)) \cdot f'(x)$ gebracht werden können, lassen sich mit Hilfe der **Substitutionsregel** lösen:

Satz (Substitution):
Die Funktion f sei auf dem Intervall $[a, b]$ differenzierbar. Die Funktion $g \circ f$ sei über dem Intervall $[a, b]$ integrierbar. Dann gilt:

$$\int_a^b g(f(x)) \cdot f'(x) \mathrm{d}x = \int_{f(a)}^{f(b)} g(u) \mathrm{d}u \ . \tag{12.19}$$

Beweis:
Die Substitutionsregel ergibt sich direkt aus der Kettenregel (9.22). Ist nämlich G eine Stammfunktion von g, so ist $G(f(x))$ nach der Kettenregel eine Stammfunktion von $g(f(x))\cdot f'(x)$. Damit gilt einerseits

$$\int_a^b g(f(x))\cdot f'(x)\mathrm{d}x = G(f(x))|_a^b = G(f(b)) - G(f(a)) \tag{12.20}$$

und andererseits

$$\int_{f(a)}^{f(b)} g(u)\mathrm{d}u = G(u)|_{f(a)}^{f(b)} = G(f(b)) - G(f(a)) \ . \tag{12.21}$$

Aus der Gleichheit der beiden rechten Seiten folgt die Substitutionsregel. □

BEISPIEL 1: **Welchen Wert hat das Integral $\int_0^\pi \sin(3x+1)\mathrm{d}x$?**

Wir erkennen, dass das Argument $3x+1$ der Sinusfunktion linear in x ist, womit seine Ableitung die Konstante 3 ist. Setzen wir also $u = f(x) = 3x+1$ und $g(u) = \sin u$, so können wir das Integral wie folgt umformen:

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \sin(3x+1)\mathrm{d}x &= \frac{1}{3}\int_0^\pi \underbrace{3}_{f'}\sin(\underbrace{3x+1}_{f})\ \mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int_1^{3\pi+1}\sin u\ \mathrm{d}u \\ &= -\frac{1}{3}\cos u|_1^{3\pi+1} \\ &= \frac{1}{3}[-\cos(3\pi+1)+\cos(1)] = \frac{2}{3}\cos(1)\end{aligned} \tag{12.22}$$

BEISPIEL 2: **Welchen Wert hat das Integral $\int_0^\pi x\sin(x^2)\mathrm{d}x$?**

Nachdem wir zwar das Integral der Sinusfunktion kennen, nicht jedoch das Integral von $\sin(x^2)$, versuchen wir wieder die Substitutionsregel und setzen dieses Mal $u = f(x) = x^2$ und $g(u) = \sin(u)$. Da nun $f'(x) = 2x$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_0^\pi x\sin(x^2)\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_0^\pi \underbrace{2x}_{f'}\sin(\underbrace{x^2}_{f})\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{\pi^2}\sin u\ \mathrm{d}u \\ &= -\frac{1}{2}\cos u|_0^{\pi^2} = -\frac{1}{2}[\cos(\pi^2)-1]\end{aligned} \tag{12.23}$$

BEISPIEL 3: **Wie integriert man Ausdrücke der Form $\int_a^b \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x$?**

Hier kann man entweder formal die Substitutionsregel mit $u = f(x)$ und $g(u) = u^{-1}$ anwenden, oder sich nochmals die Essenz der Kettenregel direkt verdeutlichen:

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x &= \int_a^b \frac{d[\ln(|f(x)|)]}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = \ln(|f(x)|)|_a^b \\ &= \ln(|f(b)|) - \ln(|f(a)|) = \ln\left(\left|\frac{f(b)}{f(a)}\right|\right)\end{aligned} \tag{12.24}$$

Mit diesem Zugang erhält man die Stammfunktionen von $\tan(x)$, $\cot(x)$ und $\coth(x)$ in der Tabelle von Kapitel 12.5. Frage: Warum "fehlt" in der Formel der Stammfunktion von $\tanh(x)$ die Betragsfunktion?

12.9 Aufgaben

1. (Integration) Berechnen Sie folgende elementare Integrale

(a) $\int_1^2 x^2 \,\mathrm{d}x$

(b) $\int_1^2 6x^2 \,\mathrm{d}x$

(c) $\int_1^2 4x^3 \,\mathrm{d}x$

(d) $\int_1^2 6x^2 + 4x^3 \,\mathrm{d}x$

(e) $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x} \,\mathrm{d}x$

(f) $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-2x} \,\mathrm{d}x$

(g) $\int_0^\pi \sin(x) \,\mathrm{d}x$

(h) $\int_0^{4\pi} \cos(x/2) \,\mathrm{d}x$

(i) $\int_{\pi/2}^\pi \sin(2x) \,\mathrm{d}x$

(j) $\int_1^2 \frac{4}{x} \,\mathrm{d}x$

(k) $\int_0^b 9x^2 \,\mathrm{d}x \;,\quad b \in \mathbf{R}$

(l) $\int_{-1}^1 \sinh(x/2) \,\mathrm{d}x$

2. (Partielle Integration und Substitution) Berechnen Sie mit Hilfe der partiellen Integration oder geeigneten Substitutionen folgende Integrale mit $a, b \in \mathbf{R}$ und $b > a > 0$:

(a) $\int_0^1 4x\mathrm{e}^{2x} \,\mathrm{d}x$

(b) $\int_0^1 x^2\mathrm{e}^{x} \,\mathrm{d}x$

(c) $\int_1^4 3x^2 \ln(x) \,\mathrm{d}x$

(d) $\int_0^1 -2x\mathrm{e}^{-x^2} \,\mathrm{d}x$

(e) $\int_a^b 6x^2 \sin(2x^3) \,\mathrm{d}x$

(f) $\int_0^\pi \cos(2x + \pi) \,\mathrm{d}x$

3. (Partielle Integration und Substitution) Berechnen Sie mit Hilfe der partiellen Integration oder geeigneten Substitutionen folgende Integrale:

(a) $\int_0^{\sqrt{\pi}/2} x\sin(4x^2) \,\mathrm{d}x$

(b) $\int_0^\infty x\mathrm{e}^{-x} \,\mathrm{d}x$

(c) $\int_0^\infty k^2 x\mathrm{e}^{-kx} \,\mathrm{d}x \;,\quad k \in \mathbf{R}^+$

(d) $\int_0^\pi x^2 \sin\left(\frac{x^3}{\pi^2}\right) \,\mathrm{d}x$

(e) $\int_0^{\pi/2} \cos(x)\cos(\sin(x)) \,\mathrm{d}x$

(f) $\int_1^\infty \frac{\ln(x^2)}{2x^2} \,\mathrm{d}x$

4. (Integration) Werten Sie die folgenden Integrale aus:

(a) $\int_1^2 x^5 \,\mathrm{d}x$

(b) $\int_a^b cx^n \,\mathrm{d}x$, für $n > 0$

(c) $\int_a^b (cx)^n \,\mathrm{d}x$, für $n > 0$

(d) $\int_0^1 (x^3 + \frac{1}{2}\sqrt{x}) \,\mathrm{d}x$

(e) $\int_1^3 \frac{1}{x^2} \,\mathrm{d}x$

(f) $\int_0^1 (x-1)^4 \,\mathrm{d}x$

(g) $\int_{-\infty}^0 \exp(x) \,\mathrm{d}x$

(h) $\int_{-1}^1 (x^4 - x^2) \,\mathrm{d}x$

(i) $\int_{-1}^1 (x^3 - x) \,\mathrm{d}x$

(j) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin(x) \,\mathrm{d}x$

(k) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(\omega t) \,\mathrm{d}t$

(l) $\int_a^b \mathrm{sgn}(x) \,\mathrm{d}x$

5. (Integration) Sei $f(x)$ eine gerade und $g(x)$ eine ungerade Funktion. Zeigen Sie:

(a) $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$ für alle reellen a.
(b) $\int_{-a}^{a} g(x)\,\mathrm{d}x = 0$ für alle reellen a.
(c) Was folgern Sie daraus für $\int_{-a}^{a} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$?

6. (Mittelwert) Berechnen Sie den Mittelwert der Funktion $f(x) = 2x - x^3$

(a) auf dem Intervall $[1, 4]$,
(b) auf dem Intervall $[-5, 5]$,
(c) über alle reellen Zahlen. Hinweis: Berechnen Sie zunächst den Mittelwert auf einem Intervall $[-c, c]$ und lassen Sie dann c gegen unendlich gehen.

7. (Integration über die Kugel) Berechnen Sie das Volumen einer Kugel mit Radius R. Gehen Sie dazu wie in Beispiel 4 von Kapitel 12.5 skizziert vor und veranschaulichen Sie sich die Methode, indem Sie einige der Schnittflächen, über die integriert wird, in eine Kugel zeichnen.

8. (Substitution) Werten Sie folgende Integrale aus:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$ (Tipp: $x = \sin(y)$ setzen)

(b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos(x)\sin^2(x)\,\mathrm{d}x$ (Tipp: $u = \sin(x)$ setzen)

(c) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\exp(-\frac{x}{1+x})}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x$

9. (Partielle Integration) Berechnen Sie das Integral $\displaystyle\int_a^b [\sin(x)]^2\,\mathrm{d}x$

(a) mit Hilfe der partiellen Integration,

(b) indem Sie zuerst aus der Moivreschen Formel und dem Satz des Pythagoras die Beziehung $\sin^2(x) = \frac{1}{2}[1 - \cos(2x)]$ herleiten und damit den Integranden vereinfachen.

Aus Ihrem Ergebnis folgt insbesondere

$$\int_0^{k\frac{\pi}{2}} [\sin(x)]^2\,\mathrm{d}x = \int_0^{k\frac{\pi}{2}} [\cos(x)]^2\,\mathrm{d}x = k\frac{\pi}{4}\ .$$

Veranschaulichen Sie sich dieses Resultat graphisch.

10. (Partielle Integration) Zeigen Sie durch partielle Integration, dass die **Gammafunktion**

$$\Gamma(t) = \int_0^{\infty} x^{t-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x\ ,\ t > 0$$

der Gleichung $\Gamma(t+1) = t\,\Gamma(t)\ ,\ t > 0$ genügt und somit eine Verallgemeinerung des Fakultätsbegriffes auf reelle Zahlen $t > 0$ ermöglicht. Berechnen Sie $\Gamma(n)$ für $n \in \{1, 2, 3\}$ explizit.

Kapitel 13

Differentialgleichungen

Wie zu Beginn von Kapitel 6 erörtert wurde, bieten sich zwei Alternativen bei der mathematischen Beschreibung von dynamischen Prozessen an: Iterierte Abbildungen und Differentialgleichungen. Dabei besteht das wesentliche Merkmal einer Iterierten Abbildung darin, dass die unabhängige Variable t eine natürliche Zahl ist und in diskreten Schritten ansteigt: $t = 1, 2, 3, \ldots$ Daraus ergibt sich, dass die Lösung einer Iterierten Abbildung eine Folge $(x_t)_{t\in\mathbf{N}}$ ist. Iterierte Abbildungen beschreiben die Natur also nur "punktweise" zu diskreten Zeitpunkten.[1]

Im Gegensatz dazu sucht man bei einer Differentialgleichung nach einer reellen Funktion $x : t \mapsto x(t)$, deren zeitliche Ableitung(en) eine vorgegebene funktionelle Beziehung erfüllt. Die unabhängige Variable ist nun also eine reelle Variable $t \in \mathbf{R}$. Damit wird die physikalische Natur der Zeit in der mathematischen Beschreibung explizit berücksichtigt. Der Definitionsbereich der Lösungsfunktion sind die reellen Zahlen $\mathbf{R}$, nicht mehr nur die natürlichen Zahlen $\mathbf{N}$ wie im Fall einer Iterierten Abbildung. Ein wesentlicher Vorteil dieser neuen Beschreibung besteht darin, dass wir Ergebnisse der Differential- und Integralrechnung wegen der kontinuierlichen Struktur der Zeit direkt auf die Untersuchung dynamischer Prozesse anwenden können.

Im einfachsten Fall wird die Änderung einer dynamischen Variablen x durch eine reelle Funktion $f(x)$ beschrieben, die angibt, wie groß die zeitliche Veränderung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)$ in Abhängigkeit vom gegenwärtigen Wert $x(t)$ der Variable ist,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = f(x(t)) \ . \tag{13.1}$$

Eine Differentialgleichung, bei der wie in (13.1) nur die *erste* Ableitung der abhängigen Variablen x auftritt, heißt **Differentialgleichung erster Ordnung**.

BEMERKUNG: Wie bei Iterierten Abbildungen tritt das Konzept Funktion auch bei Differentialgleichungen in zwei vollkommen unterschiedlichen Bedeutungen auf:

a) Die Differentialgleichung (13.1) bedeutet, dass die zeitliche Änderung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)$ zu jedem Zeitpunkt t durch die *Funktion* $f : x \mapsto f(x)$ vorgegeben ist, wobei für x der zu diesem Zeitpunkt angenommene Wert $x(t)$ einzusetzen ist. Die unabhängige Variable der Funktion f ist hier also die Größe x.

b) Als Lösung der Differentialgleichung (13.1) erhält man die *Funktion* $x : t \mapsto x(t)$. Nun ist die Zeit t die unabhängige Variable während x eine abhängige Variable geworden ist.

[1] Da wir dynamische Prozesse analysieren wollen, wird die unabhängige Variable einer Iterierten Abbildung oder Differentialgleichung vorerst zur Vereinfachung immer die physikalische Größe "Zeit" sein. Iterierte Abbildungen und Differentialgleichungen treten jedoch auch in Zusammenhängen auf, in denen die unabhängige Variable *nicht* die Zeit ist. Siehe dazu auch die nächste Fußnote!

Exkurs in die Physik – Fallgesetze und Planetenbewegung:

Nach Newton ist die auf einen Körper zur Zeit t wirkende Kraft $F(t)$ mit der zeitlichen Änderung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}p(t)$ seines Impulses identisch, der als Produkt von Masse $m(t)$ und Geschwindigkeit $v(t)$ definiert ist, $p(t) = m(t) \cdot v(t)$:

$$F(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}p(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[m(t)v(t)] \ . \tag{13.2}$$

Ist die Masse des Körpers konstant, so folgt aus (13.2):

$$F(t) = m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v(t) \ , \tag{13.3}$$

was landläufig auch als *"Kraft = Masse · Beschleunigung"* bekannt ist.

Beim freien Fall in Erdnähe ist die auf einen Körper wirkende Kraft zeitlich konstant und gleich seiner Gewichtskraft, $F(t) = mg$, wobei $g = 9.81$ m s^{-2} die Erdbeschleunigung bezeichnet. Damit erhalten wir aus (13.3) nach Kürzen von m

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v(t) = g \ . \tag{13.4}$$

Nachdem die zeitliche Ableitung der Geschwindigkeit nach (13.4) konstant ist, muss die Geschwindigkeit als Funktion der Zeit *linear* anwachsen,

$$v(t) = v_0 + g \cdot t \tag{13.5}$$

wobei v_0 die Geschwindigkeit des Körpers zur Zeit $t = 0$ bezeichnet.

Wollen wir auch den Ort $x(t)$ des Körpers als Funktion der Zeit berechnen, so benützen wir, dass die Geschwindigkeit die zeitliche Ableitung des Ortes ist, $v(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)$, und setzen diese Beziehung in (13.5) ein,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = v_0 + g \cdot t \ . \tag{13.6}$$

Da $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)$ linear mit t anwächst, muss $x(t)$ eine quadratische Funktion in t sein,

$$x(t) = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{g}{2} \cdot t^2 \ . \tag{13.7}$$

Hierbei bezeichnet x_0 den Ort des Körpers zur Zeit $t = 0$.

Die hier gezeigte Lösung des Fallproblems ist deshalb möglich, da die Differentialgleichungen (13.4) und (13.6) einfache Struktur haben — im ersten Fall ist die Ableitung der gesuchten Funktion eine Konstante, im zweiten Fall wächst sie linear. Der tiefere Grund liegt in der einfachen Form der Gewichtskraft, die unabhängig von der Zeit und vom Ort des Körpers durch $F = mg$ gegeben ist.

Bei der Bewegung eines Körpers in größerem Abstand von der Erde (Satellit, Mond) oder der Bewegung der Planeten um die Sonne ist die wechselseitig wirkende Kraft *nicht* mehr konstant sondern hängt vom gegenseitigen Abstand ab. Das Kraftgesetz hat nun die Form $F = F(x)$,[†] wobei für x der momentane Abstand $x(t)$ eingesetzt werden muss. Dies erschwert die mathematische Lösung. Sie ist in diesem Fall aber noch möglich und führt auf die drei Keplerschen Gesetze der Planetenbewegung.

[†]Für die Gravitationskraft gilt: $F(x) \propto x^{-2}$.

Ein weiteres Beispiel: Bei der Diskussion der Exponentialfunktion in Kapitel 9.3.1 haben

wir mit der Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = \alpha x(t) \quad \text{mit } \alpha \in \mathbf{R} \tag{13.8}$$

eine Differentialgleichung kennengelernt, bei der die zeitliche Ableitung einer gesuchten Funktion — hier $x(t)$ — zur Zeit t vom Wert der Funktion zu diesem Zeitpunkt abhängt.

Diese Situation sollte kritisch mit Gleichung (13.4) verglichen werden. Dort ist die Ableitung — nun von $v(t)$ — eine Konstante, so dass die Gleichung mit Kenntnis der Stammfunktion $g \cdot t$ der rechten Seite von (13.4) sofort gelöst ist. Dagegen erfordert die Lösung von (13.8) eine Suche im Raum aller reellen Funktionen nach derjenigen Funktion, deren Ableitung genau mit sich selbst übereinstimmt. Zum Glück ist dies bei linearen Differentialgleichungen wie (13.8) aber leicht möglich. Aus Kapitel 9.3.1 kennen wir sogar schon die Lösung von (13.8): $x(t) = Ce^{\alpha t}$ mit $C \in \mathbf{R}$. Gleichung (13.8) beschreibt also exponentielle Wachstums- ($\alpha > 0$) bzw. Zerfallsprozesse ($\alpha < 0$).[2]

Wie löst man nun eine Differentialgleichung wie zum Beispiel $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = f(x(t))$ bei vorgegebener Funktion $f(x)$? Im Allgemeinen ist diese Frage um einiges schwerer zu beantworten als die Frage "Wie löst man die Gleichung $x = f(x)$?" Im ersten Fall geht es ja darum, eine *Funktion* $x : t \mapsto x(t)$ zu finden, deren Ableitung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)$ an jeder Stelle t gerade mit dem Wert $f(x(t))$ übereinstimmt. Im zweiten Fall ist dagegen "nur" diejenige *Zahl* x gesucht, die genau mit dem Wert der Funktion f an der Stelle x übereinstimmt.[3]

Fragestellungen aus den Naturwissenschaften und anderen Bereichen haben zu einer großen Menge von höchst unterschiedlichen Differentialgleichungstypen geführt, von denen viele einen jeweils ganz spezifischen Lösungsweg erfordern. Im Rahmen dieser Vorlesung werden wir uns auf einfache Differentialgleichungen konzentrieren und im Detail demonstrieren, wie man diese auch für die Biologie wichtigen Systeme qualitativ und quantitativ untersucht.

Allgemeine und spezielle Lösung

Eine Differentialgleichung beschreibt genau wie eine Iterierte Abbildung immer eine ganze Familie dynamischer Prozesse. Die Menge dieser Funktionen wird als **allgemeine Lösung** bezeichnet. Erst die **Anfangsbedingung**, beispielsweise die Größe $x(0)$ der Variablen x zur Zeit $t = 0$, bestimmt, welchen Verlauf die dynamische Entwicklung des speziell betrachteten Systems nehmen wird. Anders ausgedrückt: die Anfangsbedingungen legen — abgesehen von pathologischen Fällen, die in Abschnitt 13.4.1 betrachtet werden — die **spezielle Lösung** eindeutig fest.

Wieviele Messgrößen werden benötigt, um den Anfangszustand zu charakterisieren? Betrachten wir als Beispiel die Differentialgleichung (13.8). Diese Gleichung verknüpft die erste Ableitung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)$ mit $x(t)$, enthält also zu jedem Zeitpunkt zwei anfangs unbekannte

[2] Wie schon erwähnt, muss die unabhängige Variable in einer Differentialgleichung nicht unbedingt die Zeit t sein. So führt beispielsweise die Frage, wie der Luftdruck p in der Erdatmosphäre mit der Höhe h abnimmt, auf eine Differentialgleichung der Form $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}h}p(h) = f(p(h))$. Nimmt man weiter an, dass Luft als ein ideales Gas betrachtet werden kann und die Lufttemperatur nicht von der Höhe abhängt, so erhält man für erdnahe Luftschichten (Annahme: Gewichtskraft unabhängig von der Höhe) die Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}h}p(h) = -\alpha p(h) \quad \text{mit} \quad \alpha = g\frac{\rho_0}{p_0}\,, \tag{13.9}$$

wobei g die Erdbeschleunigung und ρ_0 und p_0 die Dichte der Luft bzw. den Luftdruck auf Meereshöhe bezeichnen. Dies führt auf die **Barometrische Höhenformel** $p(h) = p_0\mathrm{e}^{-\alpha h}$, mit deren Hilfe beispielsweise Höhenmesser von Bergsteigern die erreichte Höhe aus dem momentanen Druck berechnen.

Vergleicht man die Differentialgleichung (13.9) mit (13.8), so sieht man, dass beide Gleichungen formal identisch sind: Die Rolle der unabhängigen Variable t in (13.8) spielt nun h, die Rolle der abhängigen Variable x in (13.8) hat p übernommen. Siehe dazu auch Kapitel 9.3.1

[3] Selbst dieses zweite Problem ist nicht immer geschlossen lösbar, wie das Beispiel $x = \mathrm{e}^{-x}$ zeigt: Diese so einfach wirkende Gleichung kann nicht nach x aufgelöst werden!

Größen: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)$ und $x(t)$. Um die Differentialgleichung zum Zeitpunkt $t = 0$ zu lösen, benötigt man also eine zusätzliche vorgegebene Größe. In den meisten Problemen wird dies der Wert x_0 der Variable x zur Zeit $t = 0$ sein, in manchen Anwendungen aber auch der Wert $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\big|_{t=0}$ der Ableitung von x zur Zeit $t = 0$, in seltenen Fällen auch kompliziertere Ausdrücke.

Wie bei Iterierten Abbildungen besteht die allgemeine Strategie zur Lösung einer Differentialgleichung darin, zuerst *alle* Funktionen $x(t)$ zu finden, die die Differentialgleichung erfüllen — die allgemeine Lösung der Differentialgleichung. Für die Differentialgleichung (13.8) lautet beispielsweise die allgemeine Lösung $x(t) = C\mathrm{e}^{\alpha t}$ mit $C, \alpha \in \mathbf{R}$. Damit eine vorgegebene Anfangsbedingung wie $x(0) = x_0$ erfüllt ist, muss hier $C = x_0$ gelten, wie man durch Einsetzen sieht. Die Anfangsbedingung könnte jedoch beispielsweise auch durch $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\big|_{t=0} = v_0$ festgelegt sein. Wie müßte nun C gewählt werden? Differenziert man die allgemeine Lösung nach der Zeit, so erhält man $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = \alpha C\mathrm{e}^{\alpha t}$. Wertet man diese Gleichung zur Zeit $t = 0$ aus, so erhält man $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\big|_{t=0} = \alpha C$. Da als Anfangsbedingung die Gleichung $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\big|_{t=0} = v_0$ erfüllt werden soll, muss nun $C = v_0/\alpha$ gelten. In gleicher Weise würden andere Formen der Anfangsbedingung zu wieder anderen speziellen Lösungen führen.

BEMERKUNG: Bei der Formulierung der allgemeinen Lösung $x(t) = C\mathrm{e}^{\alpha t}$ haben wir gerade angenommen, dass der Parameter C eine reelle Zahl ist. Diese Einschränkung war sinnvoll, da wir (13.8) zur Beschreibung von Wachstums- beziehungsweise Zerfallsprozessen verwenden wollen, so dass x eine reellwertige Größe sein sollte, beispielsweise die Größe einer Population. Wir werden jedoch später auch Beispiele studieren, in denen wir in der allgemeinen Lösung *komplexe* Zahlen zulassen werden. Nur die spezielle Lösung ist physikalisch oder biologisch relevant und sollte deshalb reellwertig sein. Die allgemeine Lösung selbst spielt dagegen nur die Rolle einer Hilfskonstruktion. Wie wir in Kapitel 14 sehen werden, vereinfacht dieser auf den ersten Blick obskure "Weg durchs Komplexe" den Aufwand bei der Lösung von linearen Differentialgleichungen ganz erheblich.

13.1 Qualitative Analyse von Differentialgleichungen der Form $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = f(x(t))$

Es ist oft nicht möglich, die Lösung einer Differentialgleichung in einer expliziten Formel anzugeben. Für Differentialgleichungen erster Ordnung mit nur einer abhängigen Variablen, die auf die Form

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = f(x(t)) \tag{13.10}$$

gebracht werden können, kann man jedoch das langfristige *qualitative* Verhalten selbst dann angeben, wenn man keine geschlossene Lösung $x(t) = \ldots$ finden kann. Da bei vielen biologischen Fragestellungen, zum Beispiel der Frage nach der Persistenz einer Population, oft schon die Kenntnis des Langzeitverhaltens wesentlich zum Verständnis des Problems beiträgt, wollen wir uns nun mit der qualitativen Analyse dieser Differentialgleichungen befassen.

Wie bei Iterierten Abbildungen sind zeitlich konstante Lösungen $x(t) = x^\star$ die einfachsten möglichen Lösungen einer Differentialgleichung. Sie werden auch **stationäre Lösungen** genannt. Die Ableitung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)$ einer stationären Lösung nach der Zeit muss Null sein, da sie sich gerade dadurch auszeichnet, zeitlich unveränderlich zu sein. Vergleich mit (13.10) zeigt:

Satz (Stationäre Lösungen):
Ist $x^\star \in \mathbf{R}$ eine Nullstelle der Funktion $f(x)$,

$$f(x^\star) = 0 \ , \tag{13.11}$$

so ist die konstante Funktion $x(t) = x^\star$ eine stationäre Lösung der Differentialgleichung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = f(x(t))$.

Wählt man nämlich eine Nullstelle von $f(x)$ als Anfangsbedingung, $x(0) = x^\star$, so verschwindet mit f wegen (13.10) auch die Zeitableitung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)$. Eine Nullstelle $x^\star$ ist also eine Lösung von (13.10), wenn auch eine sehr einfache.[4]

BEMERKUNG: Wie eine Iterierte Abbildung besitzt die Differentialgleichung (13.10) je nach Form des Graphen von f keine, eine oder mehrere stationäre Lösungen.

Was kann über die Lösungen von (13.10) für $x(0) \neq x^\star$ gesagt werden?

Wachstum ($\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) > 0$) oder Abnahme ($\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) < 0$) einer Lösung der Differentialgleichung (13.10) ist durch den jeweiligen Wert von $f(x)$ an der Stelle $x(t)$ bestimmt. Wir erhalten:

Satz (Qualitatives Verhalten von Lösungen):
Eine Lösung $x(t)$ der Differentialgleichung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = f(x(t))$ an der Stelle x_0
- wächst als Funktion der Zeit t, wenn $f(x_0) > 0$,
- fällt als Funktion der Zeit t, wenn $f(x_0) < 0$, und
- ist konstant, also eine stationäre Lösung, wenn $f(x_0) = 0$.

Beachten Sie an dieser Stelle nochmals genau den Unterschied zwischen $f(x)$ und $x(t)$: Die Funktion f ist fest vorgegeben und ordnet jedem Wert der Variablen x einen Wert $f(x)$ zu. Dieser Wert $f(x)$ wird dann benützt, um in (13.10) die zeitliche Ableitung von x nach t zu berechnen. Die Lösung $x(t)$ ist dagegen eine von der Zeit t abhängige Funktion. Machen Sie sich dies in aller Ruhe bewusst.

SELBSTTEST: Vergleichen Sie die Bedingungen für das Anwachsen bzw. Abnehmen einer Lösung der Differentialgleichung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = f(x(t))$ mit den entsprechenden Bedingungen für die Lösung der Iterierten Abbildung $x_{t+1} = f(x_t)$.

BEISPIEL : **Qualitative Analyse der Differentialgleichung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = \alpha x(t)$.**

[4] Die Bedingung $g(x^\star) = x^\star$ (Gleichung 6.4) für eine konstante Lösung einer Iterierten Abbildung $x_{t+1} = g(x_t)$ weicht deutlich von der Bedingung $f(x^\star) = 0$ für eine konstante Lösung der Differentialgleichung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = f(x(t))$ ab. Geht man jedoch von der Iterierten Abbildung zur zugeordneten Differenzengleichung $x_{t+1} - x_t = g(x_t) - x_t = \tilde{g}(x_t)$ über — siehe dazu auch Fußnote 2 auf Seite 72 — so erkennt man, dass die Bedingung $g(x^\star) = x^\star$ der Bedingung $\tilde{g}(x^\star) = 0$ entspricht und diese formal mit der Bedingung $f(x^\star) = 0$ äquivalent ist.

Diese Überlegung zeigt, dass bei einem Vergleich von in der Zeit diskreten Modellen mit Differentialgleichungsmodellen nicht die betreffende Iterierte Abbildung sondern die zugeordnete Differenzengleichung betrachtet werden sollte.

"Fußnote in der Fußnote": In einer Iterierten Abbildung oder einer Differenzengleichung nimmt die Zeit t nur diskrete Werte an. In der Realität entspricht dies einer Schrittweite Δt, die dem Zeitintervall zwischen zwei Messungen am System entspricht. (Bisher haben wir zur Einfachhheit immer $\Delta t = 1$ gesetzt und $t \in \mathbf{N}$ gewählt.) Verändert man die Schrittweite Δt, so muss auch die Funktion g in Abhängigkeit von Δt ebenfalls geeignet verändert werden um weiterhin den gleichen dynamischen Prozess zu beschreiben. Im Grenzfall $\Delta t \to 0$ erhält man dabei aus der Differenzengleichung eine Differentialgleichung. Diskutieren Sie dies am Beispiel eines exponentiellen Wachstumsprozesses, $x(t+\Delta) = a(\Delta) \cdot x(t)$, indem Sie die Schrittweite Δ sukzessive auf $\Delta/2$, $\Delta/4$, ... verringern. Wie hängt $a(\Delta/2)$ von $a(\Delta)$ ab, damit der in der Zeit verfeinerte Prozess zu den Zeiten $t + k\Delta, k \in \mathbf{N}$ mit dem Ausgangsprozess identisch ist?

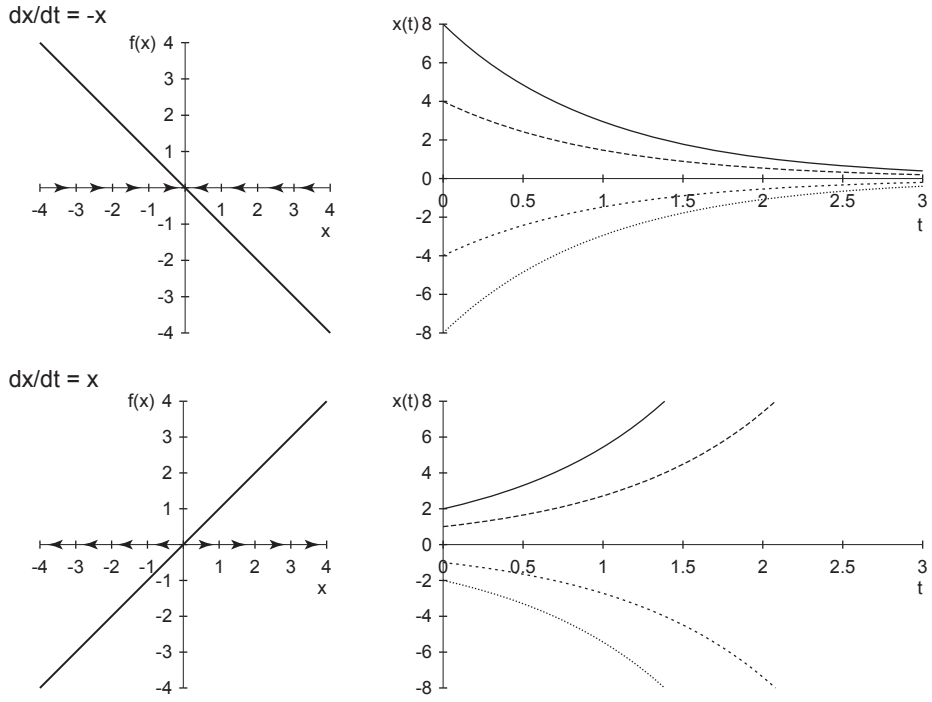


Abbildung 13.1: Qualitative Analyse der Differentialgleichungen $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = -x(t)$ (oben) und $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = x(t)$ (unten). Links ist jeweils der Graph von $f(x)$ gezeigt, rechts Lösungen $x(t)$ für verschiedene Anfangsbedingungen $x(0)$. In den linken Teilabbildungen sind zusätzlich Bereiche, in denen $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)$ negativ ist, mit nach links gerichteten Pfeilen markiert und Bereiche mit $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) > 0$ mit nach rechts gerichteten Pfeilen. Die Pfeile symbolisieren die Abnahme (nach links gerichtete Pfeile) bzw. das Wachstum (nach rechts gerichtete Pfeile) einer Lösung für den betreffenden x-Wert; vergleiche dazu die beiden rechten Teilabbildungen.

Wie wir schon aus Kapitel 9.3.1 wissen, beschreibt die Differentialgleichung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = \alpha x(t)$ exponentielle Wachstums- bzw. Zerfallsprozesse. Wir wollen sie nun qualitativ analysieren ohne ihre analytische Lösung zu verwenden.

Für den Spezialfall $\alpha = 0$ lautet die Gleichung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = 0$. In diesem Fall ist *jede* konstante Funktion $x(t) = x_0$ eine stationäre Lösung. Weitere Lösungen existieren nicht — eine recht langweilige Situation. Im Folgenden wollen wir deshalb $\alpha \neq 0$ voraussetzen.

Die Funktion $f(x) = \alpha x$ hat nun genau eine Nullstelle $x^\star$: $x^\star = 0$. Damit existiert unabhängig von α genau eine stationäre Lösung, $x(t) = 0$ (siehe auch Abbildung 13.1). Falls $\alpha < 0$, so ist $f(x_0) = \alpha x_0$ für positive x_0 negativ, $f(x_0) < 0$, so dass die Lösung $x(t)$ als Funktion der Zeit fällt. Für negative x_0 wächst sie als Funktion der Zeit, da hier $f(x_0) > 0$. Damit muss sich das System unabhängig vom Anfangswert x_0 für lange Zeiten auf die stationäre Lösung $x(t) = 0$ zubewegen. Die stationäre Lösung ist damit asymptotisch stabil.

Ist dagegen $\alpha > 0$, so ist $f(x_0) = \alpha x_0$ für positive x_0 positiv, $f(x_0) > 0$, so dass die Lösung $x(t)$ als Funktion der Zeit wächst. Für negative x_0 fällt sie als Funktion der Zeit, da hier $f(x_0) < 0$. Damit muss sich das System unabhängig vom Anfangswert x_0 für lange Zeiten von der stationären Lösung $x(t) = 0$ wegbewegen. Die stationäre Lösung ist damit instabil. Abhängig vom Startwert divergiert die Lösung entweder gegen plus oder minus Unendlich.

Diese Ergebnisse hätten wir auch direkt an der Lösung $x(t) = x_0 \mathrm{e}^{\alpha t}$ ablesen

können. Hier haben wir sie jedoch ohne jegliche Kenntnis dieser Lösung abgeleitet. Die Stärke dieses Ansatzes wird deutlich, wenn wir Differentialgleichungen studieren, für die keine exakten Lösungen existieren.

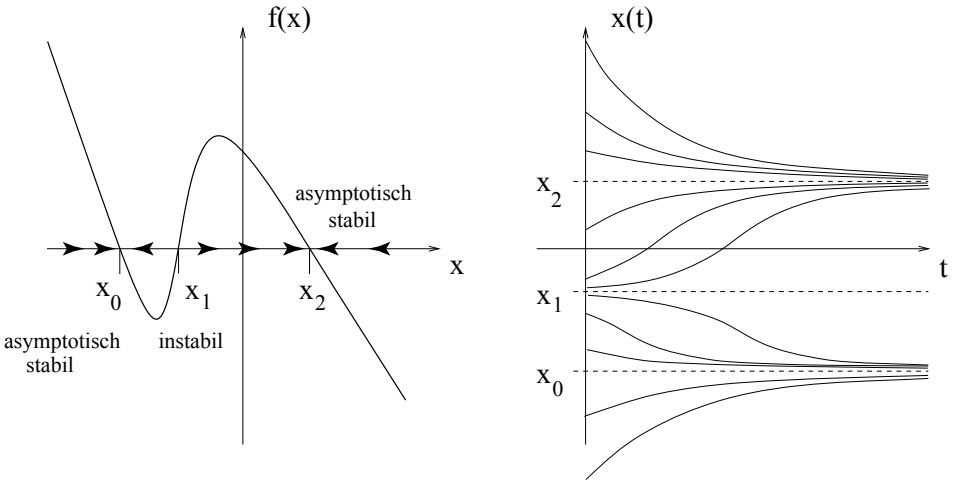


Abbildung 13.2: Qualitative Analyse einer gewöhnlichen eindimensionalen Differentialgleichung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = f(x(t))$: links der Graph von $f(x)$, rechts Lösungen $x(t)$ für verschiedene Anfangsbedingungen $x(0)$. Beachten Sie, dass sich stabile und instabile stationäre Lösungen abwechseln! Wie in Abbildung 13.1 sind Bereiche mit $f(x) < 0$ mit nach links gerichteten Pfeilen markiert, Bereiche mit $f(x) > 0$ mit nach rechts gerichteten Pfeilen. Beispielsweise ist $f(x)$ im Intervall zwischen x_1 und x_2 positiv (Pfeile nach rechts, d.h. zu einem größeren x-Wert hin). Entsprechend wächst auch die Lösung $x(t)$ in diesem Bereich, wie die rechte Teilabbildung zeigt.

Aus dem bisher Gesagten folgt, dass bei gegebenem x die Lösung $x(t)$ genau dann wächst, wenn $f(x)$ positiv ist, und fällt, wenn $f(x)$ negativ ist. Daraus ergibt sich zwangsläufig, dass alle Lösungen als Funktion der Zeit **monoton** sein müssen (siehe auch Abbildung 13.2). Insbesondere können damit in einer eindimensionalen gewöhnlichen Differentialgleichung der Form (13.10) **keine Oszillationen** auftreten! Dies würde ja bedeuten, dass bei gegebenem Wert $x(t)$ je nach der Phase der Oszillation die Ableitung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)$ einmal positiv und einmal negativ ist. Die Ableitung hat jedoch nach Gleichung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = f(x(t))$ bei gegebenem Wert $x(t)$ nur genau einen Wert, nämlich $f(x(t))$. Dieses wichtige Ergebnis impliziert, dass zur Modellierung von Oszillationen mit Differentialgleichungen entweder Erweiterungen notwendig sind, z.B., $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = f(x(t)) + g(t)$, oder mindestens zwei dynamische Variablen $x_1(t)$ und $x_2(t)$. Dagegen können in Iterierten Abbildungen sehr wohl Oszillationen in Systemen mit nur einer dynamischen Variable auftreten. Siehe dazu auch nochmals Abbildung 7.1 auf Seite 89.

SELBSTTEST: Diskutieren Sie den Grund für diesen fundamentalen Unterschied zwischen Iterierten Abbildungen und Differentialgleichungen: Warum können in Iterierten Abbildungen wie der logistischen Gleichung $x_{t+1} = ax_t(1 - x_t)$ Oszillationen auftreten, nicht jedoch in der auf den ersten Blick sehr ähnlichen Differentialgleichung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = ax(t) \cdot [1 - x(t)]$?

Wie aus Abbildung 13.2 ersichtlich ist, existieren zwei Klassen von stationären Lösungen: Solche, zu denen andere Lösungen hinstreben, und solche, von denen sie sich wegbewegen. Erstere werden als **asymptotisch stabil**, letztere als **instabil** bezeichnet — siehe auch hierzu Kapitel 6 für einen Vergleich mit Iterierten Abbildungen. Wie man aus der Abbildung ebenfalls ersieht, ist eine stationäre Lösung x_0 genau dann asymptotisch stabil, wenn die Funktion $f(x)$ für wachsendes x an der Stelle x_0 ihr Vorzeichen von plus

zu minus wechselt, und instabil im umgekehrten Fall oder falls $f(x)$ die x-Achse nicht schneidet sondern nur berührt.

Satz (Stabilität stationärer Lösungen):
Die Funktion $f : x \mapsto f(x)$ habe eine Nullstelle $x^\star$. Dann ist die stationäre Lösung $x(t) = x^\star$ der Differentialgleichung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = f(x(t))$ **asymptotisch stabil**, wenn $f(x)$ an der Stelle $x^\star$ monoton fällt. Ansonsten ist sie **instabil**.
Besitzt die Funktion f mehrere Nullstellen $x^\star$, ist sie auf dem gesamten betrachteten Intervall differenzierbar, und gilt an allen Nullstellen $\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x^\star} \neq 0$, so wechseln sich instabile und asymptotisch stabile stationärer Lösungen ab.

Qualitative Eigenschaften einfacher dynamischer Systeme:

Iterierte Abbildungen erster Ordnung
gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung

	Iterierte Abbildung	Differentialgleichung
Modellierung der Zeit	diskrete Schritte	kontinuierlich
	$(t \in \mathbf{N})$	$(t \in \mathbf{R})$
Dynamik	$x(t+1) = f(x(t))$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = f(x(t))$
Lösung ist eine	Folge $t \mapsto x_t$	reelle Funktion $t \mapsto x(t)$
Die Lösung		
• ist konstant wenn	$f(x^\star) = x^\star$	$f(x^\star) = 0$
	(Fixpunkt von f)	(Nullstelle von f)
• wächst an der Stelle x wenn	$f(x) > x$	$f(x) > 0$
• fällt an der Stelle x wenn	$f(x) < x$	$f(x) < 0$
Periodische Lösungen möglich	ja	nein
		('ja' ab DGL 2.Ordn.)
Chaos möglich	ja	nein
		('ja' ab DGL 3.Ordn.)

BEMERKUNG: Auch für Systeme zweier gekoppelter Differentialgleichungen läßt sich eine ähnliche qualitative Analyse durchführen, wobei nun eine Reihe interessanter neuer Phänomene auftreten können. So sind in zweidimensionalen Systemen **Oszillationen** möglich, jedoch **kein Chaos** — dafür sind bei einer Formulierung mit Differentialgleichungen mindestens drei abhängige Variablen notwendig. Bei einer Beschreibung mit iterierten Abbildungen kann Chaos dagegen schon in einem Modell mit nur einer dynamischen Variable entstehen, wie wir am Beispiel der Logistischen Gleichung in Kapitel 7 mit Hilfe von Computerdemonstrationen plausibel gemacht haben.

13.2 Lösung einer Differentialgleichung erster Ordnung durch Separation der Variablen

Im letzten Abschnitt haben wir uns mit der qualitativen Analyse von Differentialgleichungen erster Ordnung der Form

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = f(x(t)) \tag{13.12}$$

beschäftigt, ohne jedoch ein Verfahren anzugeben, wie man diese Gleichungen explizit lösen könnte. Eine wichtige Methode, die unter dem Namen **"Separation der Variablen"** oder **"Trennung der Variablen"** bekannt ist, soll nun vorgestellt werden:

Bildlich gesprochen sagt (13.12), dass sich x als Funktion der Zeit t gerade so verändert, dass diese Veränderung durch die Funktion $f(x(t))$ gegeben ist. Die Steigung der Tangente an die Funktion $x(t)$ im Punkt t ist also genau durch $f(x(t))$ gegeben.

Interpretieren wir nun die linke Seite von Gleichung (13.12) einen Moment lang als Quotient zweier infinitesimaler Größen — der Veränderung $\mathrm{d}x$ der Variablen x und des zeitlichen Intervalls $\mathrm{d}t$ — so können wir auch schreiben:

$$\mathrm{d}x = f(x)\ \mathrm{d}t\ . \tag{13.13}$$

Diese Formel entspricht exakt unserer Anschauung der Tangente an die Lösung $x(t)$: In jedem infinitesimalen Intervall der Länge $\mathrm{d}t$ ändert sich x gerade um $\mathrm{d}x = f(x)\mathrm{d}t$.

Falls $f(x) = 0$, so impliziert (13.12) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = 0$, also $x =$ konstant. Wenn dagegen $f(x) \neq 0$, so dividieren wir die letzte Gleichung durch $f(x)$ und erhalten

$$\frac{1}{f(x)}\ \mathrm{d}x = \mathrm{d}t\ . \tag{13.14}$$

Nach diesem Schritt stehen alle Terme, die die Variable x enthalten, auf einer Seite der Gleichung (13.14), alle Terme die die Variable t enthalten stehen auf der anderen Seite der Gleichung. Wir haben also die zwei Variablen voneinander getrennt — deshalb auch die Bezeichnung der Methode: *Trennung der Variablen* beziehungsweise *Separation der Variablen.*

Wenn aber Gleichung (13.14) für jeden beliebigen Zeitpunkt gilt, dann auch über einen längeren Zeitraum hinweg, so dass wir die Gleichung von einem Anfangszeitpunkt t_0 bis zu einem Endpunkt t_1 integrieren dürfen,

$$\int_{x(t_0)}^{x(t_1)} \frac{1}{f(x)}\ \mathrm{d}x = \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t = t_1 - t_0\ . \tag{13.15}$$

Die Integrationsgrenzen $x(t_0)$ und $x(t_1)$ auf der linken Seite der Gleichung ergeben sich daraus, dass das System zur Zeit t_0 den Wert $x(t_0)$ annimmt, und zur Zeit t_1 den Wert $x(t_1)$.

Satz – Lösung der Differentialgleichung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = f(x(t))$:
Die Differentialgleichung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = f(x(t))$ kann exakt gelöst werden wenn eine Stammfunktion der Funktion $\frac{1}{f(x)}$ existiert. Die Lösung der Differentialgleichung ergibt sich dann aus der Gleichung

$$\int_{x(t_0)}^{x(t_1)} \frac{1}{f(x)}\ \mathrm{d}x = t_1 - t_0\ .$$

Wir wollen dies an einem konkreten Beispiel illustrieren. Wir wählen $f(x) = \alpha x$, d.h. wir betrachten die lineare Differentialgleichung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = \alpha x(t)$. Dabei wollen wir den trivialen Fall $\alpha = 0$ ausschließen.

Für $\alpha \neq 0$ hat $f(x) = \alpha x$ genau eine Nullstelle $x^\star$, nämlich $x^\star = 0$. Für $x_0 = x^\star = 0$ erhalten wir also eine stationäre Lösung. Ist dagegen $x_0 \neq 0$, so müssen wir die Funktion $(\alpha x)^{-1}$ integrieren. Nach der Tabelle in Kapitel 12.4 ist eine Stammfunktion von $(\alpha x)^{-1}$ durch $\alpha^{-1} \ln|\alpha x|$ gegeben. Zur Vereinfachung wollen wir im Folgenden $x_0 > 0$ annehmen. Damit erhalten wir

$$\alpha^{-1}[\ln(\alpha x(t_1)) - \ln(\alpha x(t_0))] = t_1 - t_0 \ . \tag{13.16}$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit α und verwenden die Identität $\ln a - \ln b = \ln(a/b)$ so erhalten wir

$$\ln\left(\frac{x(t_1)}{x(t_0)}\right) = \alpha(t_1 - t_0) \ . \tag{13.17}$$

Nach Exponentieren beider Seiten können wir die Gleichung nach $x(t_1)$ auflösen. Benennen wir t_1 schließlich noch in t um, so erhalten wir

$$x(t) = x(t_0)\ \mathrm{e}^{\,\alpha(t-t_0)} \tag{13.18}$$

in vollkommener Übereinstimmung mit dem heuristischen Ergebnis in Kapitel 9.3.1.

BEMERKUNG: Da in (13.15) die Integrationsgrenzen explizit eingehen, liegt die Integrationskonstante (siehe Kapitel 12) jetzt schon (korrekt) mit $x(t_0)$ fest.

Kann der hier vorgestellte Ansatz auch auf allgemeinere Differentialgleichungen angewendet werden? Betrachten wir dazu die Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = f(x)\, g(t) \ . \tag{13.19}$$

Im Gegensatz zu Gleichung (13.12) ist hier die zeitliche Ableitung von $x(t)$ nicht direkt durch $f(x)$ bestimmt, sondern durch das Produkt von $f(x)$ mit dem explizit zeitabhängigen Faktor $g(t)$. Als Beispiel für eine derartige Differentialgleichung könnte die Veränderung der Größe $x(t)$ einer Population dienen, deren Wachstum $f(x)$ durch saisonale Effekte $g(t)$ wie beispielsweise das jahreszeitlich wechselnde Futterangebot moduliert wird.

Zur Lösung von (13.19) formen wir wie bei Gleichung (13.12) in Gedanken um,

$$\mathrm{d}x = f(x)\, g(t)\ \mathrm{d}t \ , \tag{13.20}$$

dividieren wieder durch $f(x)$,

$$\frac{\mathrm{d}x}{f(x)} = g(t)\ \mathrm{d}t \ , \tag{13.21}$$

und erhalten nun

$$\int_{x(t_0)}^{x(t_1)} \frac{1}{f(x)}\ \mathrm{d}x = \int_{t_0}^{t_1} g(t)\ \mathrm{d}t \ . \tag{13.22}$$

Satz – Lösung der Differentialgleichung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = f(x(t))\, g(t)$:
Die Differentialgleichung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = f(x(t))\, g(t)$ kann exakt gelöst werden wenn eine Stammfunktion der Funktion $\frac{1}{f(x)}$ und der Funktion $g(t)$ existiert. Die Lösung der Differentialgleichung ergibt sich dann aus der Gleichung

$$\int_{x(t_0)}^{x(t_1)} \frac{1}{f(x)}\ \mathrm{d}x = \int_{t_0}^{t_1} g(t)\ \mathrm{d}t \ .$$

Die Berechnung der Lösung ist durch das Integral auf der rechten Seite von (13.22) komplizierter geworden, konzeptionell hat sich jedoch gegenüber (13.15) nichts geändert! Die Lösung aus Gleichung (13.15) ist ein Spezialfall von Gleichung (13.22) für $g(t) = 1$.

BEISPIEL : **Die Differentialgleichung** $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = -\frac{x(t)}{t}$

Die Abnahme eines Stoffes sei *explizit* von der Zeit abhängig, und zwar gemäß der Differentialgleichung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = -\frac{x(t)}{t}$. Hierbei müssen wir $t > 0$ voraussetzen, da die rechte Seite der Differentialgleichung zur Zeit $t = 0$ nicht definiert ist.

Vergleichen wir die Differentialgleichung mit (13.19) so sehen wir, dass die Funktionen $f(x)$ und $g(t)$ nun durch $f(x) = x$ und $g(t) = -t^{-1}$ gegeben sind. Gleichung (13.22) lautet also nun

$$\int_{x(t_0)}^{x(t_1)} x^{-1}\,\mathrm{d}x = -\int_{t_0}^{t_1} t^{-1}\,\mathrm{d}t \tag{13.23}$$

woraus wir

$$\ln\frac{x(t_1)}{x(t_0)} = -\ln\frac{t_1}{t_0} = \ln\frac{t_0}{t_1} \tag{13.24}$$

erhalten. Ausgewertet zur Zeit t ergibt sich die allgemeine Lösung $x(t) = \frac{C}{t}$. Aus dem Wert $x(t_0)$ von x zur Zeit t_0 folgt schließlich die spezielle Lösung $x(t) = \frac{t_0 \cdot x(t_0)}{t}$.

SELBSTTEST: Berechnen Sie zur Probe die Ableitung von $x(t)$ und überprüfen Sie damit, dass die angegebene Funktion die Differentialgleichung erfüllt.

13.3 Weitere Differentialgleichungstypen

13.3.1 Gekoppelte Differentialgleichungen

Modelle mit mehreren Variablen, beispielsweise ökologische Systeme mit einer Beutepopulation x_1 und einer Räuberpopulation x_2 führen zu **gekoppelten Differentialgleichungen** wie dem Lotka-Volterra System:

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = \alpha x_1 - \beta x_1 x_2\ , \tag{13.25}$$

$$\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = \gamma x_1 x_2 - \delta x_2 \tag{13.26}$$

mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$.

SELBSTTEST: Diskutieren Sie die biologische Grundlage dieser beiden Differentialgleichungen! Gehen Sie dabei von der Ihnen schon bekannten Dynamik (13.8) aus und versuchen Sie, die Bedeutung der Parameter α bis δ zu erschließen! Setzen Sie dazu in einem ersten Schritt $\beta = \gamma = 0$. Welche Populationsdynamik beschreibt dieses vereinfachte Modell? Welche Population stirbt aus, welche wächst? (Siehe auch den Abschnitt 9.3.1!) Erweitern Sie das Modell nun in einem zweiten Schritt, indem Sie $\beta > 0$ zulassen. Was bedeutet dieser zusätzliche Term für die zeitliche Entwicklung der Beutepopulation? Welchen Effekt hat er für die Räuberpopulation? Wie interpretieren Sie diesen Term biologisch? Im letzten Schritt sei nun auch $\gamma > 0$. Welchen Effekt hat dies auf die Räuberpopulation?

13.3.2 Differentialgleichungen höherer Ordnung

In den bisherigen Beispielen treten nur erste Ableitungen der abhängigen Variablen x nach der unabhängigen Variablen (hier: die Zeit t) auf. Die Gleichungen werden deshalb

Differentialgleichungen erster Ordnung genannt. Im Gegensatz dazu ist die aus der Physikvorlesung bekannte Differentialgleichung einer gedämpften Schwingung,

$$m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}x(t) + \gamma\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = -kx(t)\ , \tag{13.27}$$

eine **Differentialgleichung zweiter Ordnung**, da eine zweite Ableitung auftaucht.[5] Verallgemeinernd ist die Ordnung einer Differentialgleichung durch den Grad der höchsten Ableitung gegeben.

BEISPIEL :

Im Beispiel der Fallgesetze zu Beginn dieses Kapitels versteckt sich ebenfalls eine Differentialgleichung zweiter Ordnung: Da die Geschwindigkeit $v(t)$ die erste Ableitung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)$ des Ortes nach der Zeit ist, kann Gleichung (13.4) auch als

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}x(t) = g \tag{13.28}$$

geschrieben werden. Ganz allgemein lautet das Newtonsche Gesetz (13.3) für konstante Massen

$$F = m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}x(t) \tag{13.29}$$

und ergibt dann bei vorgegebener ortsabhängiger Kraft $F = F(x)$ die Bewegungsgleichung

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}x(t) = \frac{F(x(t))}{m}, \tag{13.30}$$

also eine Differentialgleichung zweiter Ordnung. Wegen des Newtonschen Gesetzes spielen derartige Differentialgleichungen eine zentrale Rolle in der "klassischen" oder "Newtonschen" Mechanik. Im Gegensatz dazu ist die Bewegungsgleichung der Quantenmechanik, die sogenannte Schrödingergleichung, eine Differentialgleichung erster Ordnung.

Für eine Differentialgleichung erster Ordnung benötigt man genau eine Anfangsbedinung, um die spezielle Lösung festzulegen.

Notiz: Für eine Differentialgleichung n-ter Ordnung werden n Anfangsbedingungen benötigt um das System eindeutig zu charakterisieren.

Dies sieht man für den Fall $n = 2$ an Gleichung (13.27): Diese Gleichung verknüpft *drei* Größen: $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}x(t)$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)$ und $x(t)$. Damit die Gleichung gelöst werden kann, müssen *zwei* dieser Größen vorgegeben sein, zum Beispiel $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\big|_{t=0}$ und $x(0)$.

Notiz: Differentialgleichungen n-ter Ordnung kann man durch Variablentransformation auf ein äquivalentes System von n gekoppelten Differentialgleichungen erster Ordnung transformieren.

Dies soll am Beispiel (13.27) verdeutlicht werden. Definiert man $v(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)$, so gilt $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}x(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v(t)$, und man erhält ein System von zwei gekoppelten Differentialgleichungen,

$$m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v(t) + \gamma v(t) + kx(t) = 0 \tag{13.31}$$

[5] In ihrer physikalischen Interpretation beschreibt (13.27) die Bewegung eines Federpendel mit Masse m, Reibungskonstante γ und Federkonstante k. Die Größe x bezeichnet die Auslenkung des Pendels aus seiner Ruhelage.

und

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) - v(t) = 0 \ . \tag{13.32}$$

Vergleichen Sie dieses Vorgehen auch mit der Formulierung der Fallgesetze zu Beginn dieses Kapitels.

Für eine Differentialgleichung n-ter Ordnung definiert man analog $x_n(t) = \mathrm{d}^{n-1}x/\mathrm{d}t^{n-1}$ und erhält damit ein System von n gekoppelten Differentialgleichungen für die dynamischen Variablen $x_1(t)$ bis $x_n(t)$.

Je nach Anwendung wird man eine der beiden alternativen Beschreibungen (13.27) oder (13.31)/(13.32) vorziehen. Weiterhin verdeutlicht die Äquivalenz, dass Systeme, die auf den ersten Blick vollkommen unterschiedlichen Bewegungsgesetzen zu gehorchen scheinen, unter Umständen identische dynamische Eigenschaften besitzen.

13.3.3 Partielle Differentialgleichungen

In vielen biologisch relevanten Problemen wie beispielsweise der Diffusion eines biochemischen Botenstoffes betrachtet man dynamische Variablen, die von Zeit *und* Ort abhängen. Wird der Botenstoff an einer bestimmten Stelle (x_0, y_0, z_0) zur Zeit t_0 ausgeschüttet, so ist seine Konzentration an dieser Stelle anfangs hoch. Im Lauf der Zeit wird die Konzentration dort absinken, während sie an benachbarten Orten erst ansteigt, um dann später auch dort abzufallen, wenn sich der Stoff weiter verdünnt. In diesem Beispiel sind außer der Zeit t auch die Ortsvariablen (x, y, z) *unabhängige Variable*. Die abhängige Variable, die Konzentration ρ des Botenstoffes ist eine Funktion dieser vier Variablen, $\rho = \rho(x, y, z, t)$.

Die zeitliche Änderung von ρ an einer festen Stelle (x, y, z) hängt davon ab, wie stark an dieser Stelle die räumlichen Konzentrationsunterschiede sind, wie groß also die räumliche Ableitung von ρ ist. Bei der mathematischen Beschreibung von Diffusionsprozessen treten deshalb sowohl zeitliche als auch räumliche Ableitungen auf, was auf sogenannte **partielle Differentialgleichungen** führt, die wir in einem späteren Kapitel betrachten werden. Partielle Differentialgleichungen sind auch für das Studium vieler anderer raum-zeitlicher Phänomene wichtig, wie der Musterbildung in der Entwicklungsbiologie, der Ausbreitung von Aktionspotentialen in der Neurobiologie, oder der Wechselwirkung verschiedener Arten in der Ökologie und Evolutionsbiologie.

Vorerst werden wir uns jedoch auf Differentialgleichungen mit nur einer unabhängigen Variable beschränken. Derartige Differentialgleichungen werden **gewöhnliche Differentialgleichungen** genannt. Da wir in Kapitel 13 und 14 ausschließlich gewöhnliche Differentialgleichungen betrachten, verwenden wir eine vereinfachte Notation und verstehen in diesen zwei Kapiteln unter dem Ausdruck "Differentialgleichung" immer eine "gewöhnliche Differentialgleichung".

13.4 Ausblick

13.4.1 Eindeutigkeit von Lösungen

Zeichnen die Anfangsbedingungen immer genau eine Lösung aus? Anders gefragt: Kann man aus einer Anfangsbedingung immer das zukünftige Verhalten eines Systems voraussagen, oder kann es auch geschehen, dass sich aus einer Anfangsbedingung mehrere verschiedene Lösungen entwickeln?

In der Tat kann man zeigen, dass Differentialgleichungen der Form $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = f(x(t))$ eindeutige Lösungen haben, wenn $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)\big|_{x_0}$ für alle x_0 beschränkt ist. Wir werden dies im Rahmen dieser Vorlesung jedoch nicht beweisen.

SELBSTTEST: Betrachten Sie als Gegenbeispiel die Differentialgleichung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = \sqrt{x(t)}$ mit der Anfangsbedingung $x(0) = 0$. Dieses Beispiel ist *nicht* biologisch motiviert und wurde allein deshalb gewählt, weil die Ableitung von $\sqrt{x}$ für $x \to 0$ divergiert. Lösen Sie diese Gleichung durch Separation der Variablen. Welche zweite, einfache (konstante!) Lösung hat die Differentialgleichung noch? Spricht etwas dagegen, beide Arten von Lösung zu einer neuen Lösung zu kombinieren? Was folgt daraus für die Ein- beziehungsweise Mehrdeutigkeit der Lösungen der Differentialgleichung?

Als einen zur Separation der Variablen alternativen Weg können Sie auch den Lösungsansatz $x(t) = a(t-c)^q$ mit $a, c \in \mathbf{R}$ für $t > c > 0$ zum Auffinden der nicht-trivialen Lösung versuchen. Setzen Sie dafür den Ansatz in die linke und rechte Seite von $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = \sqrt{x(t)}$ ein, und fordern Sie, dass er für alle Zeiten t gelte. Was folgt daraus für die Parameter q, a und c? Welche dieser Größen sind jetzt noch unbestimmt, welche eindeutig festgelegt? Was bedeutet dies für die möglichen Lösungen der Differentialgleichung?

Die Mehrdeutigkeit von Lösungen verletzt den Determinismus der klassischen Physik – "identische Anfangsbedingungen erzeugen identische Lösungen". Es ist deshalb kein Wunder, dass in physikalischen Problemen Anfangsbedingungen eindeutige Lösungen auszeichnen. In phänomenologischen Modellen kann es dagegen leicht "passieren", dass eine Differentialgleichung mehrdeutige Lösungen zuläßt. Man sollte das zugrundeliegende Modell dann aber daraufhin untersuchen, welche mikroskopischen Annahmen zur Lösungsmehrdeutigkeit führen. Oft wird man dabei intrinsische Grenzen des Modells erkennen. Bei der Modellierung von Populationsdynamiken darf man beispielsweise nur bei großen Populationen von einer kontinuierlichen Populationsgröße ausgehen: Die Zeitentwicklung einer Population mit zwei oder drei Individuen kann nicht durch eine Differentialgleichung für die Populationsgröße beschrieben werden — hier wäre vielmehr eine Iterierte Abbildung wie das Model von Fibonacci in Kapitel 6.2.4 angebracht — bei einer Population von mehreren hundert Individuen kann man dagegen ohne große Fehler eine reellwertige Populationsgröße annehmen.

13.4.2 Fortsetzbarkeit von Lösungen

Wir haben bis jetzt stillschweigend angenommen, dass für jede Differentialgleichung Lösungen existieren und für beliebige Zeiten fortgesetzt werden können. Dies muss aber nicht so sein:

SELBSTTEST: Betrachten Sie die (harmlos wirkende) Differentialgleichung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = [x(t)]^2$ mit der Anfangsbedingung $x(0) = 1$, die als sehr einfaches Modell einer bimolekularen autokatalytischen Reaktion aufgefaßt werden kann — das Anwachsen der Substanz x geht umso schneller vonstatten, je mehr Substanz schon vorhanden ist; da je zwei Moleküle miteinander reagieren, hängt die Reaktionsgeschwindigkeit quadratisch von x ab. Lösen Sie die Differentialgleichung wieder durch Separation der Variablen. Alternativ dazu können sie wie im letzten Selbsttest einen ad-hoc Lösungsansatz der Form $x(t) = (c - t)^n$ versuchen und daraus n und c bestimmen. Diskutieren Sie die Lösung und untersuchen Sie dabei vorallem, ob die Lösung beschränkt ist!

Wie bei der Mehrdeutigkeit von Lösungen gilt auch für Fragen nach der Existenz von Lösungen, dass "unphysikalische" Phänomene im Allgemeinen auf die Grenzen des betrachteten Modells hinweisen, und dann direkt zu besser motivierten Ansätzen führen. So müßte im obigen Modell die Endlichkeit der Resourcen in die Modellierung einbezogen werden. Der Ausdruck x^2 müßte also durch eine Funktion ersetzt werden, die für große x gegen Null geht, so dass die Lösung nicht mehr in endlicher Zeit divergiert.

13.4.3 Numerische Integration von Differentialgleichungen

Wie kann man sich die Integration einer Differentialgleichung anschaulich vorstellen? Eine Differentialgleichung wie (13.8) gibt an, wie groß $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)$ für gegebenes $x(t)$ ist. Sobald man also die Anfangsbedingung x_0 zur Zeit $t = 0$, $x_0 = x(0)$ kennt, kann man $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\big|_{t=0}$ berechnen und weiß damit, wie stark sich $x(t)$ zur Zeit $t = 0$ ändert. Einen infinitesimal kleinen Zeitschritt ϵ später, zur Zeit $t = \epsilon$, wird dann in linearer Näherung $x(\epsilon) \approx x_0 + \epsilon \, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\big|_{t=0}$ gelten. Mit diesem Wert für x kann man nun mit Hilfe der Differentialgleichung den Wert $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\big|_{t=\epsilon}$ berechnen, und damit $x(2\epsilon) \approx x(\epsilon) + \epsilon \, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\big|_{t=\epsilon}$, daraus nach dem gleichen Muster $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\big|_{t=2\epsilon}$ und damit $x(3\epsilon) \approx x(2\epsilon) + \epsilon \, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\big|_{t=2\epsilon}$ etc. Man nähert also die durch die Differentialgleichung beschriebene Dynamik durch eine Iterierte Abbildung

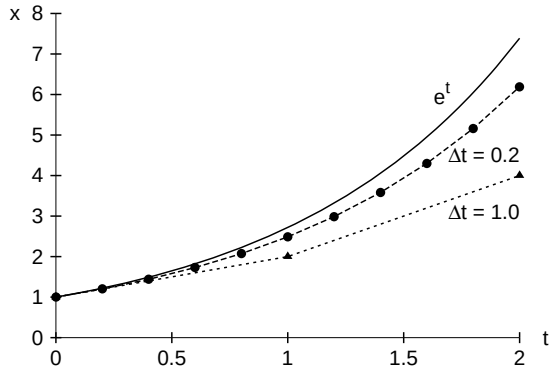


Abbildung 13.3: Numerische Lösung der Differentialgleichung $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = x$. Die analytische Lösung $x(t) = \mathrm{e}^x$ wird durch das Euler-Verfahren mit abnehmender Schrittweite Δt immer besser approximiert.

an, in der die exakte Lösung durch eine stückweise geradlinige Kurve ersetzt wird. Diese Methode wird **Euler-Verfahren** genannt. Die Approximation wird umso besser sein, je kleiner ϵ gewählt wird, und schließlich beliebig nahe an die eigentliche Lösung der Differentialgleichung kommen. Allerdings gibt es auch Fälle, in denen dieses Verfahren nicht zur korrekten Lösung konvergiert. Dies kann beispielsweise geschehen, wenn $f(x)$ nicht stetig ist.

Bei der numerischen Integration von Differentialgleichungen wird im Prinzip das gleiche Verfahren der Diskretisierung eines kontinuierlichen Prozesses verwendet. Heutige Integrationsroutinen benützen jedoch nicht das Euler-Verfahren, sondern approximieren die Lösungskurve durch Polynome höheren Grades, womit sich die Konvergenzeigenschaften verbessern und der Rechenaufwand deutlich fällt. Auch wird oft nicht mit fester Schrittweite ϵ gearbeitet. Die Schrittweise wird vielmehr adaptiv an die Dynamik angepaßt, um so Bereiche, in denen die Lösung stark variiert, mit höherer Genauigkeit abzutasten und damit die Güte des Verfahrens zu erhöhen ohne in Bereichen, in denen sich die Lösung nur langsam ändert, Rechenzeit zu verschwenden.

Moderne technische und wissenschaftliche Fragestellungen führen oft zu nichtlinearen Systemen mit vielen gekoppelten Differentialgleichungen, die nicht mehr analytisch integriert werden können. Numerische Methoden zur Integration von Differentialgleichungen spielen deshalb in diesen Bereichen eine wichtige Rolle und bilden daher auch einen Schwerpunkt der Numerischen Mathematik.

13.5 Aufgaben

1. (Differentialgleichung) Wir betrachten die Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = -x^3 + 4x$$

(a) Machen Sie sich ein Bild von der Funktion $f(x) = -x^3 + 4x$. Führen Sie dazu eine kurze Kurvendiskussion durch: Verhalten für $x \to \pm\infty$, Symmetrie, Nullstellen, 1. Ableitung und Extremstellen, Skizze.

(b) Wie lauten die stationären Lösungen der Differentialgleichung?

(c) Überlegen Sie sich mit Hilfe der Skizze von $f(x)$, wie die Lösungen $x(t)$ der Differentialgleichung qualitativ aussehen werden. Sind die stationären Lösungen stabil oder instabil? Skizzieren Sie die Lösungen $x(t)$ mit den Anfangswerten $x_0 = -4, -1, 1, 4$.

(d) Wiederholen Sie die Aufgabenteile (a) bis (c) für die Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = x^3 - 4x \quad \text{und} \quad f(x) = x^3 - 4x\ .$$

2. (Differentialgleichungen) Gegeben ist folgende Differentialgleichung:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = -2t \cdot x$$

(a) Wie unterscheidet sie sich prinzipiell von denen aus der vorherigen Aufgabe?

(b) Geben Sie die stationäre Lösung der Differentialgleichung an, falls eine existiert.

(c) Wie heißt das Verfahren um eine solche Differentialgleichung zu lösen?

(d) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung!

(e) Skizzieren Sie die Lösung für $t \geq 0$ und für zwei verschiedene Werte von $x_0 = x(0)$.

3. (Differentialgleichungen) Die **logistische Differentialgleichung**

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = ax - bx^2 \tag{13.33}$$

mit $a, b > 0$ kann als Modell für eine Population mit begrenztem Wachstum dienen. Lösen Sie Gleichung (1.19) für beliebige Anfangspopulationen, d.h. zur Zeit t_0 sei $x(t_0) = x_0$ und $x_0 > 0$. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(a) Formen Sie die Gleichung durch Trennung der Variablen in einen Integralausdruck um.

(b) Berechnen Sie das Integral über x mit Hilfe der Substitution $y = 1/x$. Was erhalten Sie damit letztendlich für $x(t)$?

(c) Diskutieren Sie die Funktion

$$x(t) = \frac{a}{b - \left(b - \frac{a}{x_0}\right)\exp[-a(t - t_0)]} \tag{13.34}$$

für Zeiten $t \geq t_0$. Was ergibt sich im Grenzfall $b = 0$?

Kapitel 14

Lineare Differentialgleichungen

Zwei für die Biologie wichtige Prozesse werden durch die schon mehrfach erwähnte Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = \alpha x(t) \tag{14.1}$$

beschrieben: exponentielles Wachstum (für $\alpha > 0$) und exponentieller Zerfall (für $\alpha < 0$). Diese gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung ist auch das einfachste Beispiel einer **linearen Differentialgleichung**, das heißt einer Differentialgleichung, in der die *abhängige* Variable — hier die Variable x — und ihre Ableitung(en) — hier $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)$ — nur in der ersten Potenz auftritt.

Die einfachste lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung ist die Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}x(t) = -\omega^2 x(t)\ .$$

Die Lösungen dieser Gleichung sind durch $x(t) = A\sin(\omega t + \phi)$ mit $A, \phi \in \mathbf{R}$ gegeben, also Sinus-Schwingungen mit Periode $P = \frac{2\pi}{\omega}$. Siehe auch Kapitel 10.2.6.

Beide Beispiele demonstrieren die große Bedeutung linearer Differentialgleichungen bei der Beschreibung von einfachen Wachstums-, Zerfalls- und Schwingungsvorgängen. Lineare Differentialgleichungen spielen darüber hinaus aus mindestens zwei weiteren Gründen eine entscheidende Rolle in den Natur- und Ingenieurwissenschaften. Betrachtet man nämlich ein dynamisches System in der Nähe eines Gleichgewichtszustandes (stationärer Punkt), so genügt es oft, die auf das System einwirkenden Kräfte in linearer Näherung (erstes Glied der Taylorentwicklung) zu betrachten: Am stationären Punkt selbst heben sich alle auf das System einwirkenden Kräfte gerade gegenseitig auf (sonst wäre es kein stationärer Punkt), in seiner Nähe wächst die Gesamtkraft proportional zur Auslenkung von der Gleichgewichtslage an, ist also eine lineare Funktion. Damit ist jedoch nach Definition auch die resultierende Differentialgleichung eine lineare Differentialgleichung.

Zweitens existiert für lineare Differentialgleichungen eine geschlossene und relativ einfache Lösungstheorie. Um einen ersten Einblick in die Dynamik eines noch unverstandenen Systems zu erhalten, reduziert man deshalb gerne die Bewegungsgleichungen des Systems zu linearen Differentialgleichungen und studiert zuerst diese, bevor man sich im Detail mit dem Ausgangsproblem auseinandersetzt. Dieses Vorgehen ist Ihnen auch aus der Physik bekannt, wo Sie beispielsweise die Bewegung eines Fadenpendels unter der Annahme berechnet haben, dass die Rückstellkraft proportional zur Auslenkung wächst, obwohl offensichtlich ist, dass diese Näherung nur für kleine Winkel korrekt sein kann, und für große Winkel sicher nicht gilt: sonst könnte es keinen Überschlag des Pendels geben. Trotz dieser offensichtlichen Mängel beschreibt die Näherungslösung die physikalische Realität zumindest für kleine Auslenkungen erstaunlich gut, und stellt den Wert dieses pragmatischen Vorgehens unter Beweis.

Aus beiden genannten Gründen wollen wir uns nun im Detail mit linearen Differentialgleichungen auseinandersetzen. Am Beispiel gewöhnlicher Differentialgleichungen, in denen die Zeit t als unabhängige, die Meßgröße x als abhängige Variable erscheint, wollen wir zuerst die allgemeine Form einer linearen Differentialgleichung angeben und anschließend verschiedene Wege zu ihrer Lösung diskutieren.

Zur Vereinfachung werden wir uns vor allem mit Differentialgleichungen erster Ordnung befassen. Sätze und Definitionen, die auch für Differentialgleichungen höherer Ordnung gelten, werden entsprechend kommentiert.

Definition (Lineare Differentialgleichung erster Ordnung):
Eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung mit t als unabhängiger und x als abhängiger Variable heißt linear, wenn sie auf die Form

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = g(t)x(t) + h(t) \tag{14.2}$$

gebracht werden kann.

BEMERKUNG: Die Funktionen $g(t)$ und $h(t)$ hängen in (14.2) von der Zeit t ab, jedoch *nicht* von x. Diese Situation ist konzeptionell deutlich von einer Situation zu unterscheiden, in der eine Abhängigkeit der rechten Seite von (14.2) vom Zustand $x(t)$ des Systems zur Zeit t vorliegt, die *nicht* als $g(t)x(t) + h(t)$ geschrieben werden kann, wenn also beispielweise statt $h(t)$ ein Ausdruck der Gestalt $h(x(t))$ auftaucht. Ein Beispiel zur Illustration: Die Differentialgleichung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = [x(t)]^2$ ist *nicht* linear, da die abhängige Variable x quadratisch eingeht. Dagegen ist die Differentialgleichung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = t^2x(t)$ linear, da zwar die unabhängige Variable t quadratisch eingeht, nicht aber die abhängige Variable x.

BEMERKUNG: Ist die Funktion g identisch Null, hat also Gleichung (14.2) die Form $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = h(t)$, ist die Lösung besonders einfach. Bezeichnet nämlich H eine Stammfunktion von h und x_0 den Wert von x zur Zeit $t = 0$, so gilt $x(t) = H(t) + x_0 - H(0)$, wie sich durch Einsetzen beziehungsweise Differenzieren rasch bestätigt.

BEMERKUNG: Auch Differentialgleichungen höherer Ordnung oder gekoppelte Differentialgleichungen werden genau dann lineare Differentialgleichungen genannt, wenn sie in den abhängigen Variablen und deren Ableitungen linear sind.

Definition (Homogene und inhomogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung):
Tritt der Term $h(t)$ in (14.2) nicht auf, hat die Differentialgleichung also die Form

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = g(t)x(t), \tag{14.3}$$

so wird sie als **homogene** Differentialgleichung bezeichnet.
Tritt der Term $h(t)$ jedoch auf, so heißt die Differentialgleichung **inhomogen**.

BEMERKUNG: Auch bei linearen Differentialgleichungen höherer Ordnung kann man nach analogen Kriterien zwischen homogenen und inhomogenen Gleichungen unterscheiden.

Satz und Definition (Zusammenhang zwischen homogenen und inhomogenen linearen Differentialgleichungen):
Zu jeder inhomogenen Differentialgleichung (14.2) kann man eine homogene Differentialgleichung (14.3) erzeugen, indem man die Funktion $h(t)$ weglässt (Null setzt). Diese Differentialgleichung heißt auch die **der Gleichung (14.2) zugeordnete homogene Differentialgleichung**.
Falls $g(t)$ und $h(t)$ konstante Funktionen sind so nennt man (14.2) auch eine **lineare Differentialgleichung erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten**.

Für homogene lineare Differentialgleichungen gilt wie für homogene lineare Iterierte Abbildungen (siehe Kapitel 6.1.1) das Superpositionsprinzip:

Satz (Superpositionsprinzip):
Seien $x_1(t)$ und $x_2(t)$ zwei Lösungen der homogenen linearen Differentialgleichung (14.3),

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = g(t)x(t) \ .$$

Dann ist auch jede Linearkombination $y(t)$ von $x_1(t)$ und $x_2(t)$,

$$y(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \quad \text{mit } \alpha, \beta \in \mathbf{C}$$

eine Lösung von (14.3).

Beweis:
Nach der Voraussetzung des Satzes wird (14.3) von $x_1(t)$ und $x_2(t)$ erfüllt. Will man also überprüfen, ob dies auch für $y(t)$ zutrifft, so berechne man $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t) &= \alpha\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_1(t) + \beta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_2(t) \\ &= \alpha g(t)x_1(t) + \beta g(t)x_2(t) \\ &= g(t)[\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)] = g(t)y(t) \ . \end{aligned} \tag{14.4}$$

Die Linearkombination $y(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$ erfüllt also in der Tat (14.3). □

BEMERKUNG: Das Superpositionsprinzip gilt in gleicher Weise auch bei linearen Differentialgleichungen höherer Ordnung und ist deshalb auch von fundamentaler Bedeutung in der Physik — viele Bewegungsgleichungen sind ja (zumindest näherungsweise) linear, siehe auch die Einleitung zu diesem Kapitel. Studiert man beispielsweise die Bewegung eines schräg abgeworfenen Balles, so kann man seine horizontale und vertikale Bewegung getrennt untersuchen. Unter der Annahme verschwindender Reibung wird die Geschwindigkeit in horizontaler Richtung konstant sein, die in vertikaler Richtung ist in jedem Moment identisch mit der Geschwindigkeit eines senkrecht mit gleicher vertikaler Ausgangsgeschwindigkeit hochgeworfenen Balles und wurde in Kapitel 13 schon berechnet. Die vektorielle Superposition beider Bewegungen ergibt dann die wahre Bewegung.

14.1 Homogene Differentialgleichungen: Lösung durch Separation der Variablen

Zur Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung erster Ordnung (14.3) kann man die aus Kapitel 13.2 bekannte Methode der "Separation der Variablen" verwenden. Diese hat nun eine besonders elegante Form, da nach (14.3) für die Funktion $f(x)$ in Gleichung (13.19) gilt: $f(x) = x$. Damit vereinfacht sich Gleichung (13.22) zu

$$\int_{x(t_0)}^{x(t_1)} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{t_0}^{t_1} g(t)\mathrm{d}t \ . \tag{14.5}$$

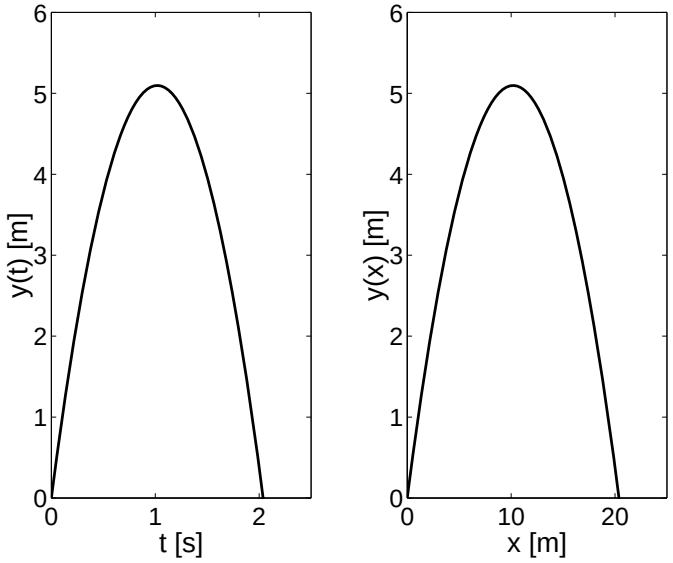


Abbildung 14.1: Eine Illustration zum Superpositionsprinzip. Links ist die Höhe y eines mit einer Ausgangsgeschwindigkeit von 10 Metern pro Sekunde senkrecht nach oben geworfenen Balls als Funktion der Zeit t aufgetragen. Rechts ist die Höhe y eines mit einer Ausgangsgeschwindigkeit von $\sqrt{2} \cdot 10$ Meter pro Sekunde und einem Winkel von $\pi/4$ (45^0) nach oben geworfenen Balls als Funktion des Ortes x aufgetragen. Im zweiten Fall betragen also zum Zeitpunkt des Abwurfs Horizontal- und Vertikalgeschwindigkeit jeweils gerade 10 Metern pro Sekunde. Nach dem Superpositionsprinzip ist die Bewegung in vertikaler Richtung identisch mit der des senkrecht nach oben geworfenen Balls. Da wir die Luftreibung vernachlässigen wollen, ist die Geschwindigkeit in horizontaler Richtung konstant. Daher ist der in horizontaler Richtung zurückgelegte Weg proportional zur Zeit, so dass man auf der Abszisse statt x auch t (mit der richtigen Skalierung) hätte auftragen können, 10 Meter hätten dabei genau einer Sekunde entsprochen. Da die Bewegung in vertikaler Richtung in beiden dargestellten Fällen gleich groß ist, ergeben sich zwei in ihrer Form identische Kurven. Konzeptionell sind diese jedoch klar zu unterscheiden: links ist eine *Trajektorie* dargestellt, also "Ort als Funktion der Zeit", rechts ein *Orbit* (oder auch: *Bahnkurve*), also die Menge aller während der Bewegung eingenommenen Punkte im Raum.

Die linke Seite kann direkt integriert werden und wir erhalten

$$\ln \frac{x(t_1)}{x(t_0)} = \int_{t_0}^{t_1} g(t)\mathrm{d}t \ , \tag{14.6}$$

was nach Exponentieren beider Seiten auf

$$x(t_1) = x(t_0) \exp\left[\int_{t_0}^{t_1} g(t)\mathrm{d}t\right] \tag{14.7}$$

führt.

Ist also eine Stammfunktion von g bekannt, so kann die homogene Differentialgleichung explizit gelöst werden.

14.2 Inhomogene Differentialgleichungen: Lösung durch Variation der Konstanten

Bei inhomogenen linearen Differentialgleichungen erster Ordnung kann dieser Zugang jedoch nicht mehr angewendet werden, da bei der Division von (14.2) durch x der Term $h(t)/x$ entsteht – die zwei Variablen t und x können also nicht erfolgreich separiert

werden. Falls wir jedoch die Lösung der homogenen Differentialgleichung (14.3) kennen, die wir mit $x_h(t)$ bezeichnen wollen, hilft folgender Gedanke weiter:

Wir setzen die Lösung $x(t)$ der inhomogenen Gleichung (14.3) als das Produkt von $x_h(t)$ mit einer noch unbestimmten Funktion $z(t)$ an,

$$x(t) = z(t)x_h(t) \ . \tag{14.8}$$

Dann gilt nach der Produktregel (9.7)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = \frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} \cdot x_h(t) + z(t) \cdot \frac{\mathrm{d}x_h(t)}{\mathrm{d}t} \ . \tag{14.9}$$

Fordern wir nun, dass $x(t)$ die inhomogene Gleichung (14.2) erfüllt, so erhalten wir

$$\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t}x_h(t) + z(t)\frac{\mathrm{d}x_h(t)}{\mathrm{d}t} = g(t)x(t) + h(t) \ . \tag{14.10}$$

Da nach Voraussetzung $x(t) = z(t)x_h(t)$ und $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_h(t) = g(t)x_h(t)$ folgt aus der letzten Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t}x_h(t) + z(t)g(t)x_h(t) = g(t)z(t)x_h(t) + h(t) \tag{14.11}$$

oder

$$\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t}x_h(t) = h(t) \ . \tag{14.12}$$

Für alle Zeiten t, für die die Lösung der homogenen Gleichung nicht verschwindet, $x_h(t) \neq 0$, kann (14.12) nach $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}z(t)$ aufgelöst werden,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}z(t) = \frac{h(t)}{x_h(t)} \ . \tag{14.13}$$

Da nach Voraussetzung die homogene Lösung $x_h(t)$ bekannt ist, und die Funktion $h(t)$ vorgegeben war, haben wir somit eine Differentialgleichung für $z(t)$ erhalten.

Existiert eine Stammfunktion zu $h(t)/x_h(t)$, so können wir $z(t)$ bestimmen, und haben damit nach Gleichung (14.8) die gesuchte Lösung $x(t)$ der inhomogenen Differentialgleichung (14.2) gefunden!

Wegen des Superpositionsprinzips kann jede spezielle Lösung einer *homogenen* linearen Differentialgleichung mit einer Konstanten multipliziert werden und ist dann immer noch eine Lösung dieser Differentialgleichung. Der Ansatz (14.8) beruht nun gerade darauf, diese Konstante zu variieren, was zur Bezeichnung "Variation der Konstanten" geführt hat.

SELBSTTEST: Versuchen Sie, diesen Ansatz auch auf *nichtlineare* Differentialgleichungen der Form $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = g(t)f(x(t)) + h(t)$ zu übertragen. Warum gelingt dies nicht?

BEISPIEL : **Aufnahme und Abbau eines Medikaments**

Ein Medikament werde in Tablettenform verabreicht. Es gelangt dann über den Magen in den Blutkreislauf des Patienten. Dort wird es langsam abgebaut und verliert mit der Zeit seine Wirkung. Wie entwickelt sich die im Blut gemessene Medikamentenkonzentration $x(t)$ im Verlauf der Zeit?

Um diese Frage zu beantworten, wollen wir ein möglichst einfaches Modell aufstellen. Dazu nehmen wir an, dass die Konzentration des Medikamentes im Magen $y(t)$ sofort nach der Medikamentengabe auf einen Wert A ansteigt, und anschließend mit einer Zeitkonstanten α exponentiell abfällt. Setzen wir den Zeitpunkt der Medikamentengabe als $t = 0$, so gilt also

$$y(t) = A\mathrm{e}^{-\alpha t} \qquad \text{für} \qquad t > 0 \ . \tag{14.14}$$

Man könnte hier auch kompliziertere Modelle ansetzen, wir wollen uns jedoch auf einen einfachen Fall beschränken, der relativ leicht behandelt werden kann.

Die Konzentration $x(t)$ des Medikamentes zur Zeit t im Blut wird durch zwei Faktoren bestimmt. Einerseits verringert sie sich durch Abbauprozesse, andererseits steigt sie aufgrund des aus dem Magen aufgenommenen Nachschubs. Nehmen wir hier vereinfachend an, dass die Medikamentenkonzentration im Blut in jedem Moment proportional zur Höhe sinkt und proportional zur im Magen vorhandenen Medikamentenmenge steigt, so erhalten wir

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = -\beta x(t) + \delta y(t) \ . \tag{14.15}$$

Setzen wir (14.14) in (14.15) ein, so ergibt sich die Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = -\beta x(t) + \gamma\,\mathrm{e}^{-\alpha t} \tag{14.16}$$

wobei wir $\gamma = A \cdot \delta$ gesetzt haben.

Die Gleichung (14.16) ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung und kann mit den gerade diskutierten Methoden behandelt werden. Dazu betrachten wir zuerst die der inhomogenen Differentialgleichung (14.16) zugeordnete homogene Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_h(t) = -\beta x_h(t) \ , \tag{14.17}$$

deren allgemeine Lösung wir schon kennen,

$$x_h(t) = c\,\mathrm{e}^{-\beta t} \qquad \text{mit} \qquad c \in \mathbf{R} \ . \tag{14.18}$$

Um die inhomogene Gleichung (14.16) zu lösen, verwenden wir die Methode der "Variation der Konstanten." Wir machen also den Ansatz

$$x(t) = z(t)x_h(t) = z(t)c\,\mathrm{e}^{-\beta t} \ . \tag{14.19}$$

Setzen wir diesen Ansatz in (14.16) ein, so erhalten wir wie in der Herleitung (14.10) bis (14.13) die Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}z(t) = \frac{y(t)}{x_h(t)} = \frac{\gamma\mathrm{e}^{-\alpha t}}{c\ \mathrm{e}^{-\beta t}} = \frac{\gamma}{c}\mathrm{e}^{(\beta-\alpha)t} \ . \tag{14.20}$$

Diese Differentialgleichung kann exakt integriert werden, wobei allerdings zwei unterschiedliche Fälle getrennt zu betrachten sind.

(A) Falls $\alpha = \beta$, gilt nach (14.20): $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}z(t) = \frac{\gamma}{c}$. Die Funktion $z(t)$ wächst also linear an, $z(t) = z_0 + \frac{\gamma}{c}t$. In dieser Lösung der Differentialgleichung für $z(t)$ ist der Parameter $z_0 \in \mathbf{R}$ im Moment noch unbestimmt, wird aber im nächsten Schritt festgelegt werden können. Aus (14.19) folgt nämlich für $x(t)$:

$$x(t) = [z_0 + \frac{\gamma}{c}t] \cdot c\,\mathrm{e}^{-\beta t} \ . \tag{14.21}$$

Zur Zeit $t = 0$ ist im Blut noch kein Medikament vorhanden, das heißt $x(0) = 0$. Diese Anfangsbedingung erfordert $z_0 = 0$, so dass insgesamt gilt:

$$x(t) = \gamma t\,\mathrm{e}^{-\beta t} \tag{14.22}$$

Damit haben wir eine explizite Lösung der Differentialgleichung (14.16) für den Fall $\alpha = \beta$ gefunden, deren Eigenschaften wir nun noch kurz untersuchen wollen

(Kurvendiskussion): Für Zeiten t, die klein gegenüber dem Inversen der Zerfallskonstanten β sind, i.e. $|t| \ll \beta^{-1}$, ist das Argument der Exponentialfunktion nur unwesentlich von Null verschieden, der Wert der Funktion also nahe eins. Damit wird für diese Zeiten der Medikamentenspiegel im Blut nahezu linear ansteigen, wobei die Steigung gerade durch γ gegeben ist: $x(t) \approx \gamma t$ für $|t| \ll \beta^{-1}$.

Für große Zeiten, $|t| \gg \beta^{-1}$, nähert sich die Exponentialfunktion rasch dem Wert Null und dominiert den nur linear anwachsenden Term t. Für große Zeiten wird der Medikamentenspiegel also ebenfalls gegen Null abfallen. Dazwischen hat die Funktion ein Maximum, dessen Lage durch die Bedingung $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0$ bestimmt ist. Aus (14.22) folgt dafür $0 = [1 - \beta t]\mathrm{e}^{-\beta t}$ oder $t = \beta^{-1}$. Je schneller das Medikament also abgebaut wird (je größer Wert von β ist), umso schneller wird auch der maximale Blutspiegelwert erreicht, was auch intuitiv einsichtig ist.

(B) Falls $\alpha \neq \beta$, so kann (14.20) ebenfalls elementar integriert werden,

$$\int_{z(t_0)}^{z(t_1)} \mathrm{d}z = \frac{\gamma}{c} \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{e}^{(\beta-\alpha)t} \mathrm{d}t, \tag{14.23}$$

oder

$$z(t_1) - z(t_0) = \frac{\gamma}{c} \frac{1}{\beta - \alpha} [\mathrm{e}^{(\beta-\alpha)t_1} - \mathrm{e}^{(\beta-\alpha)t_0}] \ . \tag{14.24}$$

Mit den Werten von Start- und Endpunkt, $t_0 = 0$ und $t_1 = t$, erhalten wir also

$$z(t) = \frac{\gamma}{c} \frac{1}{\beta - \alpha} [\mathrm{e}^{(\beta-\alpha)t} - 1] + z(0) \ . \tag{14.25}$$

Nach Einsetzen in (14.19),

$$x(t) = \left\{ \frac{\gamma}{c} \frac{1}{\beta - \alpha} [\mathrm{e}^{(\beta-\alpha)t} - 1] + z(0) \right\} \cdot c\mathrm{e}^{-\beta t}, \tag{14.26}$$

kann der Wert von $z(0)$ wieder aus der Anfangsbedingung $x(0) = 0$ bestimmt werden, und es folgt daraus auch im nun betrachteten Fall: $z(0) = 0$. Damit erhalten wir insgesamt:

$$x(t) = \frac{\gamma}{\beta - \alpha} \left[\mathrm{e}^{-\alpha t} - \mathrm{e}^{-\beta t} \right] \ . \tag{14.27}$$

Diskutieren Sie auch diese Funktion! Wie verhält sich nun der Medikamentenspiegel für kurze und lange Zeiten? Wann wird das Maximum erreicht? Ergibt sich eine qualitative Änderung gegenüber Fall (A)? Wenn ja: welche? wenn nein: warum nicht? ...

SELBSTTEST: An dieses Beispiel schließt sich eine Reihe interessanter Fragen an: Wie hoch ist beispielsweise der über die gesamte Zeit integrierte Medikamentenspiegel, der eventuell von direkter Bedeutung für die Wirksamkeit des Medikamentes ist? Wie kann diese Größe bei fester Gesamtdosis A durch Veränderung von β und δ optimiert werden? Oder sollte man eventuell besser eine Dosierungsstrategie wählen, bei der das Medikament über einen längeren Zeitraum verteilt mehrfach eingenommen wird? Wie ist dieser Fall mathematisch zu behandeln? ... All diese auch medizinisch wichtigen Fragen können Sie mit den Ihnen nun zur Verfügung stehenden Methoden lösen!

BEMERKUNG: Gleichung (14.15) tritt auch bei einer Reihe anderer biologischer und medizinischer Fragen auf — "Wie ändert sich das postsynaptische Potential eines Neurons nach dem Eintreffen eines präsynaptischen Nervenimpulses?" oder auch: "Wie verändert sich die Konzentration von im Blut zirkulierenden Viren unter der Wirkung der Immunreaktion?" — und hat daher eine hohe Relevanz für experimentelle und klinische Fragestellungen.

14.3 Inhomogene Differentialgleichungen: Lösung durch Bezug zur homogenen Gleichung

Für inhomogene lineare Differentialgleichungen gilt:

Satz:
Die Differenz zweier *beliebiger* Lösungen $x_a(t)$ und $x_b(t)$ der inhomogenen Differentialgleichung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = g(t)x(t)+h(t)$ erfüllt genau die zugeordnete homogene Gleichung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = g(t)x(t)$.

Beweis:
Nach Definition gilt

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_a(t) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_b(t) &= [g(t)x_a(t) + h(t)] - [g(t)x_b(t) + h(t)] \\ &= g(t)[x_a(t) - x_b(t)] \ . \end{aligned} \tag{14.28}$$

Also löst $z(t) = x_a(t) - x_b(t)$ gerade (14.3). □

Aus der letzten Aussage folgt direkt der wichtige Satz:

Satz:
Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = g(t)x(t)+h(t)$ kann immer als Summe einer speziellen Lösung der inhomogenen Differentialgleichung und der allgemeinen Lösung der zugeordneten homogenen Differentialgleichung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = g(t)x(t)$ geschrieben werden.

Sucht man daher die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (14.2), so genügt es, *eine* spezielle Lösung dieser Gleichung zu finden und dazu die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung (14.3) zu addieren. Die allgemeine Lösung einer homogenen Differentialgleichung läßt sich in vielen Fällen mit Hilfe der Separation der Variablen (Kapitel 13.2) finden — und eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung erhält man gewöhnlich durch Tricks oder kann sie sogar erraten. Für Gleichungen mit konstanten Koeffizienten, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = gx + h$, existiert für $g \neq 0$ beispielsweise immer eine stationäre Lösung, $x(t) = -h/g$, wie sich durch Einsetzen sofort bestätigt. Zusammengenommen kann man damit oft auch kompliziertere inhomogene Differentialgleichungen erfolgreich lösen. Wegen des Superpositionsprinzips ist mit der Lösung einer homogenen Differentialgleichung $x_h(t)$ auch $c \cdot x_h(t)$ eine Lösung der homogenen Differentialgleichung. Der zuerst freie Parameter c wird so gewählt, dass die Lösung $x(t)$ der inhomogenen Differentialgleichung die vorgegebene Anfangsbedingung erfüllt.

BEMERKUNG: Das Superpositionsprinzip und die daraus abgeleiteten Sätze begründen die besondere Bedeutung linearer Differentialgleichungen. Das Studium *nichtlinearer* Differentialgleichungen ist dagegen gewöhnlich um einiges komplizierter – dafür sind die in diesen Systemen möglichen Phänomene, wie beispielswiese Musterbildung, auch um einiges reichhaltiger.

14.4 Differentialgleichungen höherer Ordnung: Exponentialansatz

Homogene lineare Differentialgleichungen *mit konstanten Koeffizienten* wie Gleichung (14.1),

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = \alpha x(t) \ .$$

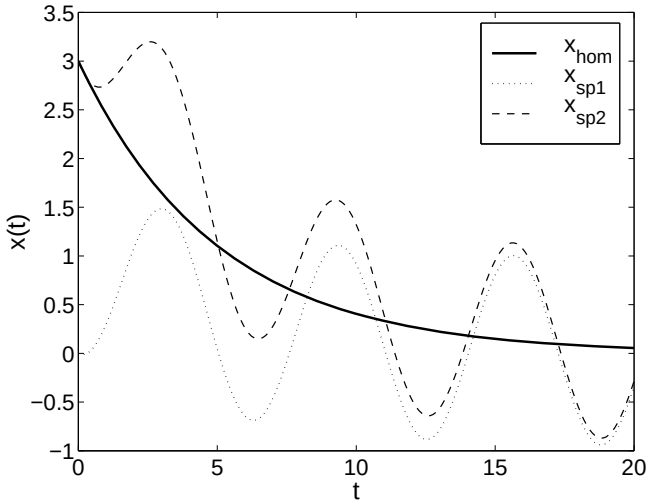


Abbildung 14.2: Lösungen einer inhomogenen Differentialgleichung und der zugeordneten homogenen Differentialgleichung. Dargestellt sind zwei spezielle Lösungen, $x_{\mathrm{sp1}}(t)$ und $x_{\mathrm{sp2}}(t)$, der linearen Differentialgleichung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = -0.2x(t) + \sin(t)$ zu den Anfangswerten $x(0) = 0$ und $x(0) = 3$, sowie die Differenz $x_{\mathrm{hom}}(t)$ dieser beiden Lösungen. Nach der Theorie linearer Differentialgleichungen erfüllt diese Lösung die zugeordnete homogene Differentialgleichung, die im dargestellten Fall $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = -0.2x(t)$ lautet. Die Lösung $x_{\mathrm{hom}}(t)$ beschreibt also einen exponentiellen Zerfall, $x_{\mathrm{hom}}(t) = 3\,\mathrm{e}^{-0.2t}$. Dieses Beispiel zeigt deutlich, dass selbst bei komplizierten inhomogenen linearen Differentialgleichungen die Differenz zweier Lösungen immer noch eine sehr einfache Gestalt hat.
Zur Motivation der Differentialgleichung: In vielen biologischen Situationen unterliegt eine Stoffmenge (Hormonspiegel, Größe einer Population, etc.) zwei unterschiedlichen Einflüssen: Sie verringert sich einerseits proportional zur momentan vorhandenen Menge (Abbau des Hormons, Alterungsprozesse, etc.) und ist andererseits einem periodischen äußeren Einfluss ausgesetzt (tageszeitlich veränderliche Hormonproduktion, jahreszeitliche Schwankungen im Futterangebot, etc.). Bezeichnet man mit $x(t)$ die Größe der Schwankungen um den ohne die äußeren Einflüsse angenommenen Gleichgewichtswert, so erfüllt $x(t)$ eine Differentialgleichung der hier gezeigten Form. Paßt man die Zerfallskonstante (hier 0.2) und die Amplitude der Sinusschwingung (hier 1.0) an das jeweilige biologische Problem an, so können die theoretischen Vorhersagen nicht nur qualitativ sondern auch quantitativ mit Experimenten beziehungsweise Freilanduntersuchungen verglichen werden.

oder die schon in Gleichung (13.27) vorgestellte Differentialgleichung

$$m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}x(t) + \gamma\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = -kx(t)\ , \tag{14.29}$$

können mit dem **Exponentialansatz**

$$x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t} \tag{14.30}$$

gelöst werden. Als Beispiel wollen wir dazu die Lösungen der physikalisch wie biologisch bedeutsamen Differentialgleichung (14.29) diskutieren.

BEMERKUNG: Lösungsansätze wie (14.30) bedeuten nichts anderes, als dass man die Form der Lösung einer Differentialgleichung erraten möchte und dazu geeignete "Versuchsballons" startet. Mit etwas Glück und Intuition erfüllt einer der Ansätze die Differentialgleichung und man wird zusätzlich auch noch Information über die Parameter des Ansatzes (hier: λ) erhalten. Bei linearen homogenen Differentialgleichungen wie (14.29) führt dieser Zugang sogar mit Sicherheit zum Ziel — ein weiterer Grund, warum sich

dieser Differentialgleichungstypus großer Beliebtheit erfreut und wir uns intensiv mit der Exponentialfunktion beschäftigt haben.

Die Differentialgleichung (14.29) ist eine Differentialgleichung zweiter Ordnung. Die allgemeine Lösung enthält also zwei freie Parameter, die durch die Vorgabe von zwei Anfangsbedingungen bestimmt werden, beispielsweise dadurch, dass $x(0)$ und $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\big|_{t=0}$ festgelegt werden.

Wie aber erhalten wir die allgemeine Lösung?

Gemäß des Exponentialansatzes und der letzten Bemerkung nehmen wir im Folgenden versuchsweise an, dass Lösungen der Form (14.30) die Differentialgleichung erfüllen. Wenn dies stimmt, dann ist $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = \lambda \mathrm{e}^{\lambda t} = \lambda x(t)$ und $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}x(t) = \lambda^2 \mathrm{e}^{\lambda t} = \lambda^2 x(t)$. Setzen wir diese Ausdrücke in (14.29) ein, erhalten wir

$$m\lambda^2 x(t) + \gamma\lambda x(t) + kx(t) = 0 \ . \tag{14.31}$$

Jeder Term in (14.31) enthält einen Faktor $x(t)$. Da $x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t} \neq 0$ für alle $t \in \mathbf{R}$ können wir diesen Faktor ausklammern und erhalten

$$m\lambda^2 + \gamma\lambda + k = 0 \ . \tag{14.32}$$

Beachten Sie, dass Gleichung (14.32) *keine Zeitabhängigkeit* mehr aufweist — dies ist genau der "Trick" des Exponentialansatzes! Wir haben also (mit Glück beziehungsweise Einsicht) durch die Wahl $x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ aus einer *Differentialgleichung für* $x(t)$ eine *algebraische Gleichung für* λ erzeugen können.

SELBSTTEST: Untersuchen Sie, welche Eigenschaft der Differentialgleichung (14.29) diesen Schritt ermöglichte! Ein Hinweis: Warum kann der Trick *nicht* auf eine nichtlineare Differentialgleichung wie $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = [x(t)]^2$ angewendet werden?

Gleichung (14.32) ist eine quadratische Gleichung in λ (siehe auch Kapitel 2.4). Falls die Diskriminante

$$D = \gamma^2 - 4mk \tag{14.33}$$

größer als Null ist, besitzt (14.32) somit die beiden reellwertigen Lösungen

$$\lambda_{1/2} = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4mk}}{2m} \ . \tag{14.34}$$

Damit erfüllen die *zwei* Lösungen

$$x_1(t) = \mathrm{e}^{\lambda_1 t} \quad \textit{und} \quad x_2(t) = \mathrm{e}^{\lambda_2 t} \tag{14.35}$$

die Differentialgleichung (14.29). Da (14.29) homogen und linear ist, gilt dies nach dem Superpositionsprinzip auch für

$$x(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) \tag{14.36}$$

wie man auch durch Einsetzen sofort bestätigen kann. Damit ist nun die allgemeine Lösung für $D > 0$ gefunden — eine lineare Kombination zweier exponentieller Lösungen, wobei wegen $\sqrt{\gamma^2 - 4mk} < \gamma$ gilt: $\lambda_1, \lambda_2 < 0$.[1] Je nach Anfangsbedingung ergibt sich aus (14.36) der Wert von C_1 und C_2 und damit die spezielle Lösung. Physikalisch gesehen bedeuten (14.34) bis (14.36), dass bei genügend großer Dämpfung des Systems ($\gamma^2 > 4mk$) keine Schwingungen auftreten, sondern exponentiell abklingende Lösungen.

[1] Wir haben stillschweigend $mk > 0$ angenommen, doch zumindest für das Pendelproblem ist dies aus physikalischen Gründen auch richtig — Massen wie Federkonstanten sind positive Größen.

Was aber geschieht falls $D < 0$? In diesem Fall besitzt (14.32) zwei *komplexwertige* Lösungen

$$\lambda_{1/2} = \frac{-\gamma \pm \mathrm{i}\sqrt{4mk - \gamma^2}}{2m} \ . \tag{14.37}$$

Auf den ersten Blick mag das Auftreten komplexer Zahlen verwundern, da $x(t)$ beispielsweise die Auslenkung eines Federpendels beschreibt, und damit eine *reellwertige* Größe ist. Da jedoch die beiden komplexen Zahlen λ_1 und λ_2 zueinander konjugiert-komplexe Zahlen sind, kann man sie auch als

$$\lambda_{1/2} = \kappa \pm \mathrm{i}\omega \quad \text{mit} \quad \kappa = \frac{-\gamma}{2m} \quad \text{und} \quad \omega = \frac{\sqrt{4mk - \gamma^2}}{2m} \tag{14.38}$$

schreiben. Greift man auf das Superpositionsprinzip zurück und addiert beziehungsweise subtrahiert die beiden entsprechenden Lösungen x_1 und x_2,

$$x_1(t) = \mathrm{e}^{\kappa t + \mathrm{i}\omega t} \quad \text{und} \quad x_2(t) = \mathrm{e}^{\kappa t - \mathrm{i}\omega t} \ , \tag{14.39}$$

so kann man die Beziehungen zwischen Sinus, Cosinus und komplexer Exponentialfunktion ausnützen. Nach (11.25) und 11.26) gilt nämlich

$$\cos(y) = \frac{\exp(\mathrm{i}y) + \exp(-\mathrm{i}y)}{2}$$

und

$$\sin(y) = \frac{\exp(\mathrm{i}y) - \exp(-\mathrm{i}y)}{2\mathrm{i}} \ .$$

Damit lassen sich zwei *reellwertige* Lösungen formulieren,

$$\tilde{x}_1(t) = \frac{1}{2}[x_1(t) + x_2(t)] = \cos(\omega t)\mathrm{e}^{\kappa t} \tag{14.40}$$

und

$$\tilde{x}_2(t) = \frac{1}{2\mathrm{i}}[x_1(t) - x_2(t)] = \sin(\omega t)\mathrm{e}^{\kappa t} \ . \tag{14.41}$$

Damit sind zwei spezielle reellwertige Lösungen gefunden. Die allgemeine Lösung wird dann wieder als $x(t) = C_1\tilde{x}_1(t) + C_2\tilde{x}_2(t)$ geschrieben, die reellen Konstanten C_1 und C_2 aus den jeweiligen Anfangsbedingungen bestimmt.

Physikalisch gesehen treten also bei kleiner Dämpfung des Systems ($\gamma^2 < 4mk$) exponentiell gedämpfte Sinus- bzw. Cosinus-Schwingungen auf. Dabei wird eine Schwingung umso langsamer abklingen, je kleiner die Dämpfungskonstante γ ist. Für den idealisierten Fall $\gamma = 0$ bleibt die Schwingung für alle Zeiten erhalten und die Schwingungsfrequenz ω ist nach (14.38) durch $\sqrt{k/m}$ gegeben. Mit zunehmender Dämpfung γ verringert sich schließlich die Schwingungsfrequenz ω.

Die Lösungen $\tilde{x}_1(t)$ und $\tilde{x}_2(t)$ hätte man auch direkt als Ansatz mit anfangs unbestimmten Parametern ω und λ formulieren und dann die Werte dieser Parameter aus der Differentialgleichung (14.29) gewinnen können. Wenn Sie diesen Lösungsweg zur Probe durchführen, werden Sie erkennen, dass er um einiges aufwendiger ist, als der hier skizzierte "Weg durchs Komplexe" — vor allem, da er die geschickte Anwendung der Additionstheoreme von Sinus und Cosinus erfordert. Falls Ihnen jedoch die Verwendung von komplexwertigen und damit unphysikalischen Lösungen nicht geheuer ist: denken Sie daran, dass Ihnen auch die als Kind unbegreiflichen negativen Zahlen keine größeren Probleme mehr bereiten ...

BEMERKUNG: Verschwindet im obigen Beispiel die Diskriminante, so liefert der Ansatz $x(t) = C_1\mathrm{e}^{\lambda t}$ nur *eine* Lösung wobei λ wiederum durch (14.38) gegeben ist. Die Differentialgleichung ist aber weiterhin von zweiter Ordnung, so dass nach Kapitel 13.3.2

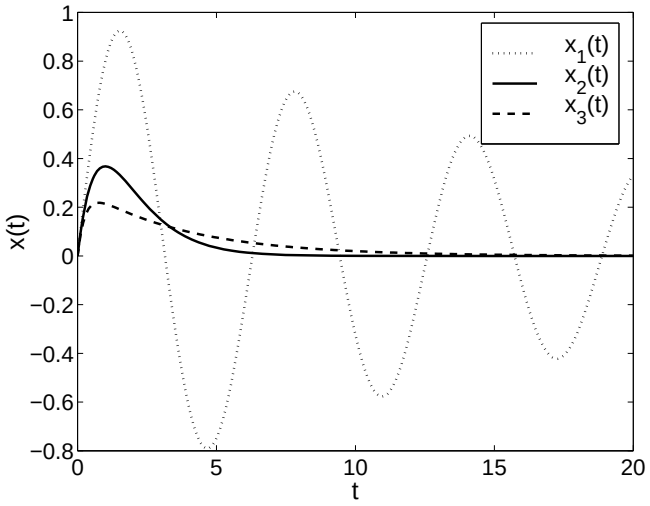


Abbildung 14.3: Illustration der verschiedenen Lösungstypen eines gedämpften harmonischen Oszillators. Drei Lösungen der Differentialgleichung $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}x(t) + \gamma\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = -x(t)$ zum Anfangswert $x(0) = 0$ und $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\big|_{t=0} = 1$ sind dargestellt. Diese Differentialgleichung ist ein Spezialfall der Differentialgleichung (14.29) mit $m = k = 1$. Nach der in diesem Kapitel entwickelten Theorie hängt der Lösungstyp vom Wert der Diskrimante D ab, für die nach (14.33) im gewählten Beispiel gilt: $D = \gamma^2 - 4$. Für $\gamma^2 < 4$ ist die Diskrimante negativ und man erhält eine gedämpfte harmonische Schwingung wie $x_1(t)$ (mit $\gamma = 0.1$). Für $\gamma^2 = 4$ verschwindet die Diskriminante. Die entsprechende Lösung $x_2(t)$ wird auch als aperiodischer Grenzfall bezeichnet. Ist schließlich $\gamma^2 > 4$, so ist die Diskrimante positiv. Das Beispiel $\gamma = 4$ führt zur stark überdämpften Lösung $x_3(t)$. Der qualitative Unterschied zwischen den beiden letzten Lösungen — $x_2(t)$ ist eine Lösung der Form $te^{\lambda t}$, $x_3(t)$ ist die Differenz zweier Exponentialfunktionen — ist nicht sichtbar, aus dem Vergleich aller drei Lösungen wird jedoch deutlich, dass die maximal erreichte Schwingungsamplitude stark von der Dämpfung γ abhängt.

zwei Anfangsbedingungen frei gewählt werden können, beispielsweise $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\big|_{t=0}$ und $x(0)$. Die Lösung $x(t) = C_1\mathrm{e}^{\lambda t}$ enthält jedoch mit C_1 nur einen freien Parameter. Was ist zu tun?

Offensichtlich müssen wir noch einen zweiten Versuch starten und explizit nach einer weiteren Lösung suchen. Nachdem sich der Exponentialansatz bei linearen Differentialgleichungen bisher so gut bewährt hat, könnte man versucht sein, einen Ansatz der Form $x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t} + y(t)$ zu wählen, in der Hoffnung, dann eine einfache Differentialgleichung für $y(t)$ zu finden, diese zu lösen, und so die ersehnte zweite Lösung zu erhalten. Wegen der Linearität von (14.29) führt dieser Versuch jedoch ins Leere, da die resultierende Differentialgleichung für $y(t)$ wieder die Form von (14.29) hat, also nichts gewonnen ist. Wählt man jedoch einen Ansatz der Form $x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}\cdot y(t)$, erhält man die Differentialgleichung $\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}t^2 = 0$ für $y(t)$, deren Lösung $y(t) = C_1 + C_2t$ lautet. Für $C_2 = 0$ entspricht dies genau der schon bekannten Lösung, für $C_2 \neq 0$ hat man die gesuchte zweite Lösung gefunden.

Physikalisch nennt man diese spezielle Situation auch "aperiodischen Grenzfall", da hier im Vergleich zu (14.40) und (14.41) gerade keine Oszillationen mehr auftreten.

SELBSTTEST: Führen Sie die obigen Schritte explizit durch und untersuchen Sie die Form der allgemeinen Lösung (Kurvendiskussion). Nun kommt eine höchst interessante Frage: Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit der Ableitung von Gleichung (14.21) aus (14.15). Was fällt Ihnen auf? Diskutieren Sie die Ursache dieses Phänomens anhand der zugrunde liegenden Differentialgleichungen!

BEMERKUNG: Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung kann man nach dem gleichen Verfahren behandeln. Der Ansatz führt dabei auf ein Polynom n-ten Grades in λ, das allerdings von Spezialfällen abgesehen nur numerisch nach λ aufgelöst werden kann.

14.5 Lineare Stabilitätsanalyse

Nachdem wir nun zentrale Elemente der Theorie linearer Differentialgleichungen vorgestellt haben, wollen wir noch zeigen, dass diese Theorie auch zur Untersuchung wichtiger Aspekte *nichtlinearer Systeme* geeignet ist. Dabei stehen folgende Fragen im Vordergrund: Wie schnell relaxieren Lösungen zu einer asymptotisch stabilen stationären Lösung hin, wie schnell bewegen sie sich von einer instabilen stationären Lösung fort? Wichtiger noch: Ist eine bestimmte stationäre Lösung überhaupt stabil? Antworten auf derartige Fragen liefert die **lineare Stabilitätsanalyse**.

Interessiert man sich für die Stabilität einer vorgegebenen stationären Lösung $x^\star$, so muss man untersuchen, ob sich kleine Abweichungen von dieser Lösung längerfristig bemerkbar machen — wachsen sie mit der Zeit an oder klingen sie wieder ab? Nach den Definitionen von Kapitel 13.1 heißt die stationäre Lösung im ersten Fall instabil, im zweiten Fall asymptotisch stabil.[2]

Im folgenden wollen wir uns auf gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung der Form

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = f(x(t)) \tag{14.42}$$

beschränken. Um die Stabilität einer stationären Lösung von (14.42) zu untersuchen, betrachten wir das Lösungsverhalten *in der Nähe* einer derartigen Lösung und setzen in einem ersten Schritt als Lösung $x(t) = x^\star + y(t)$ an. Diese Formulierung kann man *immer* erreichen — auch für beliebige große Abweichungen — indem man $y(t)$ als $y(t) = x(t) - x^\star$ definiert. Da $x^\star$ eine Konstante ist, gilt $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x^\star = 0$ und wir erhalten $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x(t) - x^\star) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)$. Setzen wir an dieser Stelle Gleichung (14.42) ein, so folgt $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t) = f(x(t)) = f(x^\star + y(t))$, wobei im letzten Schritt wieder die Definition von $y(t)$, nun in Form von $x(t) = x^\star + y(t)$ verwendet wurde. Insgesamt gilt also

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t) = f(x^\star + y(t)) \quad \text{mit} \quad f(x^\star) = 0\ . \tag{14.43}$$

Da wir im Moment nur an *kleinen* Abweichungen von der stationären Lösung interessiert sind, betrachten wir nun in einem zweiten Schritt die rechte Seite der Gleichung *in linearer Näherung*, das heißt für kleine Werte $y(t)$. Dazu berechnen wir die ersten beiden Glieder der Taylorentwicklung von f an der Stelle $x^\star$,

$$f(x(t)) \approx f(x^\star) + (x(t) - x^\star) \cdot \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x^\star}\ . \tag{14.44}$$

Nach unserer Definition gilt $x(t) = x^\star + y(t)$. Setzen wir diese Beziehung in Gleichung (14.44) ein, dann erhalten wir

$$f(x^\star + y(t)) \approx f(x^\star) + y(t) \cdot \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x^\star} = 0 + y(t) \cdot f'(x^\star)\ . \tag{14.45}$$

Der Funktionswert $f(x^\star)$ ist Null, da $x^\star$ nach Voraussetzung eine stationäre Lösung ist. Der Term $f'(x^\star)$ bezeichnet wie gewöhnlich die Steigung der Funktion $f(x)$ an der Stelle $x^\star$ – siehe auch nochmals Abbilung 13.2.

[2] In höherdimensionalen Systemen können daneben auch andere Phänomene auftreten, beispielsweise Oszillationen um die stationäre Lösung — wie im Fall eines harmonischen Oszillators. Mit den Resultaten zur qualitativen Analyse von Differentialgleichungen (Kapitel 13.1) wissen wir jedoch, dass dies in einer Differentialgleichung der Form (14.42) nicht geschehen kann.

In dieser linearen Näherung (alle Terme höherer Ordnung wurden vernachlässigt) erhalten wir eine *lineare* homogene Differentialgleichung für y — siehe auch (14.2),

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t) = y(t) \cdot f'(x^\star) \ . \tag{14.46}$$

Da der Faktor $f'(x^\star)$ für gegebenes $x^\star$ eine Konstante ist, ist (14.46) formal identisch mit der uns wohlbekannten Gleichung (14.1). Damit kann die allgemeine Lösung sofort angegeben werden,

$$y(t) = C\,\mathrm{e}^{f'(x^\star)\cdot t} \tag{14.47}$$

wobei $C \in \mathbf{R}$ und damit

$$x(t) = x^\star + C\,\mathrm{e}^{f'(x^\star)\cdot t} \ . \tag{14.48}$$

Für negative $f'(x^\star)$ erhält man somit *exponentiell* relaxierende Lösungen — die stationäre Lösung $x^\star$ ist also asymptotisch stabil — für positive $f'(x^\star)$ ergeben sich exponentiell anwachsende Lösungen — die stationäre Lösung ist instabil. Beachten Sie jedoch, dass diese lineare Näherung nur in der Nähe der stationären Lösung gültig ist. Nichtlinearitäten der Funktion f können dazu führen, dass die Lösungen der ursprünglichen Differentialgleichung für $f'(x^\star) > 0$ nicht für alle Zeiten exponentiell anwachsen sondern beschränkt bleiben, wie man dies aus physikalischen Gründen auch fordern sollte.

SELBSTTEST: Vergleichen Sie die Ergebnisse zur linearen Stabilitätsanalyse mit den Resultaten zur qualitativen Analyse in Kapitel 13.1! Welche Gemeinsamkeiten, welche Unterschiede erkennen Sie? Betrachten Sie dazu als konkretes Beispiel einer Differentialgleichung der Form $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = f(x(t))$ die Gleichung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = -x^3 + 9x$.

14.6 Aufgaben

1. (Lineare Differentialgleichung) Ein Medikament wird einem Patienten mit konstanter Rate r (in Gramm/Sekunde) über eine Infusion zugeführt. Gleichzeitig wird es vom Körper proportional der vorhandenen Menge $x(t)$ mit Proportionalitätskonstante α abgebaut.

(a) Stellen Sie eine Differentialgleichung $\dot{x} = f[x(t)]$ für $x(t)$ auf.

(b) Skizzieren Sie $f(x)$.

(c) Welche Fixpunkte hat die Differentialgleichung?

(d) Diskutieren Sie ihre Stabilität (lineare Stabilitätsanalyse).

(e) Lösen Sie die Differentialgleichung zunächst für beliebige Anfangswerte $x(t=0) = x_0$ durch Trennung der Variablen und zeichnen Sie dann $x(t)$ für die speziellen Anfangswerte (i) $x_0 = 0$, (ii) $x_0 = \frac{r}{\alpha}$, (iii) $x_0 = 2\frac{r}{\alpha}$.

(f) Vergleichen sie Ihre Ergebnisse mit denen von der Medikamentenaufgabe in Kapitel 6. Was war dort anders, was war gleich?

Kapitel 15

Lineare Gleichungen und Gaußsches Eliminationsverfahren

Holt Achilles die Schildkröte in endlicher Zeit ein?

Wir greifen hier den Wettlauf von Achilles und der Schildkröte (siehe Kapitel 5) nochmals als ein einfaches Beispiel wieder auf und stellen uns die Frage, unter welchen Bedingungen Achilles die Schildkröte einholen kann — und wie viel Zeit er dazu benötigt.

Dazu nehmen wir an, dass die Schildkröte zur Zeit $t = 0$ am Ort $x(0) = c_S$ mit der konstanten Geschwindigkeit v_S nach rechts zu laufen beginnt, während Achilles zur Zeit $t = 0$ bei c_A mit der Geschwindigkeit v_A losspurtet. Daraus ergibt sich:

Bewegungsgleichung der Schildkröte:

$$x(t) = c_S + v_S t \tag{15.1}$$

Bewegungsgleichung des Achilles:

$$x(t) = c_A + v_A t \tag{15.2}$$

Falls Achilles die Schildkröte einholt, müssen sich beide im Moment t^* der Begegnung am *gleichen* Ort $x(t^*)$ befinden. Damit muss

$$c_S + v_S t^* = c_A + v_A t^* \tag{15.3}$$

gelten, das heißt

$$c_S - c_A = t^*(v_A - v_S) \ . \tag{15.4}$$

Nehmen wir nun an, dass $v_A > v_S$, so folgt

$$t^* = \frac{c_S - c_A}{v_A - v_S} \ . \tag{15.5}$$

Damit holt Achilles – im Gegensatz zur alten griechischen Lehrmeinung – die Schildkröte nach einer eindeutig festgelegten *endlichen* Zeit ein.

Wie die obige Abbildung zeigt, sind die Trajektorien des Achilles und der Schildkröte Geraden. Dies liegt daran, dass in den Gleichungen (15.1) und (15.2) die beiden Variablen, Ort x und Zeit t, nur linear, das heißt in der ersten Potenz auftauchen. Derartige Gleichungen werden lineare Gleichungen genannt:

Definition (Lineare Gleichungen):
Eine Gleichung heißt **linear**, wenn ihre Unbekannten (oder: Variablen) nur in der ersten Potenz auftreten. Die Gleichung heißt **homogen**, wenn sie keine additiven Konstanten enthält, ansonsten wird sie **inhomogen** genannt.

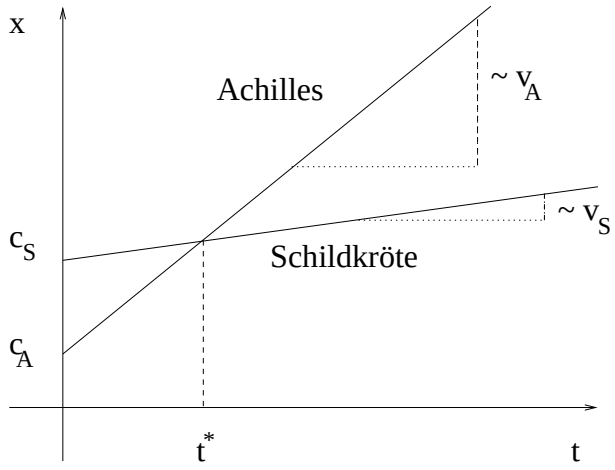


Abbildung 15.1: Achilles und die Schildkröte

Falls $c_S \neq 0$, ist Gleichung (15.1) also eine inhomogene lineare Gleichung, falls $c_S = 0$ eine homogene lineare Gleichung. Entsprechendes gilt für (15.2).

BEMERKUNG: Vergleichen Sie die Definition einer (in)homogenen Gleichung genau mit der Definition einer (in)homogenen linearen Iterierten Abbildung (Kapitel 6.1) und der Definition einer (in)homogenen linearen Differentialgleichung in Kapitel 14! Was fällt Ihnen auf?

BEMERKUNG: Quasi als Nachtrag zur letzten Bemerkung: Die Gleichungen $x = t^2$ und $x^2 = t$ sind beide nichtlinear, da im ersten Fall die Variable t, im zweiten Fall die Variable x quadratisch auftaucht. Dagegen ist die Differentialgleichung $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = xt^2$ eine lineare Differentialgleichung, da sie die dynamische Variable x und ihre Ableitungen nur in linearer Ordnung enthält — wohingegen die Differentialgleichung $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x^2t$ nichtlinear ist, da hier die dynamische Variable x quadratisch erscheint.

Zurück zu unserem Beispiel: Wie auch die Abbildung zeigt, beschreibt jede einzelne der beiden Gleichungen eine Gerade. Sucht man also nach einer Lösung, die *beide* Gleichungen erfüllt, so entspricht dies der Suche nach dem Schnittpunkt beider Geraden. Das ursprüngliche Problem ist also identisch mit einem rein geometrischen Problem. Dessen Lösung ist offensichtlich: Falls sich die Steigungen v_A und v_S der zwei Geraden unterscheiden, so schneiden sich die Geraden in genau einem Punkt.

BEMERKUNG: Später werden wir ganz allgemein von der Lösung eines **linearen Gleichungssystems** sprechen, oder äquivalent dazu, von der Lösung eines **Systems linearer Gleichungen** oder eines **Systems gekoppelter linearer Gleichungen**. Damit ist gemeint, dass wir eine Lösung suchen, die alle betrachteten linearen Gleichungen gemeinsam löst. Im Sinn dieser Nomenklatur ist der Punkt $(t^*, x(t^*))$ die Lösung des Systems der beiden linearen Gleichungen (15.1) und (15.2).

Was aber geschieht unter der (für Achilles allerdings entwürdigenden) Annahme $v_A = v_S$? Gleichung (15.4) lautet in diesem Fall

$$c_S - c_A = t^* \cdot 0 \ . \tag{15.6}$$

Im Fall $c_S \neq c_A$ gibt es also *keine Lösung* und für $c_S = c_A$ existieren *unendlich viele Lösungen.*

Anschaulich bedeuten die beiden letzten Fälle, dass bei gleicher Geschwindigkeit ($v_A = v_S$) Achilles die Schildkröte nicht einholen kann (wenn $c_S \neq c_A$) beziehungsweise immer

exakt neben ihr herschleicht (wenn $c_S = c_A$).

Notiz:
Das Auftreten dieser drei Möglichkeiten – eine Lösung, keine Lösung, unendlich viele Lösungen – in Abhängigkeit von den gewählten Parametern ist im Wesentlichen schon der Kern der Theorie linearer Gleichungen.

In Zukunft wollen wir auch kompliziertere Situationen mit mehreren Unbekannten behandeln können. Um bei derartigen Fragen nicht in jedem Fall neu formulieren zu müssen, bringen wir die betrachteten Gleichungen auf die Standardform eines Systems gekoppelter linearer Gleichungen, und entwickeln darauf aufbauend einen geschlossenen Lösungsformalismus.

Dieser Formalismus erlaubt mannigfache Anwendungen. Ein Beispiel zum Abschluß: Bei der Untersuchung einer Gewebeprobe stellt sich heraus, dass sie 50 Volumenprozent von Zellart x_1, 30% von Zellart x_2 und 20% von Zellart x_3 enthält. Ein Kubikzentimeter des Gewebes wiegt 0.84 Gramm. Zwei andere Proben enthalten ebenfalls diese drei Zellarten – die zweite im Volumenverhältnis $80 : 10 : 10$ bei einem Gesamtgewicht von 0.94 Gramm pro cm^3, die dritte im Volumenverhältnis $60 : 10 : 30$ bei einem Gesamtgewicht von 0.90 Gramm pro cm^3. Kann man aus diesen drei Messungen die Dichten der einzelnen Zellarten bestimmen, und wenn ja, wie groß sind sie? In Kapitel 15.2 werden wir ein systematisches Verfahren kennenlernen, um Probleme dieser Art zu beantworten.

15.1 Lineare Gleichungen

Die Standardform einer linearen Gleichung erhalten wir aus (15.1), indem wir in einem ersten Schritt die beiden Variablen — hier x und t — auf die linke Seite und inhomogene Terme auf die rechte Seite der Gleichung bringen. Dies ergibt die Gleichung $x - v_S t = c_S$. Nun benennen wir noch die einzelnen Variablen und Parameter um: Wir bezeichnen die Ortsvariable mit x_1, die Zeitvariable mit x_2 und setzen $a_{12} = -v_S$ und $b_1 = c_S$. Damit erhalten wir insgesamt

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \tag{15.7}$$

mit $a_{11} = 1$.

Setzen wir $a_{22} = -v_A$ und $b_2 = c_A$, so führt der gleiche Ansatz für (15.2) auf

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \tag{15.8}$$

mit $a_{21} = 1$.

Das System (15.7),(15.8) stellt nun die Standardform eines Systems zweier linearer Gleichungen dar.

Bisher haben wir nach dem Schnittpunkt zweier Geraden gesucht. In gleicher Weise könnten wir natürlich auch fragen, unter welchen Bedingungen drei Geraden einen einzigen Schnittpunkt haben, und wo dieser liegt. In diesem Fall müßten wir also die Lösung eines Gleichungssystems mit drei Gleichungen der Form (15.7) suchen. Wir werden auf diese Frage später zurückkommen.

Gleichungen wie (15.7) oder (15.8) beschreiben Geraden. Welche Form hat aber die Gleichung einer Ebene im dreidimensionalen Raum? Im Allgemeinen wird eine Ebene im Raum, die durch die x_1-Achse und die x_2-Achse aufgespannte Ebene schneiden. Die Schnittmenge hat die Form einer Geraden. In der $x_1 - x_2$-Ebene beschreibt also (15.7) eine solche Gerade. Entsprechendes gilt für die Schnitte mit der $x_2 - x_3$-Ebene und der

$x_1 - x_3$-Ebene. Deshalb lautet die Gleichung einer Ebene:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \tag{15.9}$$

Die Schnittmenge zweier beliebiger Ebenen werden damit durch die Lösungen von zwei Gleichungen der Form (15.9) beschrieben, die Schnittmenge dreier Ebenen durch die Lösungen von drei Gleichungen der Form (15.9), und entsprechendes gilt für Schnittmengen in höherdimensionalen Räumen, auch wenn wir uns diese nicht mehr anschaulich vorstellen können.

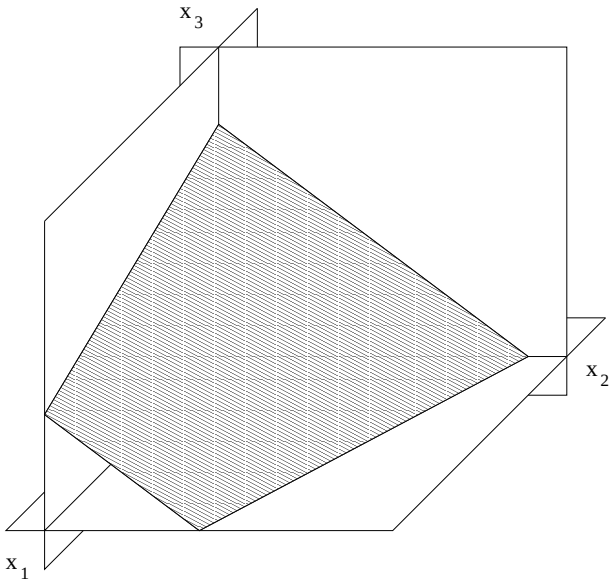


Abbildung 15.2: Ausschnitt einer Ebene im durch x_1, x_2 und x_3 aufgespannten Raum.

Ausgehend von diesen Beispielen stellt sich die allgemeine Frage, wie man Lösungen von Systemen mit n linearen Gleichungen und m Unbekannten findet, also die Lösung eines Gleichungssystems der Form

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1m}x_m & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2m}x_m & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & = & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & a_{nm}x_m & = & b_n \end{array} \tag{15.10}$$

Definition (Dimension eines Gleichungssystems):
Die Zahl m der Unbekannten heißt auch **Dimension des Gleichungssystems**.

Es soll an dieser Stelle aber schon betont werden, dass wir den Formalismus zwar für beliebige Dimension m und Gleichungszahl n entwickeln werden, bei konkreten Beispielen jedoch meist Situationen mit $m, n \leq 3$ betrachten werden.

Die m Unbekannten $x_1 \dots x_m$ eines Gleichungssystems können auch kompakt als Vektor $\vec{x}$ geschrieben werden:

Definition (Vektor):
Es seien m reelle (oder auch komplexe) Zahlen $x_1, \ldots, x_m$ vorgegeben. Sie können als **Vektor** $\vec{x} \in \mathbf{R}^m$ (beziehungsweise $\vec{x} \in \mathbf{C}^m$) dargestellt werden, indem man sie nach ihrem Index geordnet aufschreibt, $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$. Die Zahl x_i mit $1 \leq i \leq m$ wird dann als **i-te Komponente** des **m-dimensionalen Vektors** $\vec{x}$ bezeichnet.
Zwei m-dimensionale Vektoren sind genau dann identisch, wenn sie komponentenweise übereinstimmen, $\vec{x} = \vec{y} \iff x_i = y_i$ für alle $1 \leq i \leq m$.

BEISPIEL :

Der Ortsvektor $\vec{r}$, Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}$, und Beschleunigungsvektor $\vec{a}$ eines physikalischen Teilchens sind reellwertige Vektoren im dreidimensionalen Raum $\mathbf{R}^3$.

Der Vektor $\vec{a} = (1 - 5\mathrm{i}, 2 + \mathrm{i})$ ist ein Vektor im Raum $\mathbf{C}^2$ da seine zwei Komponenten, $a_1 = 1 - 5\mathrm{i}$ und $a_2 = 2 + \mathrm{i}$, komplexe Zahlen sind.

BEMERKUNG: Die zwei Vektoren $\vec{x} = (1, 2)$ und $\vec{y} = (2, 1)$ sind nach Definition unterschiedliche Vektoren. Im Gegensatz dazu sind jedoch die beiden *Mengen* $M_1 = \{1, 2\}$ und $M_2 = \{2, 1\}$ identische Mengen!

BEMERKUNG: Die komplexe Zahl $z = x + \mathrm{i}y$ kann auch als reellwertiger (!) Vektor $\vec{z} = (x, y)$ im zweidimensionalen Raum $\mathbf{R}^2$ aufgefasst werden. Die Multiplikation zweier komplexer Zahlen kann jedoch nicht als Multiplikation zweier Vektoren dargestellt werden. Wir werden aber später sehen, dass es auch eine der Multiplikation komplexer Zahlen entsprechende Operation für Vektoren gibt.

15.1.1 Homogene und Inhomogene Gleichungssysteme

Analog zum eindimensionalen Fall wird das System (15.10) **homogen** genannt falls alle b_j verschwinden. Falls mindestens ein b_j ungleich Null ist, heißt es **inhomogen**. Damit können wir nun zwei wichtige Sätze formulieren:

Satz (Superpositionsprinzip):
Sei (15.10) ein homogenes Gleichungssystem, das heißt $\vec{b} \equiv (b_1, b_2, \ldots, b_n) = 0$. Weiterhin seien $\vec{x} \equiv (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ und $\vec{y} \equiv (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ zwei Lösungen dieses Systems. Dann ist auch jede Linearkombination $\vec{z} = \lambda\vec{x} + \mu\vec{y}$ mit $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ eine Lösung.

Beweis durch Einsetzen.

Satz:
Jede Lösung des inhomogenen Gleichungssystems (15.10) kann als Summe einer speziellen Lösung von (15.10) und einer Lösung des zugeordneten homogenen Systems geschrieben werden.

Beweis:
Die Aussage des Satzes ist gleichbedeutend mit der Aussage, dass die Differenz zweier Lösungen $\vec{x} \equiv (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ und $\vec{y} \equiv (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ des inhomogenen Gleichungssystems eine Lösung des zugeordneten homogenen Systems ist. Diese zweite Aussage verifiziert man durch Einsetzen von $\vec{x}$ und $\vec{y}$ in (15.10).

BEMERKUNG: Vergleichen Sie die beiden Sätze mit den entsprechenden Sätzen über Lineare Iterierte Abbildungen (Kapitel 6.1) und Lineare Differentialgleichungen in Kapitel 14.3!

15.1.2 Lösung für ein System mit zwei Gleichungen

Bevor wir die allgemeine Lösung eines Systems mit n Gleichungen behandeln, wollen wir zuerst zu unserem Beispiel von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten x_1 und x_2 zurückkehren, und dieses Gleichungssystem für beliebige reelle Parameter a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1 und b_2 untersuchen.

Um die Variable x_1 zu eliminieren, multiplizieren wir (15.7) mit a_{21},

$$a_{11}a_{21}x_1 + a_{12}a_{21}x_2 = a_{21}b_1 \tag{15.11}$$

und (15.8) mit a_{11},

$$a_{11}a_{21}x_1 + a_{11}a_{22}x_2 = a_{11}b_2 \ . \tag{15.12}$$

Subtrahieren wir nun Gleichung (15.11) von (15.12), erhalten wir

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\ x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1 \ . \tag{15.13}$$

Falls $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, so folgt für x_2

$$x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \tag{15.14}$$

und daraus mit Hilfe von (15.7)

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \ . \tag{15.15}$$

Wie im Fall $v_A \neq v_S$ des Beispiels von Achilles und der Schildkröte erhalten wir also eine eindeutige Lösung. Falls dagegen der Term $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ verschwindet, hat das System (15.7) und (15.8) entweder keine Lösung (wenn $a_{11}b_2 - a_{21}b_1 \neq 0$) oder unendlich viele Lösungen (wenn $a_{11}b_2 - a_{21}b_1 = 0$).

Da wir $a_{12} = -v_S$, $a_{22} = -v_A$ und $a_{11} = a_{21} = 1$ gesetzt hatten, stimmt die Bedingung $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ auch exakt mit der früheren Bedingung $v_A \neq v_S$ überein. Auch die Lösungen entsprechen einander — prüfen Sie dies selbst nach!

In den Gleichungen (15.14) und (15.15) tauchen bestimmte Kombinationen mit jeweils vier der sechs Parameter a_{ij} und b_i wiederholt auf. Wir führen deshalb eine Abkürzung für diese spezielle Kombination ein, die **Determinante** genannt und mit det bezeichnet wird:

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv ad - bc \ . \tag{15.16}$$

Damit können wir (15.15) und (15.14) kompakt als

$$x_1 = \frac{\det \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}} \qquad \text{und} \qquad x_2 = \frac{\det \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}} \tag{15.17}$$

schreiben.

Im Moment verschafft diese Schreibweise noch keinen wesentlichen Vorteil gegenüber (15.15) und (15.14), wir werden jedoch in Kapitel 17 sehen, dass die Determinante auch auf Gleichungen mit mehreren Variablen angewendet werden kann, bei denen eine kompakte Angabe der Lösungen sonst nicht mehr so leicht möglich ist.

Zuerst wollen wir jedoch derartige Gleichungen direkt lösen:

15.2 Gaußsches Eliminationsverfahren

Die Lösung (15.14), (15.15) hatten wir erhalten, indem wir die Ausgangsgleichungen (15.7) und (15.8) geeignet umformten, so dass wir in einer der beiden Gleichungen die Variable x_1 eliminieren konnten — siehe (15.11) bis (15.13). Dadurch hatten wir mit Gleichung (15.13) eine Gleichung mit nur einer Variable erhalten, die wir direkt lösen konnten. Dies führt direkt auf (15.14). Dieses Ergebnis wurde anschließend in eine der beiden Ausgangsgleichungen eingesetzt und lieferte (15.15).

Der wesentliche Trick bestand somit darin, durch geschickte Kombination der Ausgangsgleichungen einfachere Gleichungen zu erhalten, diese direkt zu lösen, und dann mit Hilfe der Ergebnisse die ursprüngliche Gleichung zu lösen.

Wir übertragen nun diesen Zugang auf lineare Gleichungen mit mehreren Variablen wie (15.10). Zur Vereinfachung gehen wir von der gleichen Anzahl ($n = m$) an n linearen Gleichungen und m Unbekannten aus und verwenden den gemeinsamen Index l,

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1l}x_l & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2l}x_l & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & = & \vdots \\ a_{l1}x_1 & + & a_{l2}x_2 & + & \dots & + & a_{ll}x_l & = & b_l \end{array}$$

In einem ersten Schritt subtrahieren wir von jeder Zeile k mit $k > 1$ das $\frac{a_{k1}}{a_{11}}$-fache der ersten Zeile und erhalten

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1l}x_l & = & b_1 \\ 0 & + & (a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{12})x_2 & + & \dots & + & (a_{2l} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{1l})x_l & = & b_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}}b_1 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & = & \vdots \\ 0 & + & (a_{l2} - \frac{a_{l1}}{a_{11}}a_{12})x_2 & + & \dots & + & (a_{ll} - \frac{a_{l1}}{a_{11}}a_{1l})x_l & = & b_l - \frac{a_{l1}}{a_{11}}b_1 \end{array}$$

Damit haben wir erreicht, dass die Variable x_1 nur noch in der ersten Gleichung erscheint.

Falls $a_{11} = 0$ können wir jedoch die Division durch a_{11} nicht durchführen. In diesem Fall suchen wir nach einer Zeile j für die $a_{j1} \neq 0$ gilt und vertauschen diese Zeile mit der ersten Zeile. Nun können wir den obigen Schritt durchführen. Anschließend gehen wir zum zweiten Schritt über:

Wir betrachten nun nur noch all die Gleichungen, in denen der Vorfaktor von x_1 verschwindet, d.h. $l - 1$ Gleichungen für die $l - 1$ Variablen x_2 bis x_l:

$$\begin{array}{ccc|ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1l}x_l & = & b_1 \\ \hline 0 & & (a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{12})x_2 & + & \dots & + & (a_{2l} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{1l})x_l & = & b_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}}b_1 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & = & \vdots \\ 0 & & (a_{l2} - \frac{a_{l1}}{a_{11}}a_{12})x_2 & + & \dots & + & (a_{ll} - \frac{a_{l1}}{a_{11}}a_{1l})x_l & = & b_l - \frac{a_{l1}}{a_{11}}b_1 \end{array}$$

Auf dieses reduzierte Gleichungssystem wenden wir wieder den ersten Schritt an und können damit erreichen, dass die Variable x_2 im reduzierten Gleichungssystem nur in der ersten Gleichung – und damit insgesamt nur in den ersten beiden Gleichungen erscheint.

Setzen wir dieses Verfahren fort, können wir nach insgesamt l Schritten das ursprüngliche System (15.10) auf die Form

$$\begin{array}{ccccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1,l-1}x_{l-1} & + & a_{1l}x_l & = & b_1 \\ 0 & + & \tilde{a}_{22}x_2 & + & \dots & + & \tilde{a}_{2,l-1}x_{l-1} & + & \tilde{a}_{2l}x_l & = & \tilde{b}_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots & = & \vdots \\ 0 & + & 0 & + & \dots & + & \tilde{a}_{l-1,l-1}x_{l-1} & + & \tilde{a}_{l-1,l}x_l & = & \tilde{b}_{l-1} \\ 0 & + & 0 & + & \dots & + & 0 & + & \tilde{a}_{ll}x_l & = & \tilde{b}_l \end{array} \tag{15.18}$$

bringen. Das hier beschriebene Verfahren wird **Gaußsches Eliminationsverfahren** genannt. Um zu verdeutlichen, dass die Vorfaktoren im letzten Gleichungssystem nicht mit denen von (15.10) identisch sind, haben wir sie mit einer Tilde ($\tilde{}$) versehen.

Nach diesen Umformungen ist das Problem gelöst. Falls $\tilde{a}_{ll} \neq 0$ ergibt sich der Wert von x_l aus der letzten Gleichung von (15.18) zu

$$x_l = \frac{\tilde{b}_l}{\tilde{a}_{ll}} \ . \tag{15.19}$$

Setzt man dieses Ergebnis in die vorletzte Gleichung ein, erhält man für x_{l-1}, falls $\tilde{a}_{l-1,l-1} \neq 0$

$$x_{l-1} = \frac{1}{\tilde{a}_{l-1,l-1}} \left(\tilde{b}_{l-1} - \tilde{a}_{l-1,l} x_l \right) = \frac{1}{\tilde{a}_{l-1,l-1}} \left(\tilde{b}_{l-1} - \tilde{a}_{l-1,l} \frac{\tilde{b}_l}{\tilde{a}_{ll}} \right) \ , \tag{15.20}$$

und in gleicher Weise kann man nun sukzessive alle x_j bestimmen, wiederum unter der Voraussetzung, dass alle auftretenden Divisionen ausgeführt werden können.

Was bedeutet es, falls eine der Divisionen *nicht* ausgeführt werden kann? Betrachten wir den Fall $\tilde{a}_{ll} = 0$ in (15.18):

$$0 \cdot x_l = \tilde{b}_l \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} \text{falls } \tilde{b}_l \neq 0\text{:} & \text{das Gleichungssystem hat keine Lösung} \\ \text{falls } \tilde{b}_l = 0\text{:} & x_m \text{ unbestimmt} \end{cases}$$

Diese beiden Fälle entsprechen genau den Ergebnissen der Diskussion von Gleichung (15.6) des Beispiels von Achilles und der Schildkröte!

Wie wirkt sich eine Unbestimmtheit von x_l auf x_{l-1} aus? Falls $\tilde{a}_{l-1,l-1} \neq 0$ gilt nach (15.20)

$$x_{l-1} = \frac{\tilde{b}_{l-1}}{\tilde{a}_{l-1,l-1}} - \frac{\tilde{a}_{l-1,l}}{\tilde{a}_{l-1,l-1}} x_l \ . \tag{15.21}$$

In der durch x_{l-1} und x_l aufgespannten Ebene stellen die Lösungen von (15.21) also eine Gerade dar.

Falls auch $\tilde{a}_{l-2,l-2} \neq 0$, kann die Lösungsmenge als eine Gerade im durch x_l, x_{l-1}, x_{l-2} aufgespannten Raum aufgefaßt werden. x_l kann dabei als **freier Parameter** betrachtet werden, der die Punkte dieser Gerade parametrisiert. Falls weiterhin $\tilde{a}_{l-3,l-3} \neq 0$, etc., entspricht dies einer Gerade in einem entsprechend höherdimensionalen Raum.

Wenn dagegen ein weiteres x_k nicht festgelegt werden kann, ist die Lösung durch zwei freie Parameter gekennzeichnet. Geometrisch bedeutet dies, dass alle Punkte einer Ebene

Lösungen sind. Drei freie Parameter entsprechen einer dreidimensionalen Lösungsmenge etc.

BEMERKUNG: Das Gaußsche Eliminationsverfahren kann in gleicher Weise auf Gleichungssysteme mit unterschiedlicher Anzahl ($n \neq m$) von n linearen Gleichungen und m Unbekannten angewendet werden.

BEISPIEL:

Wir wollen nun unsere Erkenntnisse auf das am Ende der Einleitung dieses Kapitels beschriebene Problem anwenden. Bezeichnen x_1, x_2 und x_3 die Dichten der drei Zellarten (in Gramm pro Kubikzentimeter), so erhalten wir die folgenden drei Gleichungen:

$$\begin{array}{rcrcrcll} 0.5x_1 & + & 0.3x_2 & + & 0.2x_3 & = & 0.84 & \text{I} \\ 0.8x_1 & + & 0.1x_2 & + & 0.1x_3 & = & 0.94 & \text{II} \\ 0.6x_1 & + & 0.1x_2 & + & 0.3x_3 & = & 0.9 & \text{III} \end{array}$$

Nach dem ersten Umformungsschritt erhält man:

$$\begin{array}{rcrcrcll} 0.5x_1 & + & 0.3x_2 & + & 0.2x_3 & = & 0.84 & \text{I} \\ & & 1.9x_2 & + & 1.1x_3 & = & 2,02 & 8 \cdot \text{I} - 5 \cdot \text{II} \quad (\text{II}') \\ & & 1.3x_2 & - & 0.3x_3 & = & 0.54 & 6 \cdot \text{I} - 5 \cdot \text{III} \quad (\text{III}') \end{array}$$

Nach dem zweiten Schritt:

$$\begin{array}{rcrcrcll} 0.5x_1 & + & 0.3x_2 & + & 0.2x_3 & = & 0.84 & \text{I} \\ & & 1.9x_2 & + & 1.1x_3 & = & 2.02 & \text{II}' \\ & & & & 20.0x_3 & = & 16.00 & 13 \cdot \text{II}' - 19 \cdot \text{III}' \quad (\text{III}'') \end{array}$$

Aus Gleichung III″ folgt sofort $x_3 = 0.8$. Setzt man dieses Ergebnis in II′ ein, erhält man $x_2 = 0.6$, und damit aus Gleichung I: $x_1 = 1.0$. Die Dichten der drei Zellarten betragen also 1.0, 0.6 und 0.8 Gramm pro Kubikzentimeter.

15.3 Aufgaben

1. (Geraden) Im $\mathbf{R}^2$ seien die Geraden $g_1 : \ -x_1 + 2x_2 = 2$ und $g_2 : \ x_1 + 2x_2 = 6$ in Normalform (auch Standardform genannt) gegeben.

(a) Zeichnen Sie die beiden Geraden. (Falls Sie nicht wissen, wie Sie anfangen sollen: Suchen Sie sich zwei Punkte auf der Geraden, z.B. die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen oder identifizieren Sie x_1 mit x und x_2 mit y und bringen Sie die Gleichungen dann auf die Ihnen bekannte Form $y = mx + c$.)

(b) Schneiden sich die beiden Geraden? Falls ja, in welchem Punkt?

(c) In welchen Punkten schneidet die Gerade $g_3 : \ x_1 - 2x_2 = 2$ die Geraden g_1 und g_2 ?

(d) Betrachten Sie nun noch die Geradenschar $g_4(b) : \ 2x_1 - x_2 = b$ für beliebige $b \in \mathbf{R}$. Ist es möglich, b so zu wählen, dass sich die drei Geraden g_1, g_2 und $g_4(b)$ in genau einem Punkt schneiden? Falls ja: Welchen Wert müssen Sie für b wählen?

2. (Geraden) Im $\mathbf{R}^2$ seien die Punkte $P_1 = (-1, 2)$ und $P_2 = (2, 0)$ gegeben.

(a) Geben Sie die Gleichung einer Geraden g_1 in Normalform ($a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$) an, die durch P_1 und P_2 verläuft.

(b) Wie lautet die Gleichung der Geraden $g_2 :\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$, die parallel zu g_1 durch den Ursprung $(0, 0)$ verläuft.

(c) Finden Sie nun die Gleichung einer Geraden $g_3 :\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 = b_3$, die senkrecht zu g_2 ebenfalls durch den Ursprung verläuft. Überlegen Sie sich dazu, warum für die Koeffizienten a_{ij} der beiden Geraden $a_{21}a_{31} + a_{22}a_{32} = 0$ gelten muss.

(d) In welchem Punkt schneiden sich die Geraden g_1 und g_3? Sie haben nun von allen Punkten auf der Gerade g_1 denjenigen gefunden, der bezüglich der Euklidischen Norm $|\vec{x}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{2} x_i^2}$ den kürzesten Abstand zum Ursprung hat. Dies definiert auch den Abstand der Geraden g_1 vom Ursprung. Welchen Abstand hat also g_1 vom Ursprung?

3. (Ebenen) Gegeben sei die Ebene e_1 in $\mathbf{R}^3$, die die von der x_1–Achse und der x_2–Achse aufgespannte Ebene in der Geraden $x_1 + x_2 = 2$, die von der x_1–Achse und der x_3–Achse aufgespannte Ebene in der Geraden $x_1 + x_3 = 2$ und die von der x_2–Achse und der x_3–Achse aufgespannte Ebene in der Geraden $x_2 + x_3 = 2$ schneidet.

(a) Finden Sie eine Gleichung in Normalform für e_1.

Weiter seien die Ebenen $e_2 :\ -2x_1 + x_2 - x_3 = 4$ und $e_3 :\ x_1 - x_3 = 1$ gegeben.

(b) Bestimmen Sie den Schnittpunkt der drei Ebenen mittels Gaußelimination. Sollten Sie in (a) keine Lösung gefunden haben, so verwenden Sie für $e_1 :\ x_1 + x_2 + x_3 = 2$.

4. (Lineare Geichungen) Gegeben sei das homogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0\ , \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 0\ , \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 &= 0\ . \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, dass dieses System keine Punktlösung, sondern eine Punktmenge als Lösung hat.

(b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge.

Kapitel 16

Matrizen

Fragen zur Existenz und Struktur der Lösung von (15.10) können durch zwei neue mathematische Begriffe, **Matrix** und **Determinante**, überaus kompakt formuliert werden. Daneben haben diese Konzepte auch eine geometrische Interpretation und erleichtern Operationen mit Vektoren, beispielsweise Drehungen und Streckungen im dreidimensionalen Raum, ganz erheblich.

Matrizen verallgemeinern das Konzept einer Zahl — sie sind so etwas wie "mehrdimensionale Zahlen". Addition und Subtraktion von Matrizen folgen den von reellen und komplexen Zahlen her bekannten Rechenregeln, bei der Multiplikation und Division treten jedoch vollkommen neue Phänomene auf.

Definition (Matrix):
Eine **m×n Matrix A** ist ein geordnetes Schema mit m **Zeilen** und n **Spalten**,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} . \tag{16.1}$$

Die Größen a_{ij} heißen **Elemente** der Matrix $\mathbf{A}$. Statt a_{ij} schreibt man auch $(\mathbf{A})_{ij}$.

In diesem und den nächsten zwei Kapiteln werden die Matrixelemente reelle oder komplexe Zahlen sein, $a_{ij} \in \mathbf{R}$ beziehungsweise $a_{ij} \in \mathbf{C}$ für alle $1 \leq i \leq m$ und $1 \leq j \leq n$. Im Allgemeinen können die Matrixelemente jedoch auch Funktionen oder andere mathematische Objekte (zum Beispiel wiederum Matrizen) sein. So werden wir in Kapitel 18 Matrizen, deren Elemente Differentialquotienten sind, dazu verwenden, um Funktionen mehrerer Variabler zu untersuchen.

In gleicher Weise, wie wir reelle und komplexe Zahlen kennengelernt haben, nennt man eine Matrix $\mathbf{A}$ eine **komplexe Matrix**, wenn ihre Komponenten a_{ij} komplexe Zahlen sind, und eine **reelle Matrix**, wenn alle Komponenten reell sind.

Wie aus (16.1) ersichtlich, bezeichnet der erste Index die Zeilennummer (von oben nach unten gezählt) und der zweite Index die Spaltennummer (von links nach rechts gezählt). Stimmt der Zeilenindex i mit dem Spaltenindex j überein, $i = j$, so befindet man sich auf der Hauptdiagonalen der Matrix.

Definition (Hauptdiagonale):
Die Elemente $(\mathbf{A})_{ii}$ heißen **Hauptdiagonalelemente** der Matrix $\mathbf{A}$ und bilden zusammen die **Hauptdiagonale** der Matrix.

Definition (Untermatrix):
Streicht man Zeilen und/oder Spalten aus $\mathbf{A}$, so verbleibt eine kleinere Matrix. Alle diese Matrizen werden **Untermatrizen von A** genannt.

Definition (Transponierte Matrix):
Vertauscht man die Spalten und Zeilen einer Matrix $\mathbf{A}$, so erhält man die **transponierte Matrix** $\mathbf{A}^T$,

$$(\mathbf{A}^T)_{ij} = (\mathbf{A})_{ji} \tag{16.2}$$

BEISPIEL: **Transposition einer Matrix:**

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 7 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$$

Definition (Spalten- und Zeilenvektor):
Eine $m\times 1$ Matrix $\mathbf{X}$ mit m Zeilen und einer Spalte heißt **m-dimensionaler Spaltenvektor**,

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{m1} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \equiv \vec{x}\ . \tag{16.3}$$

Eine $1 \times n$ Matrix $\mathbf{Y}$ mit einer Zeile und n Spalten heißt **n-dimensionaler Zeilenvektor**,

$$\mathbf{Y} = (y_{11}, y_{12}, \ldots, y_{1n}) \equiv (y_1, y_2, \ldots, y_n)\ . \tag{16.4}$$

In (16.3) wie (16.4) wurde jeweils in der zweiten Gleichung der in diesem Fall irrelevante Zeilen- beziehungsweise Spalten-Index weggelassen.

BEMERKUNG: In Abschnitt 15.1 wurde mit der Schreibweise $\vec{x}$ ein zeilenartiger Vektor bezeichnet, wobei beispielsweise in Gleichung (15.10) die Inhomogenität $\vec{b}$ als spaltenartiger Vektor auftaucht. Um Missverständnisse zu vermeiden, werden wir im Zusammenhang mit Matrizen Spaltenvektoren mit $\vec{x}$ und Zeilenvektoren mit $\vec{x}^T$ bezeichnen.

BEISPIEL: **Zusammenhang Spalten- und Zeilenvektor:**

Ein Spaltenvektor kann durch Transposition in einen Zeilenvektor überführt werden — und umgekehrt:

$$\vec{x}^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}^T = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \qquad \text{und} \qquad (x_1, x_2, \ldots, x_m)^T = \vec{x} \; .$$

16.1 Quadratische Matrizen

Eine besondere Rolle spielen Matrizen, bei denen $m = n$ gilt.

Definition (Quadratische Matrix):
Eine Matrix mit gleicher Anzahl an Zeilen (Reihen) und Spalten, $m = n$, wird n**-reihige quadratische Matrix** oder **quadratische Matrix der Ordnung** n genannt.

Falls die Ordnung der Matrix nicht von Bedeutung ist, nennt man die Matrix auch kurz eine **quadratische Matrix**.

Wichtige quadratische Matrizen sind Matrizen, für die $(\mathbf{A})_{ij} = (\mathbf{A})_{ji}$ gilt. Diese Matrizen sind bezüglich der Hauptdiagonalen spiegelsymmetrisch und werden deshalb auch symmetrische Matrizen genannt.

Definition (Symmetrische Matrix):
Eine $n \times n$-Matrix, für die $(\mathbf{A})_{ij} = (\mathbf{A})_{ji}$ für alle $1 \leq i, j \leq n$ gilt, heißt **symmetrische Matrix**.

BEISPIEL:

$$\text{Die Matrix } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \text{ ist symmetrisch, denn } A_{12} = A_{21} = b \; .$$

Definition (Obere Dreiecksmatrix):
Eine quadratische Matrix $\mathbf{A}$ heißt **obere Dreiecksmatrix**, wenn $a_{ij} = 0$ für alle $i > j$ gilt.

Obere Dreiecksmatrizen Matrizen haben also folgende Gestalt:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1,n-2} & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2,n-2} & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3,n-2} & a_{3,n-1} & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-2,n-2} & a_{n-2,n-1} & a_{n-2,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{16.5}$$

Definition (Untere Dreiecksmatrix):
Eine quadratische Matrix $\mathbf{A}$ heißt **untere Dreiecksmatrix**, wenn $a_{ij} = 0$ für alle $i < j$ gilt.

Untere Dreiecksmatrizen Matrizen haben also folgende Gestalt:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-2,1} & a_{n-2,2} & a_{n-2,3} & \dots & a_{n-2,n-2} & 0 & 0 \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \dots & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} & 0 \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \dots & a_{n,n-2} & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{16.6}$$

Definition (Diagonalmatrix):
Eine quadratische Matrix $\mathbf{A}$ heißt **Diagonalmatrix**, wenn $a_{ij} = 0$ für alle $i \neq j$ gilt.

Bei einer Diagonalmatrix verschwinden also alle Elemente außerhalb der Hauptdiagonalen. Sie haben deshalb folgende Gestalt:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{16.7}$$

Da bei einer Diagonalmatrix nach Definition $a_{ij} = 0$ für alle $i \neq j$ gilt, ist jede Diagonalmatrix automatisch symmetrisch ($a_{ij} = a_{ji}$).

Definition (Einheitsmatrix):
Eine n-reihige Diagonalmatrix, deren Diagonalelemente alle Eins sind, heißt n-reihige **Einheitsmatrix** und wird mit $\mathbf{E}_n$ bezeichnet.

Eine n-reihige Diagonalmatrix hat also die Form

$$\mathbf{E}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \tag{16.8}$$

Falls die Ordnung n der Einheitsmatrix $\mathbf{E}_n$ eindeutig ist, schreibt man vereinfachend oft auch nur $\mathbf{E}$. Die Eins ($1 \in \mathbf{R}$) selbst kann damit auch als einreihige Einheitsmatrix verstanden werden.

16.2 Rechenregeln für Matrizen

16.2.1 Addition und Subtraktion

Definition (Addition und Subtraktion von Matrizen):
Haben zwei Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ jeweils m Zeilen und n Spalten, dann ist ihre Summe komponentenweise definiert als,

$$(A + B)_{ij} \equiv (A)_{ij} + (B)_{ij} \ . \tag{16.9}$$

Die Matrix $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ ist also wieder eine $m \times n$-Matrix.

BEMERKUNG: Ausgeschrieben hat die Summe zweier Matrizen also die Form

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix} . \tag{16.10}$$

BEISPIEL:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 7 \end{pmatrix} \implies \mathbf{A}+\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1+4 & 2+3 \\ 0+8 & 5+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 8 & 12 \end{pmatrix}$$

BEMERKUNG: Falls die Zahl der Spalten- beziehungsweise Zeilen zweier Matrizen nicht übereinstimmt, ist ihre Summe *nicht* definiert! So ist beispielsweise der Ausdruck $(x_1, x_2) + (y_1, y_2, y_3)$ nicht definiert.

BEMERKUNG: Für Spaltenvektoren und Zeilenvektoren ergibt (16.10) die aus der Vektorrechnung bekannte komponentenweise Addition.

Wie die Summe ist auch die Differenz zweier Matrizen komponentenweise definiert:

$$(A - B)_{ij} \equiv (A)_{ij} - (B)_{ij} \tag{16.11}$$

oder

$$\mathbf{A}-\mathbf{B}=\begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & \dots & a_{1n}-b_{1n} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & \dots & a_{2n}-b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}-b_{m1} & a_{m2}-b_{m2} & \dots & a_{mn}-b_{mn} \end{pmatrix} . \tag{16.12}$$

BEISPIEL:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \mathbf{B}=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 7 \end{pmatrix} \Longrightarrow \mathbf{A}-\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 1-4 & 2-3 \\ 0-8 & 5-7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -8 & -2 \end{pmatrix}$$

Definition (Nullmatrix):
Eine **Nullmatrix** ist eine $m \times n$-Matrix, bei der *alle* Komponenten Null sind,

$$\mathbf{0}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} . \tag{16.13}$$

Definition (Äquivalenz zweier Matrizen):
Zwei $m \times n$-Matrizen, $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$, heißen genau dann gleich ($\mathbf{A} = \mathbf{B}$), wenn ihre Differenz die Nullmatrix ergibt, $\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{0}$.

Zwei Matrizen sind also genau dann identisch, wenn sie komponentenweise übereinstimmen:

$$\mathbf{A}=\mathbf{B} \Longleftrightarrow a_{ij}=b_{ij} \quad \text{für alle} \quad 1 \le i \le m \quad \text{und alle} \quad 1 \le j \le n \; . \tag{16.14}$$

BEMERKUNG: Sind $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ $n \times m$-Matrizen, müssen also $n \cdot m$ Gleichungen erfüllt sein.

Mit den bisherigen Definitionen können Matrizen bezüglich Addition und Subtraktion genauso behandelt werden wie reelle Zahlen. Wie aber kann die Multiplikation von Matrizen sinnvoll definiert werden?

16.2.2 Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar

Bildet man mit (16.10) die Summe $\mathbf{A} + \mathbf{A}$, so erhält man $a_{ij} + a_{ij} = 2(a_{ij})$, was man auch als die i, j-Komponente einer neuen Matrix $2\mathbf{A}$ interpretieren kann. Verallgemeinert man dies auf beliebige Vielfache, so erhält man

Definition (Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar):
Die Matrix $\mathbf{A}$ sei eine $\mathbf{m}\times\mathbf{n}$ **Matrix**, und $\lambda \in \mathbf{C}$. Dann ist das λ-fache Vielfache der Matrix $\mathbf{A}$ definiert als

$$\lambda\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{mit } \lambda \in \mathbf{C} \; . \tag{16.15}$$

Das λ-fache Vielfache einer Matrix $\mathbf{A}$ ist also eine Matrix $\lambda\mathbf{A}$, deren Elemente das λ-fache Vielfache der betreffenden Elemente a_{ij} der Ausgangsmatrix sind,

$$(\lambda\mathbf{A})_{ij} = \lambda \cdot a_{ij} \; . \tag{16.16}$$

BEMERKUNG: Im Folgenden wird λ meist eine reelle Zahl sein, doch werden wir von Zeit zu Zeit auch die Multiplikation einer Matrix mit einer komplexen Zahl betrachten.

Falls die Matrix nur eine Zeile hat, also ein Zeilenvektor ist, reduziert sich (16.15) auf die bekannte Multiplikation eines Vektors $\vec{x}$ mit einem Skalar λ,

$$\lambda(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) \; . \tag{16.17}$$

Entsprechendes gilt für die Multiplikation eines Spaltenvektors mit λ.

16.2.3 Multiplikation eines Vektors mit einer Matrix

Wie multipliziert man eine Matrix mit einer anderen Matrix? Was soll man sich überhaupt unter der Multiplikation zweier Matrizen vorstellen?

Zur Beantwortung dieser Frage betrachten wir in einem ersten Schritt die Multiplikation eines m-dimensionalen Spaltenvektors $(x_1, x_2, \dots, x_m)^T$ mit einer $n \times m$-Matrix $\mathbf{A}$ und legen fest:

Definition (Multiplikation eines Vektors mit einer Matrix):
Der m-dimensionale Spaltenvektor $(x_1, x_2, \dots, x_m)^T$ und die $n \times m$-Matrix $\mathbf{A}$ seien vorgegeben. Dann ist ihr Produkt $\mathbf{A}\vec{x}$ ein n-dimensionaler Spaltenvektor $\vec{y}$,

$$\vec{y} = \mathbf{A}\vec{x} \; , \tag{16.18}$$

der komponentenweise wie folgt definiert ist:

$$y_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j \quad \text{für alle } 1 \le i \le n \; . \tag{16.19}$$

BEMERKUNG: Für $n \neq m$ unterscheiden sich $\vec{x}$ und $\vec{y}$ in ihrer Dimension. Ist die Matrix $\mathbf{A}$ beispielsweise eine 3×2-Matrix, kann man mit ihr einen 2-dimensionalen Vektor multiplizieren und erhält dabei einen 3-dimensionalen Vektor.

Schreibt man die Summen in (16.19) aus, erhält man

$$\begin{array}{ccccccccc} y_1 & = & a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1m}x_m \\ y_2 & = & a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2m}x_m \\ \vdots & = & \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ y_n & = & a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & a_{nm}x_m \end{array} \tag{16.20}$$

Daraus folgt:

Notiz:
Mit Hilfe der Definitionen (16.18) und (16.19) kann das lineare Gleichungssystem (15.10) kompakt als $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$ geschrieben werden.

BEMERKUNG: Für Interessierte: Falls eine zur Matrix $\mathbf{A}$ inverse Matrix $\mathbf{B}$ gefunden werden kann, das heißt eine Matrix $\mathbf{B}$, für die $\mathbf{BA} = \mathbf{E}$ gilt, dann ist die Lösung des Gleichungssystems $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$ durch $\vec{x} = \mathbf{B}\vec{b}$ gegeben. Damit wäre also die Lösung eines Systems linearer Gleichungen auf einen Schlag erreicht! Im Moment wissen wir allerdings noch nicht, wie man Matrizen miteinander multipliziert, geschweige denn, wie man die zu einer Matrix $\mathbf{A}$ inverse Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ bestimmt. In Kapitel 17 werden wir auf diesen Punkt zurückkommen.

16.2.4 Ein Spezialfall: Das Skalarprodukt zweier Vektoren

Als Beispiel betrachten wir nun die Multiplikation zweier reellwertiger Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$. In der Schule haben Sie diese Operation schon als **Skalarprodukt** $< \vec{x}, \vec{y} >$ kennengelernt. Dies kann man im Rahmen der Matrizenrechnung als Produkt eines Zeilenvektors $\vec{x}^T$ mit einem Spaltenvektor $\vec{y}$ interpretieren,

$$< \vec{x}, \vec{y} > = \sum_{j=1}^{m} x_j y_j \;=\; (x_1, x_2, \dots, x_m) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \vec{x}^T \vec{y} \tag{16.21}$$

BEMERKUNG: Um das Skalarprodukt überhaupt bilden zu können, müssen die Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$ die gleiche Dimension haben.

Das Skalarprodukt ist nach Definition kommutativ,

$$< \vec{x}, \vec{y} >=< \vec{y}, \vec{x} > \,, \tag{16.22}$$

und kann dazu verwendet werden, die **Euklidische Norm** $|\vec{x}|$ eines Vektors $\vec{x}$ (das heißt: seine Länge) festzulegen,

$$|\vec{x}| = (< \vec{x}, \vec{x} >)^{1/2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{m} x_j^2} \,. \tag{16.23}$$

Falls $\vec{y}$ ein positives Vielfaches von $\vec{x}$ ist, $y_i = \lambda x_i$ mit $\lambda > 0$, so führt (16.23) auf $|\vec{y}| = \lambda|\vec{x}|$ und (16.21) auf $< \vec{x}, \vec{y} >= |\vec{x}||\vec{y}| = \lambda|\vec{x}|^2$.

Für allgemeine Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$ gilt $y_i = \lambda x_i$ nicht, und damit auch nicht $< \vec{x}, \vec{y} >= |\vec{x}||\vec{y}|$, jedoch immer die Ungleichung $-|\vec{x}||\vec{y}| \leq < \vec{x}, \vec{y} > \leq |\vec{x}||\vec{y}|$ (Cauchy-Schwarz Ungleichung).

Man kann weiterhin zeigen, dass in zwei Dimensionen für den von beiden Vektoren eingeschlossenen Winkel α gilt:

$$< \vec{x}, \vec{y} > = |\vec{x}||\vec{y}| \cos(\alpha) \ . \tag{16.24}$$

In höheren Dimensionen wird die Beziehung (16.24) dazu benutzt, den Winkel zwischen zwei Vektoren zu definieren:

Definition (Winkel zwischen zwei Vektoren):
Der Winkel α zwischen zwei Vektoren $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{R}^n$ ist definiert als

$$\alpha = \arccos\left(\frac{< \vec{x}, \vec{y} >}{|\vec{x}||\vec{y}|}\right) \ . \tag{16.25}$$

BEMERKUNG: Bedenkt man, dass zwei Vektoren auch in höherdimensionalen Räumen eine Ebene aufspannen, kann man die obige Definition auf die im zweidimensionalen Fall zurückführen.

Aus dieser Definition folgt auch in höheren Dimensionen:

Satz und Definition (Orthogonalität):
Zwei Vektoren stehen genau dann senkrecht aufeinander, wenn ihr Skalarprodukt verschwindet. Sie werden dann auch **orthogonal** genannt.

BEISPIEL:

Die Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$ im dreidimensionalen Raum seien als $\vec{x} = (2, 1, 3)$ und $\vec{y} = (1, 2, 0)$ gegeben. Dann hat $\vec{x}$ die Länge $|\vec{x}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{14}$ und $\vec{y}$ die Länge $|\vec{y}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{5}$. Für ihr Skalarprodukt gilt $< \vec{x}, \vec{y} >= 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 3 \cdot 0 = 4$. Daraus ergibt sich für den Winkel α zwischen $\vec{x}$ und $\vec{y}$: $\alpha = \arccos(4/\sqrt{14 \cdot 5}) \approx 61.4^0$.

BEMERKUNG: Die Definition (16.21) bezog sich auf reellwertige Vektoren. Will man das Skalarprodukt — und insbesondere das Konzept Norm — auf Vektoren $\vec{y}$ und $\vec{x}$ mit komplexwertigen Komponenten $y_i, x_i \in \mathbf{C}$ übertragen, so verallgemeinert man (16.21) zu

$$< \vec{x}, \vec{y} > = \sum_{j=1}^{m} \bar{x}_j y_j \ = \overline{< \vec{y}, \vec{x} >} \ , \tag{16.26}$$

wobei $\bar{z}$ die zu z komplex konjugierte Zahl bezeichnet. Aus (16.26) folgt, dass das Skalarprodukt nun *nicht mehr* symmetrisch ist. Weiter folgt aus (16.26) für die Norm eines komplexwertigen Vektors $\vec{x}$:

$$|\vec{x}| = (< \vec{x}, \vec{x} >)^{1/2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{m} \bar{x}_j x_j} = \sqrt{\sum_{j=1}^{m} |x_j|^2} \ . \tag{16.27}$$

BEISPIELE:

Für $m = 1$ ist $\vec{x}$ eine 'gewöhnliche' komplexe Zahl $\vec{x} = a + \mathrm{i}b \in \mathbf{C}^1 = \mathbf{C}$. Nach (16.27) gilt für ihre Norm $|\vec{x}| = \sqrt{(a - \mathrm{i}b)(a + \mathrm{i}b)} = \sqrt{a^2 + b^2}$. Diese Norm ist identisch mit dem in Kapitel 11.4 eingeführten Betrag einer komplexen Zahl.

Wir wollen noch ein konkretes Zahlenbeispiel betrachten, $\vec{x} = (\mathrm{i}, 1 - \mathrm{i})$. Hier gilt: $|\vec{x}| = \sqrt{|\mathrm{i}|^2 + |1 - \mathrm{i}|^2} = \sqrt{(-\mathrm{i})(\mathrm{i}) + (1 + \mathrm{i})(1 - \mathrm{i})} = \sqrt{1 + 2} = \sqrt{3}$

16.2.5 Geometrische Interpretation der Multiplikation eines Vektors mit einer Matrix

Zweidimensionale Systeme:

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{aligned} \tag{16.28}$$

In Kapitel 15 hatten wir derartige Systeme zweier linearer Gleichungen mit vorgegebenem $\vec{y}$ — dort mit $\vec{b}$ bezeichnet — betrachtet und uns die Frage gestellt, welche $\vec{x}$ die Gleichungen lösen.

Nun wollen wir eine andere Betrachtung anstellen: $\vec{x}$ und $\vec{y}$ können als Vektoren im zweidimensionalen Raum aufgefaßt werden — sie weisen vom Ursprung zum Punkt (x_1, x_2) beziehungsweise (y_1, y_2). Gleichung (16.28) beschreibt dann eine (lineare) geometrische Operation, die jedem vorgegebenem $\vec{x}$ ein bestimmtes $\vec{y}$ zuordnet.

Welche speziellen Operationen kann $\mathbf{A}$ beschreiben?

Beginnen wir mit der einfachsten Operation, der skalaren Multiplikation von $\vec{x}$ mit einem reellen Faktor λ,

$$\vec{y} = \lambda\vec{x} \qquad \text{das heißt} \qquad y_i = \lambda x_i \;\text{ für }\; i = 1, 2\ . \tag{16.29}$$

Jede Komponente x_i von $\vec{x}$ wird also um den Faktor λ vergrößert oder verkleinert — geometrisch bedeutet dies eine **Streckung** von $\vec{x}$ um den Faktor λ.

Wir können diese Operation mit (16.28) beschreiben, indem wir $\mathbf{A} = \lambda\mathbf{E}_2$ setzen,

$$\vec{y} = \lambda\mathbf{E}_2\ \vec{x} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \vec{x}\ . \tag{16.30}$$

Im Spezialfall $\lambda = 1$ bleibt der Vektor unverändert, $\vec{y} = \vec{x}$. Für $\lambda > 1$ erhalten wir eine Streckung, für $0 < \lambda < 1$ eine Stauchung. Der Fall $\lambda < 0$ entspricht einer Spiegelung des Vektors am Ursprung, wobei er sich für $|\lambda| < 1$ verkürzt, und für $|\lambda| > 1$ verlängert. Berechnet man nach (16.25) den von $\vec{x}$ und $\lambda\vec{x}$ eingeschlossenen Winkel, erhält man $\alpha = 0$ für $\lambda > 0$ und $\alpha = \pi$ für $\lambda < 0$. (Zur Übung sehr empfohlen!)

Neben den bisher betrachteten Operationen kann man einen Vektor auch um einen vorgegebenen Winkel um den Ursprung drehen. Durch welchen Typus von Matrix wird eine solche **Drehung** repräsentiert?

Bei gegebenem Drehwinkel γ erhält man aus den Additionstheoremen für Sinus und Cosinus (siehe auch Abbildung 10.7 in Kapitel 10.2.5):

$$y_1 = \cos(\gamma)x_1 - \sin(\gamma)x_2\ , \tag{16.31}$$

$$y_2 = \sin(\gamma)x_1 + \cos(\gamma)x_2\ . \tag{16.32}$$

Damit erhält man für die Drehmatrix $\mathbf{D}(\gamma)$ in Abhängigkeit vom Drehwinkel γ

$$\mathbf{D}(\gamma) = \begin{pmatrix} \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) \\ \sin(\gamma) & \cos(\gamma) \end{pmatrix}\ . \tag{16.33}$$

SELBSTTEST: Zeigen Sie, dass ein gedrehter Vektor $\vec{y} = \mathbf{D}(\gamma)\vec{x}$ die gleiche Länge wie der Ausgangsvektor $\vec{x}$ hat.

SELBSTTEST: Vergleich einer Drehung in zwei Dimensionen mit der Multiplikation zweier komplexer Zahlen: z_1 und z_2 seien zwei komplexe Zahlen. Multipliziert man diese beiden Zahlen, so erhält man eine dritte komplexe Zahl $z_3 = z_2 z_1$, deren Real- und Imaginärteil nach Kapitel 11.5 aus den Real- und Imaginärteilen von z_1 und z_2 berechnet werden kann. Nun wollen wir z_1 und z_3 als Vektoren in der Gaußschen Zahlenebene auffassen, $z_1 = (x_1, y_1)$ und $z_3 = (x_3, y_3)$. Versuchen Sie, die vier Komponenten einer 2×2-Matrix $\mathbf{A}$ so zu bestimmen, dass $z_3 = \mathbf{A} z_1$ gilt. Wie hängen die Komponenten A_{ij} mit dem Real- und Imaginärteil von z_2 zusammen?

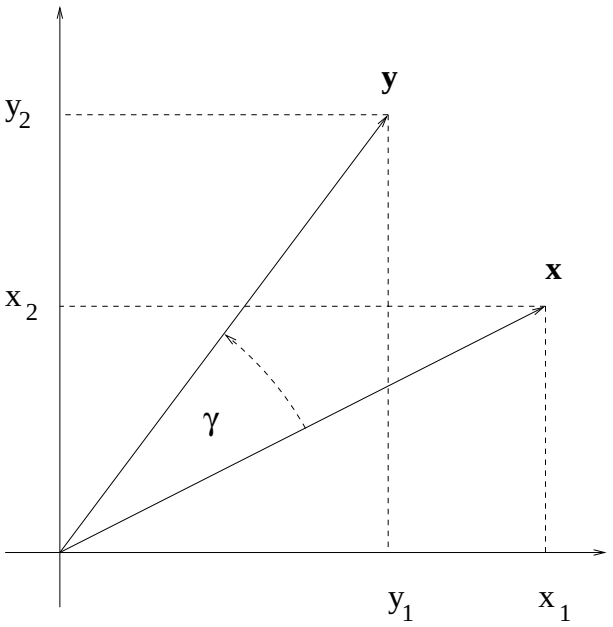


Abbildung 16.1: Drehung eines Vektors

Was geschieht schließlich, wenn man die beiden Komponenten von $\vec{x}$ mit zwei unterschiedlichen Faktoren $\mu \neq \nu$ multipliziert? Diese Situation entspricht der Gleichung

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \nu \end{pmatrix} \vec{x} \tag{16.34}$$

mit $\mu \neq \nu$. Da jede Komponente mit einem unterschiedlichen Faktor multipliziert wird, kann $\vec{y}$ nicht mehr parallel zu $\vec{x}$ liegen. Dies verifiziert man leicht, indem man wiederum den von $\vec{x}$ und $\vec{y}$ eingeschlossenen Winkel mit (16.25) berechnet. Weiterhin werden für allgemeine Werte von μ und ν die Normen $|\vec{y}|$ und $|\vec{x}|$ nicht übereinstimmen. Wie interpretieren Sie diese Operation geometrisch?

Dreidimensionale Systeme:

Wir verallgemeinern (16.28) von zwei auf drei Dimensionen und erhalten

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ y_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{aligned} \tag{16.35}$$

Die Größen $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ und $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$ können nun als Vektoren im dreidimensionalen Raum $\mathbf{R}^3$ interpretiert werden.

Wie in zwei Dimensionen beschreibt $\mathbf{A} = \lambda \mathbf{E}_3$ eine Streckung mit Streckfaktor λ.

Durch welchen Typus von Matrix werden nun Drehungen repräsentiert? Um diese Frage zu vereinfachen, betrachten wir zunächst Drehungen um die Hochachse, so dass $y_3 = x_3$ gilt.

Die gesamte Drehung spielt sich also in der zur Hochachse senkrechten Ebene ab. Damit hängen y_1 und y_2 in gleicher Weise von x_1 und x_2 ab wie im zweidimensionalen Fall.

Setzt man dies zusammen mit der Bedingung $y_3 = x_3$ in (16.35) ein, so erhält man für $\mathbf{D}_3$, die **Drehmatrix** um die Hochachse in Abhängigkeit vom Drehwinkel γ

$$\mathbf{D}_3(\gamma) = \begin{pmatrix} \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) & 0 \\ \sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \tag{16.36}$$

Entsprechend ergibt sich für die Drehmatrizen um die beiden anderen Koordinatenachsen:

$$\mathbf{D}_1(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \tag{16.37}$$

und

$$\mathbf{D}_2(\beta) = \begin{pmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{pmatrix} . \tag{16.38}$$

Da eine Drehung eines Vektors um den Winkel Null den Vektor nicht verändert, muss gelten:

$$\mathbf{D}_1(0) = \mathbf{D}_2(0) = \mathbf{D}_3(0) = \mathbf{E} . \tag{16.39}$$

Drehmatrizen weisen diese Eigenschaft auf, wie (16.36) bis (16.38) zeigen.

16.2.6 Multiplikation zweier Matrizen

Die Multiplikation einer $m \times l$ Matrix $\mathbf{A}$ mit einem l-dimensionalen Vektor $\vec{x}$ ergibt einen m-dimensionalen Vektor $\vec{y} = \mathbf{A}\vec{x}$. Multipliziert man eine $n \times m$ Matrix $\mathbf{B}$ mit diesem Vektor, so ergibt sich ein n-dimensionaler Vektor $\vec{z} = \mathbf{B}\vec{y}$:

$$y_j = \sum_{i=1}^{l} a_{ji} x_i \qquad \text{für alle } 1 \leq j \leq m \tag{16.40}$$

$$z_k = \sum_{j=1}^{m} b_{kj} y_j \qquad \text{für alle } 1 \leq k \leq n \tag{16.41}$$

Der gesamte Vorgang kann jedoch auch als *eine einzige Operation* aufgefasst werden, die den Vektor $\vec{x}$ direkt mit Hilfe einer neuen $n \times l$ Matrix $\mathbf{C}$ auf den Vektor $\vec{z}$ abbildet,

$$z_k = \sum_{i=1}^{l} c_{ki} x_i \qquad \text{für alle } 1 \leq k \leq n . \tag{16.42}$$

Wie berechnet sich die Matrix $\mathbf{C}$ aus $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$?

Setzt man (16.40) in (16.41) ein, so erhält man nach Vertauschung der Summationen:

$$z_k = \sum_{j=1}^{m} b_{kj} \sum_{i=1}^{l} a_{ji} x_i = \sum_{i=1}^{l} [\sum_{j=1}^{m} b_{kj} a_{ji}] x_i \qquad \text{für alle } 1 \le k \le n \ . \tag{16.43}$$

Soll (16.43) mit (16.42) für beliebige Vektoren $\vec{x}$ übereinstimmen, folgt

$$c_{ki} = \sum_{j=1}^{m} b_{kj} a_{ji} \qquad \text{für alle } 1 \le i \le l \quad \text{und} \quad 1 \le k \le n \ . \tag{16.44}$$

Gleichung (16.44) definiert die Multiplikation zweier Matrizen **A** und **B**:

Definition (Produkt zweier Matrizen):
Die Matrix **A** sei eine $m \times l$-Matrix, die Matrix B eine $n \times m$-Matrix. Das Produkt beider Matrizen,

$$\mathbf{C} = \mathbf{BA} \ , \tag{16.45}$$

ist komponentenweise definiert als

$$c_{ki} = \sum_{j=1}^{m} b_{kj} a_{ji} \qquad \text{für alle } 1 \le i \le l \quad \text{und} \quad 1 \le k \le n \ . \tag{16.46}$$

Diese Definition verallgemeinert (16.18) und (16.19), die nun als ein Spezialfall interpretiert werden können, in dem die Matrix **A** in (16.45) ein Spaltenvektor ist.

BEISPIEL:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Dies kann man sich mit dem folgenden Schema verdeutlichen:

$i =$				1	2	3
				2	**0**	1
				1	**0**	1
				1	**1**	0
$k = 1$	**1**	**0**	**1**	3	**1**	1
$k = 2$	2	1	0	5	0	3

Nach (16.44) erhält man das Element c_{ki} der Produktmatrix **C=BA**, indem man im obigen Schema die links von der Stelle (k, i) stehende **Zeile der Matrix B** mit der oberhalb der gleichen Stelle stehende **Spalte der Matrix A** multipliziert. Im Schema ist dies für $(k, i) = (1, 2)$ fett gedruckt.

Eine (sehr) kurze Merkregel lautet deshalb: "**Zeile mal Spalte**" — das Element C_{12} ist das Produkt der 1. Zeile von **B** und der 2. Spalte von **A**.

BEISPIEL: **Nahrungskette in einem Ökosystem**

Wir betrachten eine Nahrungskette aus drei Gliedern:

1. Glied: 2 Pflanzenarten: P_1, P_2
2. Glied: 3 Pflanzenfresser: T_1, T_2, T_3
3. Glied: 2 Fleischfresser: F_1, F_2

Aus experimentellen Daten kann man nun zwei Matrizen zur Beschreibung der Nahrungskette gewinnen: Die Elemente a_{ji} der Matrix $\mathbf{A}$ geben an, welche Menge von Pflanzen der Art P_i von jedem Pflanzenfresser der Art T_j pro Zeiteinheit (z.B. pro Woche) gefressen wird. Die Elemente b_{kj} der Matrix $\mathbf{B}$ geben an, wieviele Tiere der Art T_j von jedem Fleischfresser der Art F_k gefressen werden.

Stellt man sich nun die Frage, welche Menge der Pflanzenart P_i jeder Fleischfresser der Art F_k indirekt über die Tierarten T_1, T_2 und T_3 frißt, erhält man das Ergebnis durch Multiplikation der k-ten Zeile von $\mathbf{B}$ mit der i-ten Zeile von $\mathbf{A}$. Dies ist nach (16.44) genau das Element c_{ki} der Matrix $\mathbf{C} = \mathbf{BA}$.

BEMERKUNG: Gleichung (16.44) zeigt, dass zwei Matrizen nur dann multipliziert werden können, wenn die Zahl der Zeilen der ersten Matrix (hier: $\mathbf{A}$) mit der Zahl der Spalten der zweiten Matrix (hier: $\mathbf{B}$) übereinstimmt!

Einige extrem wichtige Bemerkungen:
Sei B eine $n \times m$-Matrix und A eine $m \times l$ Matrix, dann ist nach der letzten Bemerkung das Produkt BA definiert. Weiterhin ist die Matrix BA eine $n \times l$-Matrix.
Das Produkt AB ist jedoch nur dann definiert, wenn zusätzlich $n = l$ gilt! Die Matrix AB ist in diesem Fall eine $m \times m$ Matrix, die Matrix BA eine $n \times n$ Matrix. Für $l = n \neq m$ gilt daher mit Sicherheit $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$. Doch selbst für $l = n = m$ ist im Allgemeinen $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$.

Das Produkt zweier Matrizen ist also im Gegensatz zum Produkt reeller oder komplexer Zahlen nicht kommutativ! Falls $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$ sagt man auch: die Matrizen A und B vertauschen nicht.
Beachten Sie weiterhin, dass aus der Gleichung $\mathbf{BA} = \mathbf{0}$ nicht folgt, dass $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ oder $\mathbf{B} = \mathbf{0}$. Damit folgt aus $\mathbf{AC} = \mathbf{AD}$ auch nicht, dass $\mathbf{C} = \mathbf{D}$.

BEISPIEL:

Zwei Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ seien gegeben als

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ . \tag{16.47}$$

Dann gilt

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \ , \tag{16.48}$$

aber

$$\mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{B} \ . \tag{16.49}$$

Selbst die beiden einfachen Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ vertauschen also nicht!

Im obigen Beispiel gilt weiterhin:

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{AA} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{A} \tag{16.50}$$

Das Quadrat von $\mathbf{A}$ ist also identisch mit $\mathbf{A}$. Trotzdem darf daraus nicht $\mathbf{A} = \mathbf{E}$ gefolgert werden!

Schließlich erhält man noch:

$$\mathbf{B}^2 = \mathbf{BB} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \tag{16.51}$$

Obwohl die Matrix $\mathbf{B}$ von der Nullmatrix verschieden ist, verschwindet dennoch ihr Quadrat!

BEMERKUNG: Für Interessierte: Matrizen und Quantenmechanik: In Heisenbergs Interpretation der Quantenmechanik wird der Zustand eines Systems durch einen Vektor $\vec{\psi}$, eine physikalische Messung durch eine Matrix $\mathbf{M}$ dargestellt. Führt man am System eine Messung durch, entspricht dies der Multiplikation des Vektors $\vec{\psi}$ mit der dieser Messung entsprechenden Matrix $\mathbf{M}$. Dadurch geht der Zustand des Systems von $\vec{\psi}$ nach $\mathbf{M}\vec{\psi}$ über. Führt man hintereinander zwei durch die Matrizen $\mathbf{M}$ und $\mathbf{N}$ repräsentierte Messungen aus, entspricht dies je nach der Reihenfolge $\vec{\psi} \to \mathbf{NM}\vec{\psi}$ oder $\vec{\psi} \to \mathbf{MN}\vec{\psi}$. Die beiden Matrizen $\mathbf{M}$ und $\mathbf{N}$ vertauschen im Allgemeinen nicht. Deshalb hängt das Meßergebnis von der Reihenfolge der Messungen ab. Dies ist der Kern der **Heisenbergschen Unschärferelation**.

Es kommt jedoch auch vor, dass Matrizenmultiplikationen einfache Ergebnisse liefern. Betrachten wir beispielsweise zwei aufeinander folgende Drehungen um die x_1-Achse, wobei die erste den Winkel α_1 habe, die zweite den Winkel α_2. Dann führt (16.37) auf

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_1(\alpha_2)\mathbf{D}_1(\alpha_1) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha_2) & -\sin(\alpha_2) \\ 0 & \sin(\alpha_2) & \cos(\alpha_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha_1) & -\sin(\alpha_1) \\ 0 & \sin(\alpha_1) & \cos(\alpha_1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha_2+\alpha_1) & -\sin(\alpha_2+\alpha_1) \\ 0 & \sin(\alpha_2+\alpha_1) & \cos(\alpha_2+\alpha_1) \end{pmatrix} = \mathbf{D}_1(\alpha_2+\alpha_1)\,, \end{aligned}$$

wobei im Schritt nach der Matrixmultiplikation die Additionstheoreme für Sinus und Cosinus angewandt wurden.

Zwei Drehungen um die gleiche Raumachse entsprechen also genau einer Drehung um den Summenwinkel. Zwei Drehmatrizen mit der gleichen Drehachse vertauschen also: $\mathbf{D}_1(\alpha_2)\mathbf{D}_1(\alpha_1) = \mathbf{D}_1(\alpha_2+\alpha_1) = \mathbf{D}_1(\alpha_1+\alpha_2) = \mathbf{D}_1(\alpha_1)\mathbf{D}_1(\alpha_2)$. Dies ist auch intuitiv klar, da es keinen Unterschied macht, einen Körper zuerst um den Winkel α_1 und anschließend um den Winkel α_2 zu drehen, oder zuerst um den Winkel α_2 und dann um den Winkel α_1 — allerdings nur, wenn die Drehung um die gleiche Achse ausgeführt wird. Im allgemeinen vertauschen zwei Drehmatrizen jedoch *nicht*, wie Sie durch Nachrechnen direkt verifizieren können.

16.2.7 Rechenregeln der Matrizenmultiplikation

Assoziativität:
Aus der Definition (16.44) des Produktes zweier Matrizen folgt:

$$\mathbf{C}(\mathbf{BA}) = (\mathbf{CB})\mathbf{A} \tag{16.52}$$

Damit die einzelnen Matrixprodukte definiert sind, müssen die entsprechenden Spalten- und Zeilenzahlen übereinstimmen. Falls also $\mathbf{B}$ eine $m \times n$-Matrix ist, so muss $\mathbf{A}$ n Zeilen und $\mathbf{C}$ m Spalten besitzen.

Fehlende Kommutativität:
Wie schon erwähnt, ist die Matrixmultiplikation **nicht kommutativ**:

$$\mathbf{BA} \neq \mathbf{AB} \qquad \text{(Keine Kommutativität)} \tag{16.53}$$

Es gilt jedoch

$$(\mathbf{BA})^T = \mathbf{A}^T\mathbf{B}^T \tag{16.54}$$

wie man durch Einsetzen in (16.44) verifiziert.

Wirkung der Einheitsmatrix:
Bezeichnet $\mathbf{E}_k$ die k-reihige Einheitsmatrix, und ist $\mathbf{A}$ eine $m \times n$-Matrix, so gilt

$$\mathbf{E}_m\mathbf{A} = \mathbf{A} = \mathbf{A}E_n \tag{16.55}$$

Wirkung der Nullmatrix:
Bezeichnet $\mathbf{0}_k$ die k-reihige Nullmatrix, und ist $\mathbf{A}$ eine $m \times n$-Matrix, so gilt

$$\mathbf{0}_m\mathbf{A} = \mathbf{0} = \mathbf{A}\mathbf{0}_n \tag{16.56}$$

Distributivität:
Addition und Multiplikation von Matrizen hängen wie folgt zusammen:

$$(\mathbf{C}+\mathbf{B})\mathbf{A} = \mathbf{CA}+\mathbf{BA} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{C}(\mathbf{B}+\mathbf{A}) = \mathbf{CB}+\mathbf{CA} \tag{16.57}$$

Auch hier müssen die jeweiligen Zeilen- und Spaltenzahlen passen. Wenn $\mathbf{A}$ eine $m\times n$-Matrix ist, müssen $\mathbf{C}$ und $\mathbf{B}$ jeweils m Spalten haben und in der Zahl ihrer Reihen übereinstimmen.

BEMERKUNG: Da die Matrixmultiplikation *nicht* kommutativ ist (16.53), darf man bei der Verwendung des Distributivgesetzes die einzelnen Terme *nicht* vertauschen: $\mathbf{CA} + \mathbf{BA} = (\mathbf{C}+\mathbf{B})\mathbf{A} \neq \mathbf{A}(\mathbf{C}+\mathbf{B}) = \mathbf{AC}+\mathbf{AB}$.

Wie kann man schließlich die zu einer Matrix $\mathbf{A}$ inverse Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ bestimmen? Für Drehmatrizen ist dies relativ einfach: Aus (16.52) und (16.39) folgt

$$\mathbf{D}_1(-\alpha)\mathbf{D}_1(\alpha) = \mathbf{D}_1(-\alpha+\alpha) = \mathbf{D}_1(0) = \mathbf{E}\ . \tag{16.58}$$

Damit gilt

$$[\mathbf{D}_1(\alpha)]^{-1} = \mathbf{D}_1(-\alpha)\ . \tag{16.59}$$

Dieses Ergebnis ist auch anschaulich verständlich: Die zu einer Drehmatrix inverse Matrix ist die Matrix, die einer Drehung um den negativen Drehwinkel entspricht.

Um allgemeinere Matrizen zu invertieren, benötigen wir jedoch das Konzept der **Determinante**, das im nächsten Abschnitt behandelt wird.

16.3 Aufgaben

1. (Rechenregeln für Matrizen) Gegeben seien die Matrizen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Berechnen sie (falls definiert):

(a) $\mathbf{A}^T$, $\mathbf{B}^T$, $\mathbf{C}^T$, $\mathbf{D}^T$. Welche der Matrizen sind symmetrisch?

(b) $\mathbf{A} + \mathbf{B}$, $\mathbf{B} - 2\mathbf{A}$, $\mathbf{A} + \mathbf{C}$, $\mathbf{C} + \mathbf{D}$, $3\mathbf{C}^T + \mathbf{D}$.

(c) $\mathbf{AB} - \mathbf{BA}$, $\mathbf{AC}$, $\mathbf{CA}$, $\mathbf{C}^T\mathbf{A}$, $\mathbf{CD}$, $\mathbf{DC}$, $\mathbf{CD} - \mathbf{DC}$.

2. (Matrizen) Eine Matrix $\mathbf{P}$, die die Gleichung $\mathbf{P} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{P}^2$ erfüllt, wird Projektionsmatrix genannt. (Können Sie sich vorstellen, warum man Matrizen mit dieser Eigenschaft so nennt?)

(a) Welche der folgenden Matrizen sind Projektionsmatrizen?

(i) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, (ii) $2\mathbf{A}$, (iii) $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, (iv) $\mathbf{0}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, (v) $\mathbf{E}_n$.

(b) Für welche λ, μ aus $\mathbf{R}$ ist $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ eine Projektionsmatrix?

(c) Für welches a aus $\mathbf{R}$ ist $\begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}$ eine Projektionsmatrix?

(d) Veranschaulichen Sie sich die Wirkung der in (b) und (c) gefundenen Matrizen, indem Sie sie mit dem Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ multiplizieren.

3. (Matrizen) In Kapitel 11 haben Sie gelernt, dass man sich die Multiplikation einer komplexen Zahl mit einer weiteren komplexen Zahl als Drehstreckung veranschaulichen kann (siehe Abbildung 11.2).

Versuchen Sie nun eine Matrix zu finden, die die Multiplikation mit einer komplexen Zahl $z_1 = |z_1| \exp[\mathrm{i} \arg(z_1)]$ in der Gaußschen Zahlenebene beschreibt.

Genauer: Mit welcher Matrix $\mathbf{Z}_1$ müssen Sie die komplexe Zahl $z_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ multiplizieren, um $z_3 = z_1 z_2 = \mathbf{Z}_1 z_2 = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix}$ zu erhalten? Dabei bezeichnen x_i und y_i jeweils den Real- und Imaginärteil der komplexen Zahl z_i.

4. (Matrizen) **Funktionen von Matrizen:** Funktionen, die als Potenzreihe dargestellt werden können ($f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$), lassen sich auch für quadratische Matrizen als Argument definieren, indem man einfach die Matrix anstelle von x in die Potenzreihe einsetzt. (Die Beziehung $x^0 = 1$ verallgemeinert sich zu $\mathbf{A}^0 = \mathbf{E}_n$ für $n \times n$ Matrizen $\mathbf{A}$.)

Gegeben seien die Matrizen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, mit $\lambda_{1,2} \in \mathbf{R}$ und $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & \pi/3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Berechnen Sie $f(\mathbf{A})$, $f(\mathbf{B})$ und $f(\mathbf{C})$ für (i) $f(x) = x^2$ und (ii) $f(x) = x - x^3$.

(b) Berechnen Sie für $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ und $\mathbf{C}$ die Exponentialfunktion, den Sinus und den Cosinus.

(c) Berechnen Sie $\exp \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$.

5. (Matrizen) **Drehungen:** Aus der Vorlesung kennen Sie die Drehmatrizen

$$\mathbf{D}_1(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{D}_2(\beta) = \begin{pmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{pmatrix}$$

für Drehungen um die x_1 beziehungsweise x_2 Achse.

(a) Berechnen Sie $\mathbf{D}_{21}(\beta, \alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{D}_2(\beta) \cdot \mathbf{D}_1(\alpha)$ und $\mathbf{D}_{12}(\alpha, \beta) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{D}_1(\alpha) \cdot \mathbf{D}_2(\beta)$ für $\alpha = \pi$ und $\beta = \pi/2$. Sie bestimmen somit die Matrizen der Abbildungen, die Sie erhalten, wenn Sie zum einen zuerst um die x_1 Achse um den Winkel π und dann um die x_2 Achse um den Winkel $\pi/2$ drehen ($\mathbf{D}_{21}$) und zum anderen wenn Sie die Reihenfolge der Drehungen vertauschen ($\mathbf{D}_{12}$).

(b) Berechnen Sie $\mathbf{D}_{12}(\alpha, \beta)$ und $\mathbf{D}_{21}(\beta, \alpha)$ für $\alpha = \pi/3$ und $\beta = \pi/6$.

(c) Berechnen Sie $\mathbf{D}_{12}(\alpha, \beta)$ und $\mathbf{D}_{21}(\beta, \alpha)$ für beliebige α und β. Für welche α, β sind die beiden Matrizen gleich? Beschränken Sie sich zur Beantwortung der zweiten Frage der Einfachheit halber auf das Interval $\alpha, \beta \in \{0, \pi\}$.

6. (Matrizen) **Skalarprodukt:** Gegeben seien die Vektoren

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \vec{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{z} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{k} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 - i \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Länge aller vier Vektoren.

(b) Welchen Winkel schließen jeweils $\vec{x}$ und $\vec{y}$, $\vec{y}$ und $\vec{z}$ sowie $\vec{x}$ und $\vec{z}$ ein?

(c) Es gilt $< \vec{x}, \vec{y} >= |\vec{x}||\vec{y}| \cos(\theta(\vec{x}, \vec{y}))$. Dabei bezeichnet $\theta(\vec{x}, \vec{y})$ den von $\vec{x}$ und $\vec{y}$ eingeschlossenen Winkel. Es bezeichne weiterhin $\vec{a}_{\vec{b}}$ die Projektion von $\vec{a}$ auf $\vec{b}$ mit der Länge $|\vec{a}_{\vec{b}}| = |\vec{a}| \cos(\alpha)$.
Wie groß ist die Komponente von $\vec{x}$ in Richtung von $\vec{y}$ und in Richtung von $\vec{z}$?

7. (Matrizen) **Adjungierte Matrix**

(a) Einleitendes Beispiel: Berechnen sie für

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \ \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

die Skalarprodukte $< \vec{x}, \mathbf{A}\vec{y} >$, $< \vec{x}, \mathbf{A}^T\vec{y} >$, $< \mathbf{A}\vec{x}, \vec{y} >$, $< \mathbf{A}^T\vec{x}, \vec{y} >$, $< \vec{y}, \mathbf{A}\vec{x} >$, $< \vec{y}, \mathbf{A}^T\vec{x} >$, $< \mathbf{A}\vec{y}, \vec{x} >$ und $< \mathbf{A}^T\vec{y}, \vec{x} >$. Welche dieser Ausdrücke sind jeweils gleich?

Eine $n \times n$ Matrix $\mathbf{A}^\dagger$ heißt zu **A adjungiert**, falls $< \mathbf{A}^\dagger\vec{x}, \vec{y} >=< \vec{x}, \mathbf{A}\vec{y} >$ für alle $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{R}^n$ gilt. Sind die beiden Matrizen gleich, also $\mathbf{A} = \mathbf{A}^\dagger$, so nennt man **A** selbstadjungiert.

(b) Zeigen Sie, dass für reelle **A** gilt: $\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{A}^T$.

(c) Wie erhält man $\mathbf{A}^\dagger$ aus **A**, falls **A** komplexe Komponenten enthält?

Kapitel 17

Determinanten, Cramersche Regel und Eigenwertproblem

Entscheidend für die Existenz einer eindeutigen Lösung eines Systems zweier linearer Gleichungen $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$ in Abschnitt 15.1.2 ist, dass eine bestimmte Kombination der Elemente der Matrix $\mathbf{A}$, *nicht* verschwindet. Dies trifft auch auf Systeme mit drei und mehr linearen Gleichungen zu. Auch hier kann aus den Komponenten einer quadratischen Matrix $\mathbf{A}$ eine Zahl, die *Determinante* gebildet werden, die darüber Auskunft gibt, ob das Gleichungssystem genau eine Lösung hat. Die Determinante ermöglicht es dann auch, die Lösung sehr kompakt zu schreiben.

Die Determinante kann auf mehrere Arten definiert werden. Wir stellen eine allgemeine rekursive Definition vor, aus der man leicht die Determinante einer 2×2- oder einer 3×3-Matrix gewinnt — die für diese Vorlesung wichtigsten Matrizen.

Definition (Laplace-Entwicklung einer Determinante):
Die **Determinante** $\det(\mathbf{A})$ einer $n \times n$-Matrix $\mathbf{A}$ ist für $n = 1$ durch $\mathbf{A}$ selbst gegeben, für $n > 1$ durch

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{ij} \ . \tag{17.1}$$

Hierbei ist der **Kofaktor** C_{ij} als

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} \ , \tag{17.2}$$

definiert. Der **Minor** M_{ij} ist die Determinante derjenigen Untermatrix von $\mathbf{A}$, die man durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte erhält.
Gleichung (17.1) heißt **Entwicklung der Determinante nach der i-ten Zeile**. In gleicher Weise kann man auch eine **Entwicklung der Determinante nach der j-ten Spalte** durchführen und erhält dann

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} C_{ij} \ . \tag{17.3}$$

BEMERKUNG: Der Kofaktor ergibt sich aus dem Minor durch schachbrettartigen Vorzeichenwechsel, wobei die linke obere Ecke einer Matrix den Wert $+1$ hat.

BEMERKUNG: Die Determinante ist nur für *quadratische* Matrizen definiert.

BEMERKUNG: Die Laplace-Entwicklung ist eine rekursive Vorschrift: Die Determinan-

te einer $n \times n$-Matrix wird dadurch berechnet, dass man sie auf Kombinationen der Determinanten ihrer $(n-1) \times (n-1)$-Untermatrizen zurückführt.

Satz:
Der Wert der Determinante $\det(\mathbf{A})$ hängt nicht davon ab, nach welcher Zeile oder nach welcher Spalte die Matrix $\mathbf{A}$ entwickelt wurde. (Ohne Beweis)

BEMERKUNG: Wegen der Äquivalenz aller Reihen- und Spaltenentwicklungen verwende man zur Berechnung von Determinanten großer Matrizen am geschicktesten die Zeile beziehungsweise Spalte, in der die meisten Nullen stehen, da somit möglichst viele Terme in (17.1) und (17.3) wegfallen! Wie im Abschnitt 17.1 eingehend diskutiert wird, ändert sich die Determinante einer Matrix nicht, wenn man zu einer Zeile (oder Spalte) das Vielfache einer anderen Zeile (respektive Spalte) addiert. Kann man unter Ausnutzung dieser Eigenschaft zusätzliche Nullen in einer Zeile beziehungsweise Spalte erzeugen, vereinfacht sich die Determinantenberechnung weiter.

Die Laplace-Entwicklung soll nun an elementaren Beispielen demonstriert werden.

(1) Die Determinante jeder Einheitsmatrix ist 1,

$$\det(\mathbf{E}_n) = 1 \qquad \text{für alle } n \ . \tag{17.4}$$

Entwickelt man nämlich die Determinante nach der ersten Zeile, erhält man $\det(\mathbf{E}_n) = 1 \det(\mathbf{E}_{n-1})$. Wiederholt man diesen Schritt nun für die Determinante der Matrix $\det(\mathbf{E}_{n-1})$, so gilt $\det(\mathbf{E}_{n-1}) = 1 \det(\mathbf{E}_{n-2})$. Etc.

(2) Die Matrix $\mathbf{A}$ sei eine 2×2-Matrix. Dann gilt nach (17.1) und (17.2) mit $i = 1$: $\det(\mathbf{A}) = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} = a_{11} \cdot (-1)^2 M_{11} + a_{12} \cdot (-1)^3 M_{12}$.

Der Minor M_{11} ist die Determinante der Matrix, die man durch Streichen der ersten Zeile und ersten Spalte aus $\mathbf{A}$ erhält, also gerade das Element a_{22}, und in gleicher Weise ist M_{12} die Matrix, die man durch Streichen der ersten Zeile und zweiten Spalte aus $\mathbf{A}$ erhält, also das Element a_{21}. Wir erhalten also:

Notiz (Determinante einer 2×2-Matrix):
Die Determinante einer 2×2-Matrix $\mathbf{A}$ lautet

$$\det(\mathbf{A}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \ . \tag{17.5}$$

(3) Entwickelt man die Matrix $\mathbf{A}$ beispielsweise nach der 2. Spalte, so ergibt (17.3) $\det(\mathbf{A}) = a_{12}C_{12} + a_{22}C_{22} = a_{12} \cdot (-1)^3 M_{12} + a_{22} \cdot (-1)^4 M_{22} = -a_{12}a_{21} + a_{22}a_{11}$, womit sich (17.5) bestätigt.

(4) Nun sei die Matrix $\mathbf{A}$ eine 3×3-Matrix. Wir wollen diese Matrix nach der ersten Zeile entwickeln. Nach (17.1) und (17.2) gilt mit $i = 1$:

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) &= a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} \\ &= a_{11} \cdot (-1)^2 M_{11} + a_{12} \cdot (-1)^3 M_{12} + a_{13} \cdot (-1)^4 M_{13} \end{aligned} \tag{17.6}$$

Wir müssen also die Minoren M_{11}, M_{12} und M_{13} berechnen. M_{11} ist nach Definition die Determinante der aus $\mathbf{A}$ durch Streichen der ersten Zeile und ersten Spalte hervorgehenden 2×2-Matrix, $M_{11} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}$. In gleicher Weise erhalten wir $M_{12} = a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}$ und $M_{13} = a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}$. Es folgt:

Damit gilt für eine 3×3-Matrix A:

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{A}) &= a_{11}\det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{12}\det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{13}\det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}\end{aligned} \tag{17.7}$$

Notiz (Determinante einer 3×3-Matrix):
Die Determinante einer 3×3-Matrix $\mathbf{A}$ lautet

$$\det(\mathbf{A}) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Die einzelnen Terme der Determinante kann man sich mit dem folgenden Schema gut merken:

$$\begin{array}{ccccccccc} \oplus & & \oplus & & \oplus & & & & \\ a_{11} & & a_{12} & & a_{13} & & a_{11} & & a_{12} \\ & \searrow & & \nearrow\!\!\searrow & & \nearrow\!\!\searrow & & \nearrow & \\ a_{21} & & a_{22} & & a_{23} & & a_{21} & & a_{22} \\ & \nearrow & & \nearrow\!\!\searrow & & \nearrow\!\!\searrow & & \searrow & \\ a_{31} & & a_{32} & & a_{33} & & a_{31} & & a_{32} \\ \ominus & & \ominus & & \ominus & & & & \end{array} \tag{17.8}$$

Man multipliziert jeweils drei Komponenten in Richtung der Pfeile, addiert die mit $\oplus$ versehenen Terme und subtrahiert davon die mit $\ominus$ versehenen Terme.
Wichtiger Hinweis: Diese Regel gilt nur für 3×3-Matrizen!

BEISPIEL:

Welchen Wert hat die Determinante der Matrix $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$?

Nach der 1. Zeile von (17.7) erhalten wir:

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = 2\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - 3\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + 4\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 5$$

Nach (17.8) ergibt sich ebenfalls:

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = 2{\cdot}2{\cdot}3 + 3{\cdot}1{\cdot}0 + 4{\cdot}1{\cdot}1 - 0{\cdot}2{\cdot}4 - 1{\cdot}1{\cdot}2 - 3{\cdot}1{\cdot}3 = 12 + 4 - 2 - 9 = 5$$

(5) Aus (17.7) folgt, dass die Determinante einer Drehmatrix (16.36) bis (16.38) unabhängig vom Drehwinkel immer Eins ist,

$$\det[\mathbf{D}_1(\alpha)] = \det[\mathbf{D}_2(\beta)] = \det[\mathbf{D}_3(\gamma)] = 1 \qquad \text{für alle } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}\ . \tag{17.9}$$

BEISPIEL:

$$\det[\mathbf{D}_1(\alpha)] = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} = \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$$

(6) Die einer Streckung um den Faktor λ zugeordnete Matrix $\lambda\mathbf{E}_3$ hat die Determinante λ^3. Für allgemeines n gilt analog:

$$\det(\lambda\mathbf{E}_n) = \det \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^n \ .$$

BEMERKUNG: Ein Volumenelement $\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3$ des dreidimensionalen Raums bleibt unter Drehungen konstant, unter gleichmäßiger Streckung in allen drei Raumrichtungen wächst es mit dem Faktor λ^3 an. Es gilt sogar ganz allgemein: Die Determinante einer Matrix ist ein Maß für die Größenveränderung eines Volumenelements unter der von der betreffenden Matrix repräsentierten geometrischen Operation.

BEMERKUNG: Für $n = 2$ (Gleichung 17.5) und $n = 3$ (Gleichung 17.7) ist die Determinante eine Summe von Produkten mit jeweils n Matrixelementen, wobei in jedem Produkt sowohl die Zeilen- als auch die Spaltenindizes alle Werte von 1 bis n annehmen. Diese Regel gilt für allgemeine n, so dass man eine Determinante statt durch die iterative Definition (17.1) und (17.2) auch explizit als

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{P[\alpha\beta\dots\omega]} \epsilon_{\alpha\beta\dots\omega} a_{1\alpha} a_{2\beta} \dots a_{n\omega} \tag{17.10}$$

definieren kann. Dabei bedeutet $P[\alpha\beta\dots\omega]$ die Menge aller möglichen Permutationen (Vertauschungen) der Reihenfolge der Indizes α, β, ..., ω. Der Faktor $\epsilon_{\alpha\beta\dots\omega}$ ist so definiert, dass er den Wert 1 oder -1 hat, je nachdem, ob es sich um eine gerade Permutation oder eine ungerade Permutation handelt.

SELBSTTEST: Verifizieren Sie Gleichung (17.10) für $n = 2$, 3 und 4!

17.1 Determinanten: Eigenschaften, Rechenregeln

Determinanten weisen einige wichtige Eigenschaften auf, die entweder aus (17.1)-(17.3) oder (17.10) abgeleitet werden können.

Satz (Eigenschaften von Determinanten):
(1) Verschwindet eine Zeile oder eine Spalte einer Matrix $\mathbf{A}$, so ist $\det(\mathbf{A}) = 0$.

(2) Sind zwei Zeilen (oder auch zwei Spalten) einer Matrix $\mathbf{A}$ gleich oder zueinander proportional, so ist $\det(\mathbf{A}) = 0$.

(3) Multipliziert man alle Elemente einer Zeile (oder einer Spalte) mit einer Konstanten k, so ändert sich die Determinante ebenfalls um den Faktor k.
Für eine $n \times n$-Matrix $\mathbf{A}$ folgt daraus:

$$\det(k\mathbf{A}) = k^n \det(\mathbf{A}) \ . \tag{17.11}$$

(4) Vertauscht man zwei Zeilen (oder zwei Spalten), so wechselt das Vorzeichen der Determinante.

(5) Die Determinante einer Matrix ändert sich *nicht*, wenn man alle Zeilen mit den Spalten vertauscht,

$$\det(\mathbf{A}^T) = \det(\mathbf{A}) \ . \tag{17.12}$$

(6) Die Determinante einer Matrix ändert sich *nicht*, wenn man zu einer Zeile (oder Spalte) das Vielfache einer *anderen* Zeile (respektive Spalte) addiert.

(7) Die Determinante einer Diagonalmatrix, einer oberen Dreiecksmatrix oder auch einer unteren Dreiecksmatrix ist durch das Produkt $\prod_{j=1}^{n} a_{jj}$ der Hauptdiagonalelemente gegeben.

Beweis von Eigenschaft (7):
Für Diagonalmatrizen folgt der Satz direkt aus (17.10). Doch auch für Dreiecksmatrizen ist das Produkt der Diagonalelemente der einzige nichtverschwindende Term der Summe (17.10), da alle anderen Terme mindestens einen Faktor Null aufweisen.
Alternativ kann man auch so argumentieren: Führt man die Laplace-Entwicklung einer oberen Dreiecksmatrix $\mathbf{A}$ nach der ersten Spalte durch, so erhält man $\det(\mathbf{A}) = a_{11}C_{11}$, da alle anderen Elemente der ersten Spalte Null sind. Nun entwickelt man den Kofaktor C_{11} nach seiner ersten Spalte und erhält wiederum nur einen Term. Wiederholt man dieses Verfahren, so ergibt sich $\det(\mathbf{A}) = \prod_{j=1}^{n} a_{jj}$. Entsprechend entwickelt man eine untere Dreiecksmatrix nach ihrer ersten Zeile. Diagonalmatrizen sind dann als spezielle Dreiecksmatrizen auch schon erfaßt.

Satz (Multiplikationssatz für Determinanten):
Für zwei $n \times n$-Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ gilt

$$\det(\mathbf{BA}) = \det(\mathbf{B}) \ \det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}) \ \det(\mathbf{B}) = \det(\mathbf{AB}) \ . \tag{17.13}$$

Obwohl also im allgemeinen $\mathbf{BA} \neq \mathbf{AB}$ ist, gilt dennoch $\det(\mathbf{BA}) = \det(\mathbf{AB})$!

17.2 Matrixinversion

Definition (Reguläre und singuläre Matrizen):
Eine Matrix $\mathbf{A}$ heißt **regulär**,wenn ihre Determinante $\det(\mathbf{A})$ von Null verschieden ist, sie heißt **singulär**, wenn die Determinante gleich Null ist:

$$\mathbf{A} \text{ regulär} \Leftrightarrow \det(\mathbf{A}) \neq 0 \qquad \mathbf{A} \text{ singulär} \Leftrightarrow \det(\mathbf{A}) = 0 \tag{17.14}$$

Definition (Inverse Matrix einer regulären Matrix):
Die $n \times n$ Matrix $\mathbf{A}$ sei regulär, $\det(\mathbf{A}) \neq 0$. Dann ist die zu ihr **inverse Matrix** $\mathbf{A}^{-1}$ über

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E}_n \tag{17.15}$$

definiert.

BEMERKUNG: Nach (17.13) gilt $\det(\mathbf{A})\ \det(\mathbf{A}^{-1}) = \det(\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}) = \det(\mathbf{E}_n) = 1$. Da $\det(\mathbf{E}_n) = 1$ kann die inverse Matrix daher nur für reguläre Matrizen definiert werden.

Satz (Berechnung der inversen Matrix):
Die Koeffizienten der zu einer regulären Matrix $\mathbf{A}$ inversen Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ lauten

$$(\mathbf{A}^{-1})_{ij} = \frac{C_{ji}}{\det(\mathbf{A})} \ . \tag{17.16}$$

Dabei sind die C_{ji} die Kofaktoren der Matrix $\mathbf{A}$.
Wichtiger Hinweis: Beachten Sie die Vertauschung der Indizes i und j!

Kompakt kann (17.16) auch wie folgt geschrieben werden:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\mathbf{C}^T}{\det(\mathbf{A})} \tag{17.17}$$

wobei die Matrix $\mathbf{C}$ die Matrix der Kofaktoren ist. Ihre Transponierte $\mathbf{C}^T$ heißt Adjunkte von $\mathbf{A}$ und wird auch mit $\text{adj}(\mathbf{A})$ bezeichnet.

Beweis von Satz (17.16):
Es ist zu zeigen, dass die Matrix $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}$ die Einheitsmatrix ist. Nach Definition der Matrixmultiplikation (16.44) und (17.16) gilt

$$(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (\mathbf{A}^{-1})_{ik} a_{kj} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \sum_{k=1}^{n} C_{ki} a_{kj} \ . \tag{17.18}$$

Wir betrachten nun die Fälle $i = j$ und $i \neq j$ getrennt.

$i = j$: Hier gilt nach (17.1) $\sum_{k=1}^{n} C_{ki} a_{ki} = \det(\mathbf{A})$. Damit sind alle Diagonalelemente von $(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})$ wie gewünscht gleich Eins.

$i \neq j$: Die Summe $\sum_{k=1}^{n} C_{ki} a_{kj}$ muss verschwinden, da sie die Laplace-Entwicklung einer Matrix darstellt, deren i-te und j-te Spalte gleich sind. Damit sind alle Nichtdiagonalelemente von $(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})$ wie gewünscht gleich Null. □

BEISPIEL:

Die Matrix $\mathbf{A}$ sei

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} . \tag{17.19}$$

Dann ist die Matrix $\mathbf{C}$ der Kofaktoren durch

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \tag{17.20}$$

gegeben und $\det(\mathbf{A}) = -2$. Daraus berechnet sich $\mathbf{A}^{-1}$ nach (17.16) zu

$$\mathbf{A}^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} . \tag{17.21}$$

Zur Probe berechnen wir das Produkt $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}$ und erhalten

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \tag{17.22}$$

17.3 Cramersche Regel

Mit den nun verfügbaren Methoden kann die Lösung eines Gleichungssystems mit n Gleichungen und n Unbekannten wie (16.20)

$$\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$$

direkt angegeben werden. $\mathbf{A}_i$ bezeichne die Matrix, die man erhält, wenn man die i-te Spalte der Matrix $\mathbf{A}$ durch den Spaltenvektor $\vec{b}$ ersetzt:

$$\mathbf{A}_i = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \dots & a_{1,n} \\ a_{21} & \dots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{n-1,1} & \dots & a_{n-1,i-1} & b_{n-1} & a_{n-1,i+1} & \dots & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & \dots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \tag{17.23}$$

Satz (Cramersche Regel):
Es sei $\vec{b} \in \mathbf{C}^n$ und $\mathbf{A}$ eine $n \times n$-Matrix. Die Lösung $\vec{x} \in \mathbf{C}^n$ des Gleichungssystems

$$\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b} \tag{17.24}$$

lautet:

Fall I [$\det(\mathbf{A}) \neq 0$]: Die Lösung ist ein Punkt $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ in $\mathbf{C}^n$ mit den Komponenten

$$x_i = \frac{\det(\mathbf{A}_i)}{\det(\mathbf{A})} \ . \tag{17.25}$$

Wenn (17.24) ein homogenes Gleichungssystem ist (alle $b_i = 0$) gilt $\vec{x} = \vec{0}$.

Fall II [$\det(\mathbf{A}) = 0$]: Hier sind zwei Fälle zu unterscheiden:
(IIa) Mindestens eine der Determinanten $\det(\mathbf{A}_i)$ verschwindet nicht: Die Gleichungen des Systems sind widersprüchlich und erlauben keine Lösung.
(IIb) Alle Determinanten $\det(\mathbf{A}_i)$ verschwinden: Die Lösungsmenge ist eine unendliche Punktmenge (eine Gerade oder Ebene beziehungsweise Hyperebene).

Beweis von Fall I
Da hier $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ ist, existiert die Inverse Matrix $\mathbf{A}^{-1}$, so dass (17.24) nach $\vec{x}$ aufgelöst werden kann, $\vec{x} = \mathbf{A}^{-1}\vec{b}$. Für jede Komponente des Vektors $\vec{x}$ gilt also: $x_i = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{A}^{-1}_{ij} b_j$. Verwendet man nun die in (17.16) angegebene Beziehung $(\mathbf{A}^{-1})_{ij} = \frac{C_{ji}}{\det(\mathbf{A})}$, so folgt: $x_i = \frac{\sum_{j=1}^{n} C_{ji} b_j}{\det(\mathbf{A})} = \frac{\det(\mathbf{A_i})}{\det(\mathbf{A})}$ □

BEMERKUNG: Vergleichen Sie (17.25) mit der in Kapitel 15.2 angegebenen Lösung (15.17) für ein System mit zwei linearen Gleichungen.

BEISPIEL:

Wir betrachten wieder das Beispiel aus Kapitel 15.2. Um die Berechnung der Determinanten zu erleichtern und einfacher handhabbare Zahlen zu erhalten, multiplizieren wir alle Gleichungen mit dem Faktor 10. Damit vertausendfachen sich zwar alle Determinanten, da jedoch in (17.25) nur Quotienten der Determinanten eingehen, ändert sich das Ergebnis nicht. Wir erhalten: $\det(\mathbf{A}) = -40$, $\det(\mathbf{A}_1) = -40$, $\det(\mathbf{A}_2) = -24$ und $\det(\mathbf{A}_3) = -32$ und damit wie in Kapitel 15.2: $x_1 = 1.0$, $x_2 = 0.6$ und $x_3 = 0.8$.

Zusammenhang von Gaußschem Verfahren und Cramerscher Regel

Bei den einzelnen Schritten des Gaußschen Verfahrens ändert sich die Determinante $\det(\mathbf{A})$ der Koeffizientenmatrix nicht. Damit gilt für die am Schluss des Verfahrens erzielte obere Dreiecksmatrix $\tilde{\mathbf{A}}$: $\det(\mathbf{A}) = \det(\tilde{\mathbf{A}}) = \prod_{j=1}^{n} \tilde{a}_{jj}$. Verschwindet also keines der Diagonalelemente der Matrix $\tilde{\mathbf{A}}$, so ist auch $\det(\mathbf{A})$ von Null verschieden. Damit hat das Gleichungssystem nach der Cramerschen Regel eine eindeutige Lösung. Das gleiche Ergebnis hatten wir bei der Diskussion des Gaußschen Verfahrens erhalten.

Gilt umgekehrt $\det(\mathbf{A}) = 0$, gibt es nach der Cramerschen Regel keine oder unendlich viele Lösungen. Auch dieses Ergebnis folgt aus dem Gaußschen Verfahren. Allerdings bietet dieses Verfahren den Vorteil, dass es auch eine Aussage über die Natur der Lösungsschar (Gerade, Ebene, Hyperebene) erlaubt. Dies kann bei der Cramerschen Regel mit Hilfe weiterer und durchaus wichtiger Definitionen (**Rang einer Matrix**) auch erreicht werden, soll aber im Rahmen dieser Vorlesung nicht mehr behandelt werden.

17.4 Eigenwertproblem

Wie wir in Kapitel 16.2.5 gesehen haben, beschreibt die Multiplikation eines Vektors mit einer quadratischen Matrix eine Kombination von Drehung, Streckung und Verzerrung in bestimmten Raumrichtungen. Damit stellt sich die für viele Anwendungen wichtige Frage, ob es zu einer vorgegebenen Matrix $\mathbf{A}$ bestimmte Vektoren $\vec{x}$ gibt, die sich bei der Multiplikation zwar in ihrer Länge ändern, *nicht* aber in ihrer Richtung. Derartige Vektoren wären also — bis auf eine mögliche Längenänderung — invariant unter der Matrixmultiplikation.

Existieren solche Vektoren?

Betrachten wir beispielsweise Drehmatrizen: Hier bleiben bei einer Drehung um eine feste Raumachse alle Vektoren, die auf dieser Achse liegen unverändert. Diese sind also Vektoren mit den gesuchten Eigenschaften! Bei Streckungen bleibt dagegen sogar die Richtung *jedes* Vektors konstant, es ändert sich ja nur seine Länge – um einen konstanten Faktor.

Doch findet man für *jede* Matrix $\mathbf{A}$ immer derartige Vektoren?

Mathematisch formuliert bedeutet diese Frage, ob zu einer vorgegebenen Matrix $\mathbf{A}$ immer Vektoren $\vec{x} \neq 0$ existieren, so dass

$$\mathbf{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}$$

gilt. Im Hinblick auf wichtige Anwendungen soll $\lambda \in \mathbf{C}$ zugelassen sein. Falls jedoch $\lambda \in \mathbf{R}$, entspricht λ genau einer Längenänderung des gesuchten Vektors unter der Wirkung von $\mathbf{A}$.

Dieses Problem führt auf folgende Definition:

Definition (Eigenwert und Eigenvektor):
Gegeben sei eine quadratische Matrix $\mathbf{A}$. $\lambda \in \mathbf{C}$ heißt **Eigenwert** der Matrix $\mathbf{A}$, wenn ein vom Nullvektor verschiedener Vektor $\vec{x} \in \mathbf{C}^n$, $\vec{x} \neq \vec{0}$, existiert, so dass die Gleichung

$$\mathbf{A}\vec{x} = \lambda\vec{x} \tag{17.26}$$

erfüllt ist. $\vec{x}$ heißt der dem Eigenwert λ zugeordnete **Eigenvektor**.

Der Nullvektor $\vec{0}$ erfüllt immer (17.26). Dies ist jedoch ein triviales Ergebnis, das wir deshalb ausgeschlossen haben. Weiterhin ist Gleichung (17.26) eine homogene Gleichung. Falls $\vec{x}$ ein Eigenvektor ist, ist damit auch jeder Vektor $c\vec{x}$ ein Eigenvektor. Um diese triviale Mehrdeutigkeit auszuräumen, werden wir Eigenvektoren immer so normieren, dass $|\vec{x}| = 1$.

Die Frage nach Eigenwerten und Eigenvektoren bezeichnet man auch als das **Eigenwertproblem** für Matrizen. Stellt man (17.26) um, so nimmt es die Form

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\vec{x} = \vec{0} \tag{17.27}$$

an. Wir erhalten also ein homogenes Gleichungssystem für $\vec{x}$. Dieses kann nach der Cramerschen Regel nur dann eine nicht-triviale Lösung $\vec{x}$ besitzen, wenn die Determinante

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0 \tag{17.28}$$

verschwindet.

Ist $\mathbf{A}$ eine $n \times n$-Matrix, so ist die Determinante $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})$ ein Polynom n-ter Ordnung in λ:

Definition (Charakteristisches Polynom):
Das durch die Gleichung (17.28) definierte Polynom n-ter Ordnung in λ wird **charakteristisches Polynom** der Matrix **A** genannt.
Die aus (17.28) folgende Gleichung für λ heißt **Säkulargleichung** oder **Eigenwertgleichung**.

Nachdem das charakteristische Polynom von der Ordnung n ist, hat die Säkulargleichung n Lösungen: $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$. Diese Aussage ist ein Spezialfall des sogenannten Fundamentalsatzes der Algebra: eine Polynom n-ter Ordnung hat genau n (möglicherweise komplexe) Nullstellen. Diese sind die gesuchten Eigenwerte der Matrix **A**. (Bei der Anzahl der Nullstellen ist ihre Vielfachheit zu berücksichtigen. So hat das Polynom $x^2 = 0$ zwar nur eine Nullstelle, aus der Anwendung der Formel für Lösungen quadratischer Gleichungen wird jedoch deutlich, dass es sich dabei 'eigentlich' um zwei Nullstellen $x_{1/2} = 0$ handelt, die zu einer 'verschmolzen' sind. Anderes Beispiel: das Polynom $x^3 = 0$ hat ebenfalls nur eine Nullstelle, diese hat nun die Vielfachheit drei.

Sobald man die Eigenwerte berechnet hat, kann man zu jedem Eigenwert den dazugehörigen Eigenvektor berechnen. Dazu setzt man den betreffenden Eigenwert in die Matrixgleichung ein und löst das homogene Gleichungssystem.

BEISPIELE:

(1) Man bestimme die Eigenwerte und dazugehörigen Eigenvektoren der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \tag{17.29}$$

Aus der Forderung $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0$ folgt $(1-\lambda)(2-\lambda) = 0$, also $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$. Den normierten Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$ erhält man aus (17.27),

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{x} = \vec{0} \qquad \text{zu} \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} . \tag{17.30}$$

In gleicher Weise gilt für den normierten Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_2 = 2$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{x} = \vec{0} \qquad \text{und damit} \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} . \tag{17.31}$$

(2) Man bestimme die Eigenwerte und dazugehörigen Eigenvektoren der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{17.32}$$

Aus der Forderung $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0$ folgt nun $\lambda^2 + 1 = 0$, also $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$. Den normierten Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = i$ erhält man aus (17.27),

$$\begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \vec{x} = \vec{0} \qquad \text{zu} \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} i/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} . \tag{17.33}$$

In gleicher Weise gilt für den normierten Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_2 = -i$

$$\begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \vec{x} = \vec{0} \qquad \text{und damit} \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} -i/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} . \tag{17.34}$$

SELBSTTEST: Zeigen Sie, dass jeder der beiden gefundenen Vektoren wirklich ein Eigenvektor der Matrix $\mathbf{A}$ ist. Multiplizieren Sie dazu den in Gleichung (17.33) gegebenen Vektor $\vec{x}$ mit der Matrix $\mathbf{A}$, $\vec{y} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}$, und vergleichen Sie den Vektor $\vec{y}$ mit $\vec{x}$. Wiederholen Sie die gleiche Rechnung mit dem in Gleichung (17.34) gegebenen Vektor $\vec{x}$.

Beachten Sie, dass nun Eigenwerte und Eigenvektoren komplexwertig sind — und dies obwohl die Elemente der Matrix $\mathbf{A}$ immer noch reelle Zahlen sind! Zur Normierung von $\vec{x}$ in (17.33) und (17.34) mußte deshalb auch die Definition (16.27) der Norm eines *komplexwertigen* Vektors herangezogen werden.

Weiterhin ist zu bemerken, dass $\mathbf{A}$ genau der Drehmatrix $\mathbf{D}(\gamma)$ in (16.33) mit $\gamma = \pi/2$ entspricht. Selbst die geometrisch so anschaulichen Drehmatrizen können also komplexe Eigenwerte und Eigenvektoren besitzen!

Man kann jedoch zeigen, dass reelle symmetrische Matrizen nur reelle Eigenwerte haben und dass ihre Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten senkrecht aufeinander stehen.

17.5 Eigenwerte und Eigenvektoren von reellwertigen, symmetrischen Matrizen

Reellwertige symmetrische Matrizen beliebiger Dimension weisen zwei höchst erstaunliche Eigenschaften auf:

Satz:
Sei $\mathbf{M}$ eine reellwertige und symmetrische $n \times n$ Matrix, das heißt $M_{ij} \in \mathbf{R}$ und $M_{ij} = M_{ji}$. Dann gilt:
(I) Die Eigenwerte von $\mathbf{M}$ sind reelle Zahlen.
(II) Eigenvektoren zu unterschiedlichen Eigenwerten sind orthogonal.

Beweis:
Wir betrachten zwei verschiedene Eigenwerte einer reellwertigen und symmetrischen Matrix $\mathbf{M}$, die wir mit σ und μ bezeichnen. Mindestens einer der beiden Eigenwerte muss dabei von Null verschieden sein. Diesen Eigenwert nennen wir σ.
Die zu σ und μ gehörigen Eigenvektoren seien $\vec{v}$ und $\vec{w}$. Es gilt also

$$\mathbf{M}\vec{v} = \sigma\vec{v} \qquad \text{oder:} \qquad \sum_{j=1}^{n} M_{ij} v_j = \sigma v_i \ , \tag{17.35}$$

das heißt aber auch

$$v_i = \frac{1}{\sigma} \sum_{j=1}^{n} M_{ij} v_j \ , \tag{17.36}$$

und

$$\mathbf{M}\vec{w} = \mu\vec{w} \quad \text{oder:} \quad \sum_{j=1}^{n} M_{ij} w_j = \mu w_i \ . \tag{17.37}$$

Nun zum Beweis von (I): Wenn Gleichung (17.35) erfüllt ist und man jeden Term x durch den zu ihm konjugiert-komplexen Term $\bar{x}$ ersetzt, so muss auch gelten:

$$\sum_{j=1}^{n} \overline{M_{ij}}\ \overline{v_j} = \overline{\sigma}\ \overline{v_i} \ . \tag{17.38}$$

Nach Voraussetzung ist $\mathbf{M}$ symmetrisch und reellwertig. Damit folgt aus (17.38)

$$\sum_{j=1}^{n} M_{ji}\ \overline{v_j} = \overline{\sigma}\ \overline{v_i} \ . \tag{17.39}$$

Wir verwenden nun (17.36) und (17.39) um zu zeigen, dass σ eine reelle Zahl ist. Dazu werten wir das Betragsquadrat von $\vec{v}$ geeignet aus:

$$|\vec{v}|^2 \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} \overline{v_i}\ v_i = \sum_{i=1}^{n} \overline{v_i}\ \frac{1}{\sigma} \sum_{j=1}^{n} M_{ij} v_j = \frac{1}{\sigma} \sum_{i,j=1}^{n} v_j\ M_{ij}\ \overline{v_i}$$

$$= \quad \frac{1}{\sigma}\sum_{j=1}^{n} v_j \sum_{i=1}^{n} M_{ij}\ \overline{v_i} = \frac{1}{\sigma}\sum_{j=1}^{n} v_j\ \overline{\sigma}\ \overline{v_j} = \frac{\overline{\sigma}}{\sigma}|\vec{v}|^2\ .$$

Diese Gleichung kann jedoch nur stimmen, wenn $\overline{\sigma} = \sigma$, das heißt $\sigma \in \mathbf{R}$. □

Nun zum Beweis von (II): Wir betrachten den Ausdruck $\sum_{i,j=1}^{n} \overline{v_i}\ M_{ij} w_j$. Einerseits gilt mit (17.37),

$$\sum_{i,j=1}^{n} \overline{v_i}\ M_{ij} w_j = \sum_{i=1}^{n} \overline{v_i}\mu w_i = \mu \sum_{i=1}^{n} \overline{v_i} w_i = \mu < \vec{v}, \vec{w} > , \tag{17.40}$$

andererseits wegen der Symmetrie von $\mathbf{M}$ und der Reellwertigkeit von $\mathbf{M}$ und σ

$$\sum_{i,j=1}^{n} \overline{v_i}\ M_{ij} w_j = \sum_{i,j=1}^{n} w_j M_{ji} \overline{v_i} = \sum_{j=1}^{n} w_j \sigma \overline{v_j} = \sigma < \vec{v}, \vec{w} > \ . \tag{17.41}$$

Also gilt $\mu < \vec{v}, \vec{w} >= \sigma < \vec{v}, \vec{w} >$. Für $\sigma \neq \mu$ folgt daraus $< \vec{v}, \vec{w} >= 0$. □

Mitunter ist eine solche Art der expliziten Beweisführung wegen der vielen Indizes etwas unübersichtlich, daher kann es vorteilhaft sein, sich der Matrixnotation zu bedienen. Damit kann der Beweis alternativ folgendermaßen geführt werden:

Beweis des Satzes in Matrixnotation:

In Matrixnotation ist das Skalarprodukt durch $< \vec{x}, \vec{y} >= \overline{\vec{x}^T} \cdot \vec{y}$ definiert. Man beachte die komplexe Konjugation des Vektors $\vec{x}$. Daher gilt wegen $(\mathbf{M}\vec{x})^T = \vec{x}^T \mathbf{M}^T$ auch

$$< \mathbf{M}\vec{x}, \vec{y} >= \overline{(\mathbf{M}\vec{x})^T}\vec{y} = \overline{\vec{x}^T}\ \overline{\mathbf{M}^T}\vec{y} =< \vec{x}, \mathbf{M}^T\vec{y} > \ .$$

Die letzte Gleichheit gilt wegen der Assoziativität der Matrixmultiplikation und weil $\mathbf{M}$ reell ist. Wenn nun $\mathbf{M}$ auch noch symmetrisch ist, gilt daher

$$< \mathbf{M}\vec{x}, \vec{y} >=< \vec{x}, \mathbf{M}\vec{y} > \quad \text{falls } \mathbf{M} = \mathbf{M}^T \in \mathbf{R}^{n\times n}\,. \tag{17.42}$$

Nun zum Beweis von (I): Sei $\mathbf{M}\vec{v} = \sigma\vec{v}$. Dann ist einerseits

$$< \vec{v}, \mathbf{M}\vec{v} >=< \vec{v}, \sigma\vec{v} >= \sigma < \vec{v}, \vec{v} >= \sigma|\vec{v}|^2$$

und andererseits

$$< \mathbf{M}\vec{v}, \vec{v} >=< \sigma\vec{v}, \vec{v} >= \overline{\sigma} < \vec{v}, \vec{v} >= \overline{\sigma}|\vec{v}|^2\,.$$

Nach (17.42) gilt aber für reelle symmetrische Matrizen

$$< \vec{v}, \mathbf{M}\vec{v} >=< \mathbf{M}\vec{v}, \vec{v} >$$

und daher

$$\sigma|\vec{v}|^2 = \overline{\sigma}|\vec{v}|^2 \quad \Longleftrightarrow \quad \sigma = \overline{\sigma} \quad \Longleftrightarrow \quad \sigma \in \mathbf{R}\,,$$

weil $|\vec{v}| \neq 0$, da $\vec{v}$ nach Voraussetzung Eigenvektor von $\mathbf{M}$ ist. □

Nun zum Beweis von (II): Sei weiter $\mathbf{M}\vec{w} = \mu\vec{w}$ mit $\mu \neq \sigma$. Dann ist wegen (I)

$$< \mathbf{M}\vec{v}, \vec{w} >=< \sigma\vec{v}, \vec{w} >= \sigma < \vec{v}, \vec{w} >$$

und

$$< \vec{v}, \mathbf{M}\vec{w} >=< \vec{v}, \mu\vec{w} >= \mu < \vec{v}, \vec{w} > \ .$$

Erneut gilt wegen (17.42)

$$< \mathbf{M}\vec{v}, \vec{w} >=< \vec{v}, \mathbf{M}\vec{w} > \quad \Longleftrightarrow \quad \sigma < \vec{v}, \vec{w} >= \mu < \vec{v}, \vec{w} > \quad \Longleftrightarrow \quad (\sigma - \mu) < \vec{v}, \vec{w} >= 0\,.$$

Weil aber nach Voraussetzung $\sigma - \mu \neq 0$ folgt $< \vec{v}, \vec{w} >= 0$. □

Damit ist gezeigt, dass die Eigenvektoren einer reellwertigen, symmetrischen Matrix orthogonal zueinander stehen, zumindest wenn sich die Eigenwerte voneinander unterscheiden. Falls ein Eigenwert mehrfach auftauchen sollte, so kann weiterhin gezeigt werden, dass die zu diesem Eigenwert gehörigen Eigenvektoren ebenfalls orthogonal zueinander gewählt werden können, so dass insgesamt alle Eigenvektoren orthogonal zueinander sind. Damit kann *jeder beliebige Vektor* als einfache Linearkombination der Eigenvektoren geschrieben werden. Für den Fall zweier orthogonaler Vektoren gilt insbesondere:

Satz:
Seien $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbf{R}^2$ zwei beliebige Vektoren mit $|\vec{v}| = |\vec{w}| = 1$ und $< \vec{v}, \vec{w} >= 0$. Dann kann jeder Vektor $\vec{z} \in \mathbf{R}^2$ wie folgt als Linearkombination von $\vec{v}$ und $\vec{w}$ dargestellt werden:

$$\vec{z} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{w} \tag{17.43}$$

mit

$$\alpha =< \vec{z}, \vec{v} > \qquad \text{und} \qquad \beta =< \vec{z}, \vec{w} > \ . \tag{17.44}$$

Beweisidee:
Aus dem Ansatz $\vec{z} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{w}$ folgt:
$< \vec{z}, \vec{v} >=< (\alpha\vec{v} + \beta\vec{w}), \vec{v} >= \alpha < \vec{v}, \vec{v} > +\beta < \vec{w}, \vec{v} >= \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 0 = \alpha;$
$< \vec{z}, \vec{w} >=< (\alpha\vec{v} + \beta\vec{w}), \vec{w} >= \alpha < \vec{v}, \vec{w} > +\beta < \vec{w}, \vec{w} >= \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 1 = \beta.$ □

Im nächsten Kapitel werden wir sehen, wie Eigenwerte und Eigenvektoren für die Diskussion von Funktionen mehrerer Variabler eingesetzt werden können.

17.6 Aufgaben

1. (Determinanten) Gegeben seien die Matrizen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Berechnen sie (falls definiert) die Determinaten der Matrizen $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{A}^T$, $\frac{\mathbf{B}}{4}$, $\mathbf{AB}$, $\mathbf{C}^T\mathbf{D}$, $\mathbf{CD}$, $(\mathbf{DC})^2$.

2. (Determinanten) **Kreuz- und Spatprodukt**

Wie Sie aus der Schule wissen, kann man in drei Dimensionen ein Kreuzprodukt (auch Vektorprodukt oder äußeres Produkt genannt) $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ als Vektor, der senkrecht auf der durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Ebene steht, und dessen Länge $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin(\theta(\vec{a}, \vec{b}))$ die Fläche des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gebildeten Parallelogramms angibt, definieren. Eine Regel, nach der man das Kreuzprodukt berechnen kann, ist

$$\vec{a}\times\vec{b} = \det \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix} \vec{e}_1 - \det \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{pmatrix} \vec{e}_2 + \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \vec{e}_3 \,. \tag{17.45}$$

Dabei bezeichnen die $\vec{e}_i$ die Einheitsvektoren im kartesischen System, d.h.

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie $\vec{x} \times \vec{y}$, $\vec{y} \times \vec{x}$ und $\vec{x} \times \vec{z}$ für die Vektoren $\vec{x}, \vec{y}$ und $\vec{z}$ aus Aufgabe 2.

Durch die Kombination von Vektor- und Skalarprodukt erhält man das sogenannte **Spatprodukt** $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$, welches das Volumen eines durch die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ gebildeten Parallelepipeds angibt. (Ein Parallelepiped ist ein in eine oder mehrere Richtungen schiefer Quader.)

(b) Zeigen Sie, dass man das Spatprodukt wie folgt berechnen kann:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}. \tag{17.46}$$

(c) Berechnen Sie $\vec{x} \cdot (\vec{y} \times \vec{z})$ für die Vektoren $\vec{x}, \vec{y}$ und $\vec{z}$ aus Aufgabe 6 im Kapitel 16.

3. (Determinanten) **Matrixinversion**

Für reguläre Matrizen $\mathbf{A}$ existiert eine inverse Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ und eine Möglichkeit, diese zu berechnen, kennen sie aus der Vorlesung:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}[\mathbf{C}(\mathbf{A})]^T \text{ , d.h. } (\mathbf{A}^{-1})_{ij} = \frac{[\mathbf{C}(\mathbf{A})]_{ji}}{\det(\mathbf{A})} \ . \tag{17.47}$$

Dabei bezeichnet $\mathbf{C}(\mathbf{A})$ die Matrix der Kofaktoren von $\mathbf{A}$. Für deren Komponenten gilt $[\mathbf{C}(\mathbf{A})]_{ij} = (-1)^{i+j}[M(\mathbf{A})]_{ij}$ mit den Minoren $[M(\mathbf{A})]_{ij}$ von $\mathbf{A}$. Der Minor $[M(\mathbf{A})_{ij}]$ bezeichnet die Determinate derjenigen Untermatrix von $\mathbf{A}$, die man durch Streichen der i–ten Zeile und j–ten Spalte aus $\mathbf{A}$ erhält.

(a) Berechnen sie mit Hilfe der Regel (17.47) die inversen Matrizen von $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Berechnen sie zur Probe $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}$, $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{B}$ und $\mathbf{D}\mathbf{D}^{-1}$.

(b) Lösen sie $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{p}$ und $\mathbf{D}\vec{x} = \vec{q}$ für $\vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{q} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4. (Cramersche Regel)

(a) Bestimmen sie den Schnittpunkt der beiden Geraden $g_1 : \ -x_1 + 2x_2 = 2$ und $g_2 : \ x_1 + 2x_2 = 6$.

(b) Lösen sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 3y + 2x &= z + 1 \\ 3x + 2z &= 8 - 5y \\ -1 + 3z &= x - 2y \end{aligned}$$

mit Hilfe der Cramerschen Regel.

5. (Eigenwertproblem) **Eigensysteme**

Gegeben seien die Matrizen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & -4/3 & -4/3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix}$.

(a) Berechnen sie Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ (Normierung nicht vergessen).

(b) Berechnen sie für alle Eigenvektoren $\vec{v}_\lambda$ von $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ das Produkt $\mathbf{A}\vec{v}_\lambda$ bzw. $\mathbf{B}\vec{v}_\lambda$.

6. (Determinanten) **Ähnlichkeitstransformationen**

Berechnen sie die Matrizen $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ und $\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{Q}$ mit $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ für die Matizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ aus Aufgabe 3.

Fällt Ihnen etwas auf?

Bemerkung: Zwei Matrizen $\mathbf{A}$ und $\tilde{\mathbf{A}}$ heißen **ähnlich**, falls eine Matrix $\mathbf{P}$ existiert, mit der man $\tilde{\mathbf{A}}$ aus $\mathbf{A}$ via $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ berechnen kann. Anschaulich bedeutet diese Transformation einen Basiswechsel und sie wird als Ähnlichkeitstransformation bezeichnet. Damit sind $\mathbf{A}$ und $\tilde{\mathbf{A}}$ Darstellungen derselben linearen Abbildung – nur bezüglich verschiedener Basen.

7. (Eigenwertproblem) **Eigenwerte und Eigenvektoren reeller symmetrischer Matrizen**

Beweisen sie, dass reelle symmetrische Matrizen nur reelle Eigenwerte haben können und dass ihre Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal zueinander sind.

Kapitel 18

Funktionen mehrerer Variabler

18.1 Einführung

Funktionen stellen Beziehungen zwischen Variablen dar, zum Beispiel physikalischen oder chemischen Messgrößen. Im einfachsten Fall handelt es sich dabei um die Beziehung *einer* abhängigen Variablen von *einer* unabhängigen Variablen. Oft wird eine Messgröße jedoch von *mehreren* unabhängigen Variablen bestimmt, wie die nachfolgenden Beispiele verdeutlichen:

18.1.1 Beispiele für Funktionen mehrerer Variabler

(I) Das Volumen V eines Quaders mit den Seitenlängen x, y und z ist

$$V(x, y, z) = x \cdot y \cdot z \ . \tag{18.1}$$

Das Volumen ist also eine Funktion der drei unabhängigen Variablen x, y und z:

$$V : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R} \ , \ (x, y, z) \mapsto V(x, y, z) = x \cdot y \cdot z \ . \tag{18.2}$$

(II) Die Punkte (x, y, z) der Oberfläche einer Kugel mit Radius R, deren Mittelpunkt am Ort $(0, 0, 0)$ liegt, sind durch

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \tag{18.3}$$

gegeben. Betrachtet man die obere Hälfte der Kugel ($z \geq 0$), so kann man die Gleichung nach z auflösen und erhält

$$z = +\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \tag{18.4}$$

wobei die Bedingung $x^2 + y^2 \leq R^2$ erfüllt sein muss, damit z reell ist. Die z-Komponente ist also eine Funktion von x *und* y. Im Gegensatz zu den Variablen x und y ist R eine für jede Kugel *feste* Größe oder **Parameter**.

(III) Eine lineare Gleichung wie

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \tag{18.5}$$

kann als eine Gleichung für x_1 in Abhängigkeit von $x_2 \ldots x_n$

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - \ldots - a_{1n}x_n) \tag{18.6}$$

aufgefasst werden. Damit kann x_1 als Funktion der $n - 1$ anderen Variablen $x_2, \ldots, x_n$ interpretiert werden: $x_1 = f(x_2, \ldots, x_n)$.

(IV) Der Abstand eines Punktes $\vec{x} \in \mathbf{R}^n$ vom Ursprung ist durch die euklidische Norm des Vektors $\vec{x}$ gegeben,

$$|\vec{x}| = (<\vec{x}, \vec{x}>)^{1/2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2} \ , \tag{18.7}$$

hängt also (nichtlinear) von den n unabhängigen Variablen x_j ab.

(V) Von besonderer Bedeutung für die Biologie sind **räumliche Systeme** – von der Einzelzelle bis zu großräumigen Ökosystemen. Bei der Modellierung betrachtet man dann oft dynamische Variablen, die Funktionen des Ortes $\vec{r} = (x, y, z)$ und der Zeit t sind, beispielsweise die raumzeitliche Konzentrationsverteilung $\rho(x, y, z, t)$ von Calciumionen innerhalb einer Nervenzelle. In vielen Fällen vernachlässigt man die z-Komponente, wie zum Beispiel bei der Modellierung von Populationsdynamiken, bei denen die Dichte ρ einer Spezies oft nur als Funktion des Ortes in der xy-Ebene und der Zeit t betrachtet wird, d.h. $\rho = \rho(x, y, t)$.

Im Beispiel (V) ist die dynamische Variable ein orts- und zeitabhängiger **Skalar** $\rho(\vec{r}, t)$. Genauso sind aber auch vektorielle Variablen denkbar. So ergibt sich beim Abbau von räumlichen Konzentrationsunterschieden ein Teilchenfluß, das heißt ein ortsabhängiger **Vektor** $\vec{\phi}(\vec{r})$. Da die dynamischen Größen in beiden Fällen vom Ort abhängen, spricht man in Anlehnung an die Physik (elektrisches und magnetisches Feld, Gravitationsfeld etc.) auch von einem **skalaren Feld** beziehungsweise einem **Vektorfeld**.

Beide Arten feldartiger Größen sind Ihnen schon seit langem von der Wetterkarte her geläufig: Der Luftdruck ist ein skalares Feld, das aus Luftdruckunterschieden resultierende Windfeld (Wirbel!) ist ein Vektorfeld.

Definition (Funktionen mehrerer Variabler):
Eine Funktion $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ mit $\vec{x} \mapsto z = f(x_1, \ldots, x_n)$ heißt **skalare Funktion** der Variablen $x_1, \ldots, x_n$, oder auch **skalares Feld**.
Eine Funktion $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ mit $\vec{x} \mapsto \vec{z} = (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n))$ heißt **vektorwertige Funktion** der Variablen $x_1, \ldots, x_n$, oder auch **Vektorfeld**.

18.1.2 Visualisierung von Funktionen mehrerer Variabler

Wir können uns drei Raumdimensionen vorstellen und zwei davon bequem skizzieren. Um dennoch Funktionen mehrerer Variablen darstellen zu können, verwendet man unterschiedliche Projektionsmethoden. Verschiedene Beispiele finden Sie, z.B., in den Abbildungen 18.1, 18.2 und 18.3.

(I) **Perspektivische Darstellung** einer Funktion $f(x, y)$ von zwei unabhängigen Variablen. Gut geeignet, wenn f in beiden Variablen monoton ist. Problematisch, wenn dies nicht zutrifft, da dann perspektivische Überdeckungen auftreten.

(II) Darstellung zweidimensionaler **Schnitte** durch die Funktion. Wählt man im Fall einer Funktion $f(x, y)$ von zwei Variablen x und y als Schnittebene eine zur x–y–Ebene parallele Ebene im Abstand c, so nennt man die Schnittmenge von Schnittebene und Funktion eine **Niveaufläche** $N_f(c)$,

$$N_f(c) = \{\vec{x} \in \mathbf{R}^n \mid f(\vec{x}) = c\} \ . \tag{18.8}$$

In einer Topographischen Karte entspricht eine Niveaufläche einer **Höhenlinie**.

BEISPIEL :

Die Niveauflächen der Funktion $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ sind für $c \geq 0$ Kreise um den Nullpunkt $(0, 0)$ mit dem Radius $\sqrt{c}$. Für $c < 0$ hat die Gleichung $x_1^2 + x_2^2 = c$ keine Lösung im $\mathbf{R}^2$. Damit existieren für diese Werte auch keine Niveauflächen.

(III) "Färbt" man einzelne Niveauflächen entsprechend ihrem Wert c an, so erhält man eine **Farbcodierung** der Funktion $f(x, y)$. Eine Variable wird dann durch die Farbe (in einfacheren Darstellungen auch durch den Grauwert) visualisiert, die anderen beiden ganz normal in der Ebene. Diese Darstellung ist sehr vorteilhaft, da abgesehen von einer Limitierung durch die endliche Farbauflösung keinerlei Information verlorengeht.

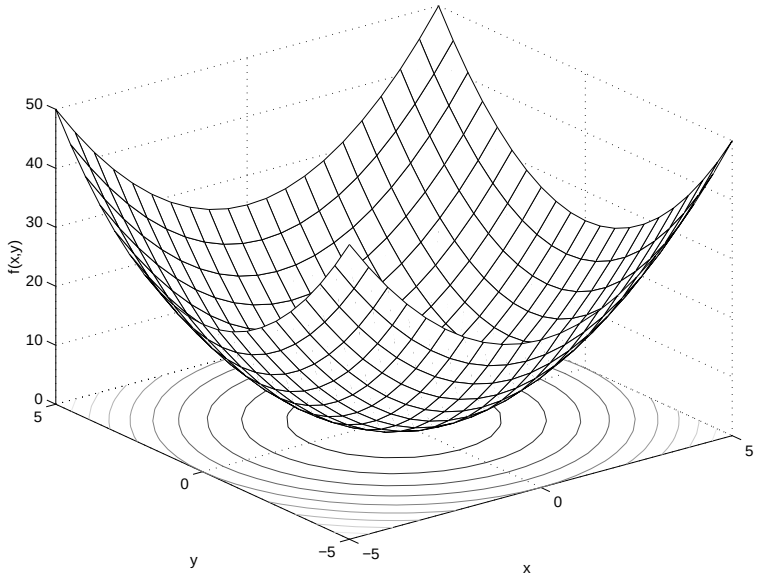


Abbildung 18.1: Perspektivische Darstellung und Höhenlinien der Funktion $z = f(x, y) = x^2 + y^2$. Die Funktion hat ein Minimum an der Stelle $x_0 = y_0 = 0$.

18.1.3 Dynamik

Hier betrachtet man einerseits **Systeme gekoppelter Differentialgleichungen**, wie zum Beispiel Systeme mit einer Beutepopulation x und Räuberpopulation y, deren Entwicklung als Funktion der Zeit t durch $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x, y)$ und $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = g(x, y)$ gegeben ist. Von besonderem Interesse sind dabei Fragen zur Existenz von stationären Lösungen, periodischen Lösungen oder Chaos und zur asymptotischen Stabilität biologisch relevanter Lösungen (Kann sich die untersuchte Population trotz Parasiten, Räubern, Alterungsprozessen ... halten?). Als einzige unabhängige Variable tritt bei dieser Art der Modellierung die Zeit t auf.

Dagegen erfordert eine realistische Beschreibung dynamischer Prozesse oft die Modellierung **räumlich ausgedehnter Systeme**, in denen die dynamischen Variablen von **Zeit t und Ort $\vec{r}$** abhängen. Wichtige Beispiele sind Wellen- und Diffusionsphänomene in Physik, Chemie, Biologie und Technik, wobei in biologischen Systemen oft nicht nur passive Diffusionsprozesse ablaufen, sondern auch aktive Transportprozesse wie der Stofftransport in einzelnen Zellen oder die elektrochemische Reizleitung in Nervensystemen. Derartige Phänomene beruhen auf **nichtlinearen Prozessen**, die auch für die Musterbildung in der Entwicklungsbiologie von großer Bedeutung sind.

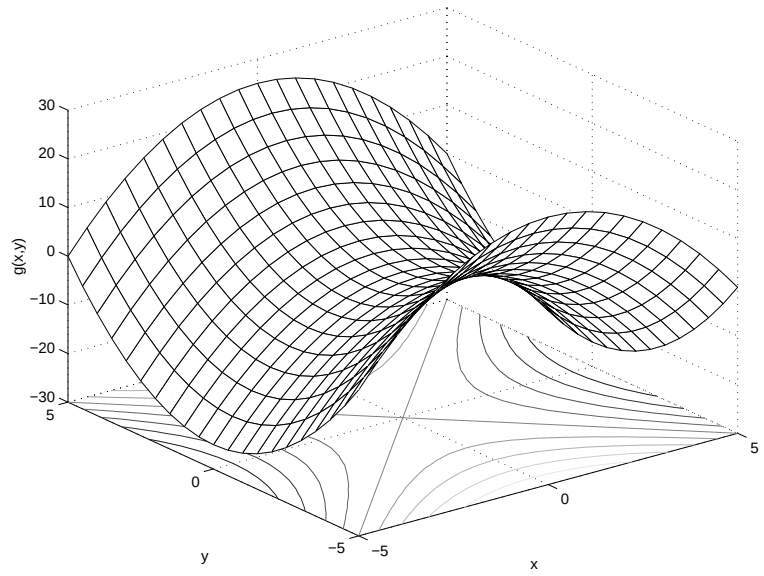


Abbildung 18.2: Perspektivische Darstellung und Höhenlinien der Funktion $z = g(x, y) = y^2 - x^2$. Die Funktion hat einen Sattelpunkt an der Stelle $x_0 = 0$, $y_0 = 0$.

18.1.4 Wichtige Teilmengen des $\mathbf{R}^n$

In gleicher Weise, in der man Intervalle im Raum der reellen Zahlen einführt, kann man mehrdimensionale Intervalle dadurch definieren, dass man beispielsweise jede Komponente x_i eines Vektors $\vec{x} \in \mathbf{R}^n$ auf ein eindimensionales Intervall beschränkt. In zwei Dimensionen erhält man damit Rechtecke mit zu den Koordinatenachsen parallelen Grenzen, in drei Dimensionen entsprechende Quader, und so weiter ...

Beim Studium von Funktionen mehrerer Variabler ist man oft am Verhalten in der Nähe eines vorgegebenen Punktes $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ interessiert. Dazu betrachtet man gerne eine sogenannte **ε-Umgebung** $U_\varepsilon(\vec{a})$ von $\vec{a}$, das heißt alle Punkte des $\mathbf{R}^n$, deren (euklidischer) Abstand von $\vec{a}$ kleiner als ε ist,

$$U_\varepsilon(\vec{a}) = \{\vec{x} \in \mathbf{R}^n \mid |\vec{x} - \vec{a}| < \varepsilon\} \ . \tag{18.9}$$

Die ε-Umgebung verallgemeinert also das Konzept eines um den gegebenen Punkt $a \in \mathbf{R}$ herum symmetrischen Intervalls (für $\mathbf{R}$) bzw. eines Kreises oder einer Kugel mit Mittelpunkt $\vec{a}$ (für $\mathbf{R}^2$ respektive $\mathbf{R}^3$) auf $\mathbf{R}^n$ mit $n > 3$.

18.1.5 Schlussbemerkung

Wesentliche Eigenschaften von Funktionen mehrerer Variabler werden schon für Funktionen von *zwei* unabhängigen Variablen x und y sichtbar, die wir auch als Vektor $\vec{r} = (x, y)$ zusammenfassen werden,

$$f : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ (x, y) \mapsto z = f(x, y) \qquad \text{oder auch} \qquad \vec{r} \mapsto z = f(\vec{r}) \ . \tag{18.10}$$

Wir werden deshalb im Folgenden vor allem derartige Funktionen betrachten. Fasst man zudem x und y als räumlich Koordinaten auf, so kann man sich f als Beschreibung einer (im allgemeinen gekrümmten) Fläche im dreidimensionalen Raum einfach veranschaulichen. Das Beispiel der Kugeloberfläche wurde in Abschnitt 18.1.1 unter (II) schon besprochen.

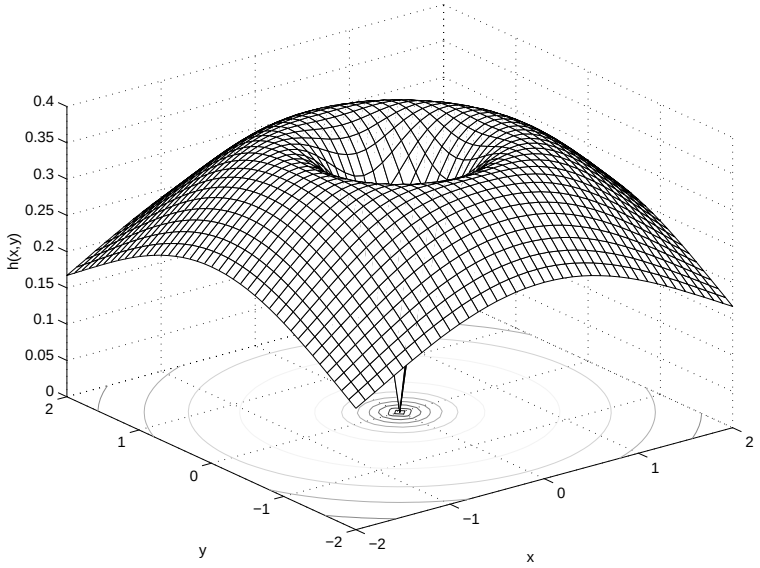


Abbildung 18.3: Perspektivische Darstellung und Höhenlinien der Funktion $z = h(x, y) = r\exp(-r)$ mit $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Die Funktion hat an der Stelle $x_0 = y_0 = 0$ ein Minimum, sie ist an dieser Stelle allerdings *nicht* differenzierbar! Weiterhin zeigt f eine Linie von Maxima für $x^2 + y^2 = 1$, d.h. auf einem Kreis mit Radius 1.

18.2 Folgen, Grenzwert und Stetigkeit

Grenzwert und Stetigkeit von Funktionen *einer* Variablen sind in Kapitel 8 mit Hilfe des Konzeptes der "Folge" eingeführt worden: Eine Funktion $f(x)$ hat dann einen Grenzwert z an der Stelle a, wenn für *jede* reellwertige Folge $(x_k)_{k\in\mathbf{N}}$ mit $x_k \neq a$ für alle k und $\lim_{k\to\infty} x_k = a$ die Bedingung $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = z$ erfüllt ist (siehe Kapitel 8.1). Man schreibt dann auch $\lim_{x\to a} f(x) = z$. Die Funktion ist stetig, wenn zusätzlich $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ (siehe Kapitel 8.2).

Wir wollen diese Konzepte nun auf Funktionen $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ mehrerer Variabler $x_1, x_2, \ldots, x_n$ übertragen. Dies geschieht am einfachsten dadurch, dass wir die Abhängigkeit der Funktion f vom Vektor $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ komponentenweise betrachten.

Dazu definieren wir in einem ersten Schritt den Begriff einer **vektorwertigen Folge**:

Definition (Vektorwertige Folge):
Eine vektorwertige Folge $(\vec{x}_k)_{k\in\mathbf{N}}$ ist eine Folge von Vektoren $\vec{x}_k = (x_{1,k}, x_{2,k}, \ldots, x_{n,k}) \in \mathbf{R}^n$.

BEMERKUNG: Beachten Sie die unterschiedliche Bedeutung der runden Klammern in den beiden vorangegangenen Ausdrücken: In $(\vec{x}_k)_{k\in\mathbf{N}}$ bezeichnen die Klammern eine Folge mit vektoriellen Gliedern $\vec{x}_k$, in $(x_{1,k}, x_{2,k}, \ldots, x_{n,k})$ die komponentenartige Darstellung des k-ten Vektors $\vec{x}_k$ selbst! Die Ähnlichkeit beider Notationen mag verwirrend sein, sie erscheinen aber nur in diesem Unterkapitel gemeinsam.

Betrachtet man die vektorwertige Folge $(\vec{x}_k)_{k\in\mathbf{N}}$ komponentenweise, so kann man sie auch als geordnete Menge von n Folgen $(x_{i,k})_{k\in\mathbf{N}}$ der Komponenten $x_{i,k}$ der Vektoren $\vec{x}_k$ interpretieren.

Die Folge $(\vec{x}_k)_{k\in\mathbf{N}}$ konvergiert genau dann, wenn ein Vektor $\vec{a}$ existiert, so dass die i-te Folge, das heißt $(x_{i,k})_{k\in\mathbf{N}}$, gegen die i-te Komponente a_i des Vektors konvergiert.

Mit dieser Zurückführung einer vektorwertigen Folge auf n reellwertige Folgen kann man den Grenzwert und die Stetigkeit einer Funktion $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ leicht definieren:

Definition (Grenzwert und Stetigkeit):
Eine Funktion $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ hat dann einen **Grenzwert** z an der Stelle $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, wenn für *jede* vektorwertige Folge $(\vec{x}_k)_{k\in\mathbf{N}}$ mit $\vec{x}_k \neq \vec{a}$ für alle k und $\lim_{k\to\infty} \vec{x}_k = \vec{a}$ die Bedingung $\lim_{k\to\infty} f(\vec{x}_k) = z$ erfüllt ist.
Man schreibt dafür auch $\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} f(\vec{x}) = z$.
Die Funktion ist **stetig**, wenn zusätzlich $\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} f(x) = f(\vec{a})$ gilt.

BEISPIEL:

Wie im eindimensionalen Fall muss der Grenzwert $\lim_{k\to\infty} f(\vec{x}_k) = z$ für *alle* Folgen mit $\lim_{k\to\infty} \vec{x}_k = \vec{a}$ und $\vec{x}_k \neq \vec{a}$ gleich sein. Ein Gegenbeispiel möge dies verdeutlichen: Die Funktion $f(x_1, x_2)$,

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2} & , \quad (x_1, x_2) \neq (0, 0) \\ \\ c \in \mathbf{R} & , \quad (x_1, x_2) = (0, 0) \end{cases}$$

hat unabhängig von der Wahl von c *keinen* Grenzwert an der Stelle $(0, 0)$.

Beweis: Man betrachte die Folge $(\vec{x}_k)$ mit $x_{1,k} = k^{-1}$ und $x_{2,k} = \alpha k^{-1}$ wobei $\alpha \in \mathbf{R}$ ein fest gewählter Parameter sei. Unabhängig vom Wert von α konvergiert diese Folge gegen den Punkt $(0, 0)$. Weiterhin gilt

$$f(x_{1,k}, x_{2,k}) = \frac{k^{-1} \cdot \alpha k^{-1}}{k^{-1} \cdot k^{-1} + \alpha k^{-1} \cdot \alpha k^{-1}} = \frac{\alpha}{1 + \alpha^2} \ .$$

Daraus folgt: $\lim_{k\to\infty} f(x_{1,k}, x_{2,k}) = \alpha/(1+\alpha)$. Der Grenzwert der Folge $(f(\vec{x}_k))$ hängt also von α ab. Damit hat die Funktion $f(x_1, x_2)$ keinen Grenzwert an der Stelle $(0, 0)$ und ist deshalb an dieser Stelle auch nicht stetig.

BEMERKUNG: Dieses Beispiel verallgemeinert das Beispiel der Signum-Funktion ($f(x) = x/|x|$ für $x \neq 0$) in Kapitel 8.1. Diskutieren Sie die Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen beiden Beispielen!

18.3 Partielle Ableitungen

Um eine durch (18.10) beschriebene Fläche zu untersuchen, können wir ihre Schnittkurve mit einer vorgegebenen Ebene betrachten, beispielsweise der zur y–z–Ebene[1] parallelen Ebene $x = x_0$,

$$z = f(x_0, y) \ . \tag{18.11}$$

Für **festes** $x = x_0$ hängt f also nur noch von y ab, und wir können die Ableitung von f nach y wie gewohnt berechnen,

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}f(x_0, y)}{\mathrm{d}y} \ . \tag{18.12}$$

BEMERKUNG: Die Ableitung wird im Allgemeinen vom Wert von x_0 abhängen!

[1] D.h. der durch die y- und z-Koordinatenachsen aufgespannten Ebene, die durch den Ursprung geht.

BEISPIEL :

Wie groß ist der Anstieg der Oberfläche einer Halbkugel $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ – siehe auch Gleichung (18.4) – wenn man $x = x_0$ festhält und y variert? Differenziert man z bei festem $x = x_0$, so erhält man

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\sqrt{R^2 - x_0^2 - y^2} = \frac{-y}{\sqrt{R^2 - x_0^2 - y^2}} \; . \tag{18.13}$$

Dabei muss vorausgesetzt werden, dass $|x_0| < R$ und $|y| < \sqrt{R^2 - x_0^2}$ ist, damit z reellwertig und nach y differenzierbar ist.

Der Anstieg ist also für negatives y positiv, für positives y negativ, und verschwindet für $y = 0$. Gleichzeitig hängt der Anstieg auch vom gewählten x-Wert x_0 ab. Machen Sie sich dies auch mit Hilfe von Abb. 18.4 deutlich (auch wenn hier das analoge Beispiel $y = y_0$ dargestellt ist)!

Betrachtet man die Schnittkurve der Funktion f mit der Ebene $y = y_0$, so kann man entsprechend zu (18.12) auch die Ableitung

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f(x, y_0)}{\mathrm{d}x} \tag{18.14}$$

definieren.

In beiden Fällen untersucht man also das Verhalten einer Funktion mehrerer Variabler dadurch, dass man alle Variablen bis auf eine festhält und damit nur eine teilweise oder **partielle Ableitung** bildet.

Will man deutlich ausdrücken, welche Variable bei der betreffenden partiellen Ableitung *festgehalten* wird, so verwendet man folgende Schreibweisen:

Definition (Partielle Ableitung):
Sei $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ mit $(x, y) \mapsto z = f(x, y)$ eine skalare Funktion der beiden Variablen x und y. Leitet man f nach x bei festgehaltenem y-Wert y_0 ab, so heißt diese Ableitung die **partielle Ableitung von f nach x**. Leitet man f nach y bei festgehaltenem x-Wert x_0 ab, so heißt diese Ableitung die **partielle Ableitung von f nach y**. Diese Ableitungen werden als

$$\frac{\partial f}{\partial x} \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} \tag{18.15}$$

notiert. Will man betonen, dass die partielle Ableitung an einer bestimmten Stelle $\vec{r}_0$ berechnet werden soll, so schreibt man dafür

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\vec{r}_0} \qquad \text{beziehungsweise} \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\vec{r}_0} \; . \tag{18.16}$$

Entsprechend werden partielle Ableitungen von Funktionen mit drei, vier ... Variablen definiert, wobei auch hier immer nur eine Variable variiert wird, während die restlichen zwei, drei ... Variablen festgehalten werden.

BEMERKUNG: In der Literatur finden sich auch folgende Abkürzungen:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \partial_x f = f_x \tag{18.17}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \partial_y f = f_y \tag{18.18}$$

(18.19)

Partielle Ableitungen wie $\partial_x f(x,y)$ sind wieder Funktionen von x und y. Falls sie differenzierbar sind, können damit partielle Ableitungen höherer Ordnung gebildet werden:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \tag{18.20}$$

BEMERKUNG: Ein weiterer wichtiger Hinweis zur Notation: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ ist *nicht* die Ableitung von f nach x^2!

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} \tag{18.21}$$

In (18.21) wird zuerst y festgehalten und f nach x differenziert. Anschließend wird das Ergebnis nach y differenziert, wobei nun x festgehalten wird.

Dagegen wird in

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} \tag{18.22}$$

zuerst x festgehalten und f nach y differenziert. Anschließend wird das Ergebnis nach x differenziert, wobei nun y festgehalten wird.

Es können auch beliebige höhere partielle Ableitungen gebildet werden, in denen die unabhängigen Variablen x und y entweder nur einzeln auftreten – wie in $\frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x^3}$ oder $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}$ – oder auch **gemischt** – wie in $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\,\partial x}$ oder $\frac{\partial^4 f(x,y)}{\partial y\,\partial x\,\partial y^2}$.

BEISPIEL :

Die Funktion

$$f(x,y) = \sin(xy)\exp(by)$$

sei vorgegeben. Ihre partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung lauten:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y\cos(xy)\exp(by) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -y^2\sin(xy)\exp(by)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x\cos(xy)\exp(by) + b\sin(xy)\exp(by)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -x^2\sin(xy)\exp(by) + 2bx\cos(xy)\exp(by) + b^2\sin(xy)\exp(by)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \cos(xy)\exp(by) - xy\sin(xy)\exp(by) + by\cos(xy)\exp(by) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

Im obigen Beispiel gilt $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\,\partial x}$. Stimmt dies immer? Hier hilft der

Satz von Schwarz (ohne Beweis):
Besitzt $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ stetige partielle Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$, dann existiert auch $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$ und es gilt $\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$.
Der Satz gilt in gleicher Weise in höheren Dimensionen.

Bevor man die Reihenfolge einer gemischten partiellen Ableitung $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$ vertauscht, untersuche man also die Stetigkeit von $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$! In den meisten Fällen wird man

hier keine böse Überraschung erleben, sobald aber beispielsweise Potenzen mit negativem Exponenten auftauchen, ist Vorsicht geboten.

BEMERKUNG: (Für Interessierte) Bei der partiellen Ableitung einer Funktion f nach einer bestimmten Variable (zum Beispiel x) werden im Normalfall die anderen unabhängigen Variablen (zum Beispiel y) festgehalten. Es kommt jedoch auch vor, dass man eine bestimmte *Kombination* der anderen Variablen festhalten möchte, zum Beispiel den Radius r in der xy-Ebene, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Diese partielle Ableitung schreibt man als $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_r$, wobei der Index r die festgehaltene Größe bezeichnet. Die partielle Ableitung von f nach x bei festem y könnte damit auch als $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y$ geschrieben werden, doch läßt man in unzweideutigen Fällen Klammer und Index einfach weg. Wichtig ist jedoch, dass der Wert einer partiellen Ableitung entscheidend davon abhängt, *welche andere Variable* festgehalten wurde! Dies zeigt das nächste Beispiel:

BEISPIEL :

Bei der Beschreibung der Halbkugel in (18.4) hätte man auch die Polarkoordinaten $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ und $\phi = \arctan(y/x)$ einsetzen können, um beispielsweise y durch $y = x\tan(\phi)$ zu ersetzen. Damit erhielte man $z = \sqrt{R^2 - x^2(1 - \tan^2\phi)}$ und daraus:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_\phi = -\frac{x(1-\tan^2\phi)}{\sqrt{R^2 - x^2(1-\tan^2\phi)}} = -\frac{x - y^2x^{-1}}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \ . \qquad (18.23)$$

Dieses Ergebnis stimmt *nicht* mit (18.13) überein! Die Diskrepanz erklärt sich daraus, dass nun der Winkel ϕ konstant gehalten wurde, während in (18.13) die Koordinate y konstant war. Veranschaulichen Sie sich in Abb. 18.4, dass die zwei partiellen Ableitungen eine unterschiedliche geometrische Bedeutung haben!

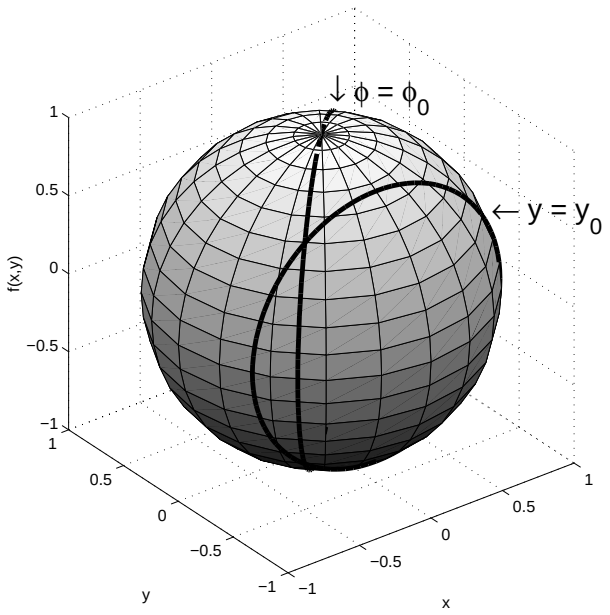


Abbildung 18.4: Perspektivische Darstellung einer Kugel und der Schnittflächen $\phi = \phi_0$ und $y = y_0$.

Noch deutlicher wird dieses Phänomen, wenn man $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ in (18.4)

einsetzt, woraus sich $z = \sqrt{R^2 - r^2}$ ergibt. Daraus folgt:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_r = 0 \; . \tag{18.24}$$

Die partielle Ableitung nach x bei festem r ist also unabhängig von x und sogar gleich Null. Auch dies ist verständlich, bewegt man sich doch nun auf einem Zylinder mit festem Radius r. Dessen Schnittlinie mit der Halbkugel verläuft in *konstanter* Höhe $z = \sqrt{R^2 - r^2}$, so dass die partielle Ableitung nach x verschwinden muss!

18.4 Potenzreihen und Taylorentwicklung im $\mathbf{R}^n$

Mit Hilfe der partiellen Ableitungen kann das Verhalten einer Funktion mehrerer Variabler untersucht werden. Konzeptionell neu gegenüber dem eindimensionalen Fall ist der Umstand, dass sich eine Funktion unterschiedlich bezüglich verschiedener Variablen verhalten kann. Betrachtet man beispielsweise die Funktion $f(x, y) = x^2 - y^2$ an der Stelle $(x_0, y_0) = (0, 0)$, so bemerkt man, dass f bezüglich x ein Minimum, bezüglich y jedoch ein Maximum hat (siehe auch Abb. 18.2).

Um die aus Phänomenen dieser Art erwachsenen Komplikationen rasch zu verstehen, wird im Folgenden zuerst die Taylorentwicklung einer Funktion mehrerer Variabler vorgestellt und anschließend zur Untersuchung lokaler Eigenschaften von Funktionen mehrerer Variabler verwendet. Dabei beschränken wir uns auf den Fall zweier unabhängiger Variabler, die mit x und y bezeichnet werden.

Definition (Potenzreihen im $\mathbf{R}^n$):
Potenzreihen werden im $\mathbf{R}^2$ in gleicher Weise wie in den reellen Zahlen $\mathbf{R}$ definiert. Ordnet man die Glieder einer solchen Reihe g nach aufsteigenden Potenzen in x und y, so erhält man also

$$\begin{aligned}
g(x,y) &= c_{00} && \text{0.Ordnung : konstanter Term} \\
&+ c_{10}x + c_{01}y && \text{1.Ordnung : lineare Terme} \\
&+ c_{20}x^2 + c_{11}xy + c_{02}y^2 && \text{2.Ordnung : quadratische Terme} \\
&+ c_{30}x^3 + c_{21}x^2y + c_{12}xy^2 + c_{03}y^3 && \text{3.Ordnung : kubische Terme} \\
&+ \ldots && \ldots
\end{aligned} \tag{18.25}$$

wobei die Indizierung der Koeffizienten c_{ij} derart gewählt wurde, dass i der jeweiligen Potenz von x und j der Potenz von y entspricht.

Wie im eindimensionalen Fall (siehe Kapitel 9.5) erlauben Potenzreihen die **Taylorentwicklung** einer Funktion $f(x, y)$ um einen Punkt (x_0, y_0), wenn diese Funktion genügend oft differenzierbar ist. Dazu schreiben wir f als Potenzreihe in $(x - x_0)$ und $(y - y_0)$ und erhalten aus (18.25):

$$f(x,y) \;=\; c_{00}$$

$$+ c_{10}(x-x_0) + c_{01}(y-y_0)$$

$$+ c_{20}(x-x_0)^2 + c_{11}(x-x_0)(y-y_0) + c_{02}(y-y_0)^2 + \dots \quad (18.26)$$

Die Koeffizienten c_{ij} der Taylorentwicklung ermitteln wir, indem wir die Funktion f und ihre partiellen Ableitungen an der Stelle (x_0, y_0) auswerten. Zur Verkürzung der Notation setzen wir

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{r}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \quad (18.27)$$

und erhalten:

$$f(x_0, y_0) = c_{00} \quad (18.28)$$

und

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\vec{r}} &= c_{10} + 2c_{20}(x-x_0) + c_{11}(y-y_0) + \dots \;\rightarrow\; \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\vec{r}_0} &= c_{10} \\
\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\vec{r}} &= c_{01} + 2c_{02}(y-y_0) + c_{11}(x-x_0) + \dots \;\rightarrow\; \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\vec{r}_0} &= c_{01} \\
\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{\vec{r}} &= 2c_{20} + 6c_{30}(x-x_0) + 2c_{21}(y-y_0) + \dots \;\rightarrow\; \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{\vec{r}_0} &= 2c_{20} \\
\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right|_{\vec{r}} &= c_{11} + 2c_{21}(x-x_0) + 2c_{12}(y-y_0) + \dots \;\rightarrow\; \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right|_{\vec{r}_0} &= c_{11} \\
\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{\vec{r}} &= 2c_{02} + 2c_{12}(x-x_0) + 6c_{03}(y-y_0) + \dots \;\rightarrow\; \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{\vec{r}_0} &= 2c_{02}
\end{aligned}$$

Setzt man diese Terme in (18.26) ein, so erhält man die Taylorentwicklung

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= f(x_0,y_0) \\
&+ \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\vec{r}_0} \cdot (x-x_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\vec{r}_0} \cdot (y-y_0) \\
&+ \frac{1}{2}\left[\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{\vec{r}_0} \cdot (x-x_0)^2 + 2\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right|_{\vec{r}_0} \cdot (x-x_0)(y-y_0) + \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{\vec{r}_0} \cdot (y-y_0)^2\right] \\
&+ \dots
\end{aligned} \quad (18.29)$$

BEMERKUNG: Alle partiellen Ableitungen werden an der Stelle $\vec{r}_0 = (x_0, y_0)$ berechnet.

Mit Hilfe der Vektor- und Matrixnotation kann dieses Ergebnis auch sehr kompakt geschrieben und auf n-dimensionale Vektoren $\vec{r} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ bzw. $\vec{r}_0$ verallgemeinert werden. Dazu fassen wir die partiellen Ableitungen erster Ordnung und zweiter Ordnung formal ebenfalls zu einem Vektor bzw. einer Matrix zusammen und definieren

Definition (Gradient):
Sei $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ eine skalare Funktion mehrerer Variabler. Dann ist der **Gradient von f an der Stelle** $\vec{r}_0$ ein n-dimensionaler Vektor, dessen i-te Komponente durch die partielle Ableitung von f nach der i-ten Variablen gegeben ist. Der Gradient wird als $\vec{\nabla} f\Big|_{\vec{r}_0}$ geschrieben

$$\vec{\nabla} f(\vec{r}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}\Big|_{\vec{r}_0} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}\Big|_{\vec{r}_0} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}\Big|_{\vec{r}_0} \end{pmatrix} . \tag{18.30}$$

Das Symbol $\vec{\nabla}$ selbst heißt "Nabla-Operator" oder kurz: "'Nabla".

Definition (Hesse-Matrix):
Sei $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ eine skalare Funktion mehrerer Variabler. Ordnet man die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung als Matrix an, so erhält man die **Hesse-Matrix** $\mathbf{H}(\vec{r}_0)$

$$\mathbf{H}(\vec{r}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix} \tag{18.31}$$

Mit diesen Definitionen kann (18.29) zusammengefasst und auf den Fall der Taylorreihe im $\mathbf{R}^n$ verallgemeinert werden:

Taylorreihe im $\mathbf{R}^n$:

$$f(\vec{r}) = f(\vec{r}_0) + (\vec{r} - \vec{r}_0)^T \cdot \vec{\nabla} f(\vec{r}_0) + \frac{1}{2}(\vec{r} - \vec{r}_0)^T \; \mathbf{H}(\vec{r}_0) \; (\vec{r} - \vec{r}_0) + \ldots \tag{18.32}$$

Hierbei bezeichnet " $\cdot$ " das Skalarprodukt und $\vec{r}^{\,T}$ den zu $\vec{r}$ transponierten Vektor.

18.5 Totales Differential und Richtungsableitung

Definition (Totales Differential):
Die Taylorentwicklung (18.32) gibt an, wie sich $f(\vec{r})$ als Funktion des Vektors $\vec{r}$ in der Nähe der Stelle $\vec{r}_0$ ändert. Der in $\vec{r} - \vec{r}_0 \equiv \mathrm{d}\vec{r} = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y)$ *lineare* Teil wird **totales Differential** $\mathrm{d}f$ genannt,

$$\mathrm{d}f = \vec{\nabla} f \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \frac{\partial f}{\partial x} \; \mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y} \; \mathrm{d}y, \tag{18.33}$$

und beschreibt in linearer Näherung die Veränderung von $f(\vec{r})$ bei Variation von $\vec{r}$.

Unterscheidet sich $\vec{r}$ von $\vec{r}_0$ beispielsweise nur in x-Richtung, so ist $\mathrm{d}y = 0$ und man erhält $\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x$, unterscheidet er sich nur in y-Richtung, so ergibt sich $\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y$. In diesen beiden speziellen Richtungen entspricht damit $\mathrm{d}f$ genau der infinitesimalen Änderung von f bei Variation der unabhängigen Variablen.

In vielen Fällen möchte man jedoch auch die Ableitung der Funktion f in einer bestimmten Richtung, also längs eines vorgegebenen Einheitsvektors $\vec{a} = (a_x, a_y)$ berechnen, der als Einheitsvektor gemäß $|\vec{a}| = 1$ normiert ist. In diesem Fall sind $\mathrm{d}x$ und $\mathrm{d}y$ proportional zueinander, so dass man auch $\mathrm{d}x = \mathrm{d}s\ a_x$ und $\mathrm{d}y = \mathrm{d}s\ a_y$ schreiben kann — die Ableitung soll ja in Richtung des Vektors $\vec{a}$ erfolgen — und es folgt

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x} a_x\ \mathrm{d}s + \frac{\partial f}{\partial y} a_y\ \mathrm{d}s = \vec{\nabla} f \cdot \vec{a}\ \mathrm{d}s\ . \tag{18.34}$$

Nachdem auf der rechten Seite nur mehr $\mathrm{d}s$ als einzige infinitesimale Größe auftaucht, kann man mit $a_x = \mathrm{d}x/\mathrm{d}s$ und $a_y = \mathrm{d}y/\mathrm{d}s$ auch

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = \vec{\nabla} f \cdot \vec{a} \tag{18.35}$$

schreiben.

Definition (Richtungsableitung):
Sei $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ eine Funktion mehrerer Variabler und $\vec{a}$ ein auf $|\vec{a}| = 1$ normierter Vektor. Dann heißt der Term $\vec{\nabla} f \cdot \vec{a}$ die **Richtungsableitung von f in Richtung von $\vec{a}$.**

BEISPIEL :

Man berechne die Richtungsableitung von $f(x, y) = xy + x^2 + y^2 - 6y$ in Richtung des auf eins normierten Vektors $\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (2, 1)$. Für welche Werte von x und y verschwindet diese Ableitung?

Die partiellen Ableitung sind

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y + 2x \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x + 2y - 6\ ,$$

so dass

$$\vec{\nabla} f(x, y) = \begin{pmatrix} y + 2x \\ x + 2y - 6 \end{pmatrix}\ .$$

Daraus folgt

$$\vec{\nabla} f(x, y) \cdot \vec{a} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2y + 4x + x + 2y - 6) = \frac{1}{\sqrt{5}}(5x + 4y - 6)\ .$$

Damit die Richtungsableitung verschwindet, muss y also die Gleichung

$$y = \frac{3}{2} - \frac{5}{4}x$$

erfüllen.

Aus (18.35) folgt, dass sich f längs eines Vektors $\vec{a}$ *nicht* ändert, wenn dieser orthogonal auf dem Gradienten $\vec{\nabla} f$ steht. Dies bedeutet aber, dass der Gradient orthogonal zu der Menge der Vektoren steht, für die f einen konstanten Wert hat:

Satz:
Der Gradient ist orthogonal zur Niveaufläche.

Weiterhin folgt aus (18.35), dass sich f längs eines Vektors $\vec{a}$ maximal ändert, wenn der Vektor parallel zu $\vec{\nabla} f$ steht:

Satz:
Wenn $\vec{\nabla} f \neq 0$, so zeigt $\vec{\nabla} f$ in Richtung des maximalen Zuwachses von f. Genauer: $\vec{\nabla} f(\vec{x}) \cdot \vec{a}$ ist maximal, wenn $\vec{a}$ Richtung und Orientierung des Gradienten $\vec{\nabla} f$ hat.

Damit hat der Gradient $\vec{\nabla} f$ eine direkte geometrische Bedeutung gewonnen!

Als Abschluss dieses Abschnittes sei noch darauf hingewiesen, dass die Differentiationsregeln wie beispielsweise die Produkt-, Quotienten- und Kettenregel weiterhin wie im eindimensionalen Fall gelten:

BEISPIEL :

Die Variable z hänge von den zwei Variablen x und y ab, die beide wiederum von der Variable t abhängen mögen, so dass insgesamt gelte:

$$z(t) = f[x(t), y(t)]$$

Dann folgt nach der Kettenregel

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

Wählt man insbesondere $y(t) = t$, das heißt $z(t) = f[x(t), t]$, so gilt

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial z}{\partial t} \ .$$

Da die Funktion z sowohl direkt von t abhängt als auch indirekt über die Variable x, ergeben sich zwei Terme bei der Bestimmung der Ableitung von z nach t. Die Ableitung von z nach t teilt sich also auf in eine partielle Ableitung von z nach t und das Produkt der partiellen Ableitung $\partial z/\partial x$ mit der Ableitung von x nach t.

Auf den ersten Blick ist dieses Ergebnis sicher etwas verwirrend. Es ist aber extrem wichtig, da in vielen Anwendungen sowohl direkte als auch indirekte Abhängigkeiten zwischen dynamischen Variablen auftauchen!

BEISPIEL :

Zur Erläuterung möge folgendes Beispiel dienen: Die Funktion $z(x,t)$ beschreibe die Lufttemperatur am Ort x zur Zeit t. Steht der Beobachter still $\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0\right)$, so entspricht die gemessene Temperaturänderung $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$ der lokalen Temperaturänderung $\frac{\partial z}{\partial t}$. Bewegt er sich jedoch mit der Geschwindigkeit $v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \neq 0$, so wird die gemessene Temperaturänderung umso stärker von der lokalen Temperaturänderung abweichen, je größer das Produkt aus der räumlichen Temperaturänderung $\frac{\partial z}{\partial x}$ und der Geschwindigkeit v ist.

18.6 Lokale Extrema in $D = 2$ Dimensionen

Definition (Kritischer oder stationärer Punkt):
Verschwindet der Gradient $\vec{\nabla} f$ an einem Punkt $\vec{r}_0$, so ist f dort in linearer Näherung konstant. Ein solcher Punkt heißt **kritischer Punkt** oder **stationärer Punkt**.

Die Funktion f hat an einem kritischen Punkt möglicherweise ein (lokales) Maximum oder Minimum oder auch einen Sattelpunkt. Wie in einer Dimension hängt es dann von den (nun: partiellen) Ableitungen zweiter Ordnung ab, ob auch wirklich ein Extremwert vorliegt. Wie wir im Folgenden zeigen werden, bestimmt dabei das Vorzeichen der Determinante $D(\vec{r})$ der Hesse-Matrix $\mathbf{H}(\vec{r})$ zusammen mit dem Vorzeichen der beiden partiellen Ableitungen $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ eindeutig das Verhalten. Mit

$$D(\vec{r}_0) = \det \begin{pmatrix} \left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{\vec{r}_0} & \left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right|_{\vec{r}_0} \\ \left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}\right|_{\vec{r}_0} & \left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{\vec{r}_0} \end{pmatrix} = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{\vec{r}_0} \cdot \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{\vec{r}_0} - \left[\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right|_{\vec{r}_0}\right]^2 . \quad (18.36)$$

gilt nämlich:

Satz (Krümmungsverhalten an einem stationären Punkt):
Sei $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ eine Funktion zweier Variabler, die an der Stelle $\vec{r}_0$ einen stationären Punkt aufweist. Bezeichnet $D(\vec{r}_0)$ die Determinante der Hesse-Matrix an der Stelle $\vec{r}_0$, so gilt

$$\begin{aligned} &D(\vec{r}_0) > 0\ , \quad \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{\vec{r}_0} > 0, \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{\vec{r}_0} > 0 \quad \to \quad \text{lokales Minimum,} \\ &D(\vec{r}_0) > 0\ , \quad \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{\vec{r}_0} < 0, \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{\vec{r}_0} < 0 \quad \to \quad \text{lokales Maximum,} \\ &D(\vec{r}_0) < 0\ , \quad \to \quad \text{Sattelpunkt,} \\ &D(\vec{r}_0) = 0\ , \quad \to \quad \text{unbestimmt.} \end{aligned} \quad (18.37)$$

BEISPIEL :

Man suche die Extremwerte der im vorletzten Rechenbeispiel angegebenen Funktion $f = xy + x^2 + y^2 - 6y$. Dort wurden die partiellen Ableitungen schon berechnet. Aus der Bedingung $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$ erhalten wir nun die zwei gekoppelten linearen Gleichungen

$$y_0 + 2x_0 = 0 \quad \text{und} \quad x_0 + 2y_0 - 6 = 0\ .$$

Ein möglicher Extremalpunkt muss also die Koordinaten $x_0 = -2$ und $y_0 = 4$ haben — und liegt damit auf der im Beispiel auf Seite 261 gefundenen Gerade. (Warum muss dies so sein?) Die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung lauten allgemein

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{\vec{r}_0} = 2 > 0 \quad , \quad \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right|_{\vec{r}_0} = 1 \quad , \quad \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{\vec{r}_0} = 2 > 0\ .$$

Damit ist $D(-2, 4) = 2 \cdot 2 - (1)^2 = 3 > 0$. Es handelt sich also um ein Minimum.

18.6.1 Diskussion des Satzes (18.37)

Die Bedingungen (18.37) geben an, wann ein stationärer Punkt ein lokales Maximum, lokales Minimum oder ein Sattelpunkt ist. Wir wollen diese Bedingungen nun herleiten, und dabei gleichzeitig Ergebnisse der Theorie Komplexer Zahlen (Kapitel 11) und Linearer Gleichungen (Kapitel 15–17) auf die Analyse von Funktionen mehrerer Variabler

anwenden. Zur Vereinfachung beschränken wir uns dabei wie in den vorangegangenen Abschnitten auf Funktionen zweier Variabler.

Wann ist ein stationärer Punkt $\vec{r}_0$ ein *lokales Maximum* der Funktion $f(\vec{r})$? Genau dann, wenn für alle $\vec{r} \neq \vec{r}_0$ in der Umgebung von $\vec{r}_0$ gilt: $f(\vec{r}) < f(\vec{r}_0)$.

SELBSTTEST: Machen Sie sich diese Aussage anschaulich klar!

Betrachten wir die Taylorentwicklung (18.32) von $f(\vec{r})$ und setzen $\vec{z} = \vec{r} - \vec{r}_0$, so liegt also dann ein lokales Maximum vor, wenn der quadratische Term $Q(\vec{z})/2$ der Taylorentwicklung der Funktion f an der Stelle $\vec{r}_0$ mit

$$Q(\vec{z}) = \vec{z}^{\,T}\ \mathbf{H}\ \vec{z} \tag{18.38}$$

für alle $\vec{z} \neq \vec{0}$ negativ ist!

BEMERKUNG: Da wir die Stelle $\vec{r}_0$ im Folgenden nicht verändern, haben wir zur Vermeidung von Mißverständnissen statt wie bisher $\mathbf{H}(\vec{r}_0)$ einfach $\mathbf{H}$ geschrieben.

BEMERKUNG: Da $\vec{z}^T\mathbf{H}\vec{z} < 0$ für *beliebige* $\vec{z} \neq \vec{0}$ gelten soll, handelt es sich bei dieser Bedingung um eine Forderung an die Matrix $\mathbf{H}$.

Notiz:
Eine Matrix A, die die Forderung $\vec{x}^T\mathbf{A}\vec{x} < 0$ für beliebige $\vec{x} \neq \vec{0}$ erfüllt, nennt man **negativ definit** (und **positiv definit**, falls $\vec{x}^T\mathbf{A}\vec{x} > 0$ für alle $\vec{x} \neq \vec{0}$).

In gleicher Weise ist $\vec{r}_0$ ein *lokales Minimum* der Funktion $f(\vec{r})$, wenn $Q(\vec{z})$ *für alle* $\vec{z} \neq \vec{0}$ positiv ist. Ein *Sattelpunkt* liegt schließlich dann vor, wenn $Q(\vec{z})$ je nach Richtung von $\vec{z}$ positiv oder negativ ist — siehe auch Abbildung 18.2.

Wie aber ist beispielsweise garantiert, dass $Q(\vec{z})$ für alle $\vec{z} \neq \vec{0}$ negativ ist? Wir werden nun zeigen, dass die Antwort auf diese Frage von den Eigenwerten der an der Stelle $\vec{r} = \vec{r}_0$ ausgewerteten Hesse-Matrix $\mathbf{H}$ abhängt. Um die Diskussion zu vereinfachen, kürzen wir $\mathbf{H}$ wie folgt ab:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{\vec{r}_0} & \left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right|_{\vec{r}_0} \\ \\ \left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}\right|_{\vec{r}_0} & \left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{\vec{r}_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} . \tag{18.39}$$

In der zweiten Gleichung wurde die auf der Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen beruhende Symmetrie von $\mathbf{H}$ explizit berücksichtigt. In dieser kürzeren Notation folgt für (18.36)

$$D(\vec{r}_0) = \det(\mathbf{H}) = ac - b^2 . \tag{18.40}$$

Im Folgenden benutzen wir zwei Eigenschaften der Eigenwerte und Eigenvektoren von $\mathbf{H}$, die ganz allgemein für reellwertige, symmetrische Matrizen gelten.

Als reellwertige, symmetrische Matrix hat die Hesse-Matrix $\mathbf{H}$ nach den Ergebnissen von Kapitel 17.5 zwei reelle Eigenwerte σ und μ. Die zugehörigen orthogonalen Eigenvektoren seien $\vec{v}$ und $\vec{w}$. Jeder Vektor $\vec{z}$ kann damit als $\vec{z} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{w}$, mit $\alpha =< \vec{z}, \vec{v} >$ und $\beta =< \vec{z}, \vec{w} >$ geschrieben werden.

Nun wenden wir uns der Frage zu: Unter welchen Bedingungen an $\mathbf{H}$ ist $Q(\vec{z})$ für beliebige $\vec{z} \neq \vec{0}$ immer positiv beziehungsweise immer negativ?

$$Q(\vec{z}) \quad = \quad \vec{z}^{\,T}\,\mathbf{H}\,\vec{z} \ =< \vec{z}, \mathbf{H}\vec{z} >$$

$$
\begin{aligned}
&= <(\alpha\vec{v}+\beta\vec{w}), \mathbf{H}(\alpha\vec{v}+\beta\vec{w})> \\
&= <(\alpha\vec{v}+\beta\vec{w}), (\alpha\mathbf{H}\vec{v}+\beta\mathbf{H}\vec{w})> \\
&= <(\alpha\vec{v}+\beta\vec{w}), (\alpha\sigma\vec{v}+\beta\mu\vec{w})> = \alpha^2\sigma+\beta^2\mu\ . \qquad (18.41)
\end{aligned}
$$

Der in $\vec{z}$ quadratische Term $Q(\vec{z})$ ist also genau dann für beliebige $\vec{z} \neq \vec{0}$ negativ, wenn die beiden Eigenwerte σ und μ negativ sind. Der Term ist positiv, wenn beide Eigenwerte positiv sind, und ändert sein Vorzeichen je nach Richtung von $\vec{z}$, wenn einer der beiden Eigenvektoren positiv, der andere negativ ist. Damit können wir festhalten:

Falls $\sigma, \mu > 0$ liegt an der Stelle $\vec{r}_0$ ein lokales Minimum vor, falls $\sigma, \mu < 0$ ein lokales Maximum, und falls $\sigma \cdot \mu < 0$ hat die Funktion einen Sattelpunkt. Falls einer der Eigenwerte gleich Null ist, so verschwindet $Q(\vec{z})$ längs des betreffenden Eigenvektors.

Als letztes bleibt noch die Frage: Wie hängen σ und μ von den drei Parametern a, b und c der Hesse-Matrix $\mathbf{H}(\vec{r}_0)$ in (18.39) ab?

Dazu lösen wir die Eigenwertgleichung $D(\vec{r}_0) = \det[\mathbf{H}(\vec{r}_0) - \lambda\,\mathbf{E}_2] = 0$. Aus

$$
(a-\lambda)(c-\lambda) - b^2 = 0 \qquad \text{folgt} \qquad \lambda^2 - \lambda(a+c) + ac - b^2 = 0 \qquad (18.42)
$$

und damit für $\sigma = \lambda_1$ und $\mu = \lambda_2$

$$
\sigma = \frac{a+c+\sqrt{(a-c)^2+4b^2}}{2} \qquad \text{und} \qquad \mu = \frac{a+c-\sqrt{(a-c)^2+4b^2}}{2}\ . \qquad (18.43)
$$

Wie ganz allgemein für die beiden Lösungen einer quadratischen Gleichung gilt damit

$$
\sigma + \mu = a + c \qquad (18.44)
$$

und

$$
\sigma \cdot \mu = ac - b^2 = D(\vec{r}_0)\ . \qquad (18.45)
$$

Falls also $D(\vec{r}_0) > 0$, $a = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$ und $c = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} > 0$, so müssen beide Eigenwerte positiv sein — und damit muss ein lokales Minimum der Funktion f an der Stelle $\vec{r}_0$ vorliegen. Falls $D(\vec{r}_0) > 0$, $a = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0$ und $c = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} < 0$, so müssen beide Eigenwerte negativ sein — die Funktion hat also ein lokales Maximum. Falls $D(\vec{r}_0) < 0$, so handelt es sich um einen Sattelpunkt, und falls $D(\vec{r}_0) = 0$, so kann die Natur des stationären Punktes nicht aus dem quadratischen Term Q der Taylorentwicklung abgeleitet werden, vielmehr müssen Terme höherer Ordnung betrachtet werden. Der letzte Fall entspricht in einer Dimension der Situation, dass sowohl die erste als auch die zweite Ableitung einer Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 verschwinden.

Damit wären die Bedingungen (18.37) hergeleitet. Wie im Fall von Funktionen einer unabhängigen Variablen sind wir mit diesem Ergebnis nun in der Lage, lokale Eigenschaften von Funktionen zweier Variabler exakt zu untersuchen. □

BEMERKUNG: Betrachtet man Funktionen mehrerer Variabler, so können mit Hilfe der Eigenwerte der entsprechenden Hesse-Matrix analoge Betrachtungen zur Natur von stationären Punkten durchgeführt werden.

Satz:
Sei $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ eine Funktion mehrerer Variabler, die an der Stelle $\vec{r}_0$ einen stationären Punkt aufweist, dann liegt an der Stelle $\vec{r}_0$ ein **lokales Maximum** vor, wenn alle **Eigenwerte** der Hesse-Matrix **H negativ** sind. Ein **lokales Minimum** liegt vor, wenn alle **Eigenwerte** von **H positiv** sind und ein **Sattelpunkt**, wenn die **Eigenwerte** von **H unterschiedliche Vorzeichen** haben.
Falls einer der Eigenwerte gleich Null ist, so kann die Natur des stationären Punktes nicht aus den Eigenwerten der Hesse-Matrix abgeleitet werden.

18.7 Ausblick

Die hier entwickelten Techniken können leicht auf Funktionen beliebiger Dimension und auch auf vektorwertige Funktionen verallgemeinert werden. Damit stehen Ihnen insgesamt die Grundlagen eines breiten Repertoires mathematischer Methoden zur Verfügung. So können Sie nun beispielsweise die Dynamik von mehrdimensionalen Systemen (z.B. Räuber-Beute-Systeme, Diffusionsprozesse, Musterbildung, etc.) mit Hilfe von gekoppelten bzw. **Partiellen Differentialgleichungen** in gleicher Weise untersuchen, wie wir dies für eindimensionale Systeme mit Hilfe gewöhnlicher Differentialgleichungen in Kapitel 13 und 14 getan haben. Weiterhin lassen sich beispielsweise Methoden der Integrationsrechnung im Rahmen der sogenannten **Fourieranalyse** dazu einsetzen, periodische Strukturen in räumlichen oder zeitlichen Messreihen aufzuspüren.

18.8 Aufgaben

Gegeben sei die Ebene $E(x, y) = x + y$ sowie die Funktionen
$f(x, y) = -x^2 - y^2$, $g(x, y) = -4x^2 - (y - 1)^2$,
$h(x, y) = x^2 - y^2$ und $k(x, y) = 3 + 4x + 2y + x^2 - y^2$ von $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

1. (Funktionen mehrerer Variabler) **Niveaulinien**

Berechnen und skizzieren sie (soweit existent) die Niveaulinien $z(x, y) = c$ der vier Funktionen $E(x, y)$, $f(x, y)$, $g(x, y)$ und $h(x, y)$ für (i) $c_1 = 0$, (ii) $c_2 = 1$ und (iii) $c_3 = -1$.

2. (Partielle Ableitungen)

Bilden sie folgende partielle Ableitungen:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\,,\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,,\ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}\,,\ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}\,,\ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}\,,\ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}\,,\ \frac{\partial k(x,y)}{\partial x}\,,\ \frac{\partial k(x,y)}{\partial y}\,,$$
$$\frac{\partial^2 k(x,y)}{\partial x^2}\,,\ \frac{\partial^2 k(x,y)}{\partial y^2}\,,\ \frac{\partial^2 k(x,y)}{\partial x \partial y} \text{ und } \frac{\partial^2 k(x,y)}{\partial y \partial x}\,.$$

3. (Partielle Ableitungen) **Taylorentwicklung**

Entwickeln sie die Funktionen $f(x, y)$ und $k(x, y)$ bis zur quadratischen Ordnung um die Punkte $P_1 = (0, 0)$ und $P_2 = (-2, 1)$ nach Taylor.

4. (Partielle Ableitungen) **Gradient und Richtungsableitung**

Berechnen sie den Gradienten der vier Funktionen $f(x, y)$, $g(x, y)$, $h(x, y)$ und $k(x, y)$. Bestimmen sie nun noch die Richtungsableitungen dieser vier Funktionen entlang der Vektoren $\vec{v}_1 = (1, 1)$ und $\vec{v}_2 = (1, -2)$.

5. (Partielle Ableitungen) **Lokale Extrema**

Bestimmen und klassifizieren (lokales Maximum, Minimum oder Sattelpunkt?) sie die stationären Punkte der vier Funktionen $f(x,y)$, $g(x,y)$, $h(x,y)$ und $k(x,y)$.

6. (Partielle Ableitungen) **Partielle Differentialgleichungen I: Wellengleichung**

Eine Gleichung der Form

$$\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2} = a\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2}$$

heißt Wellengleichung (oder d'Alembert–Gleichung).

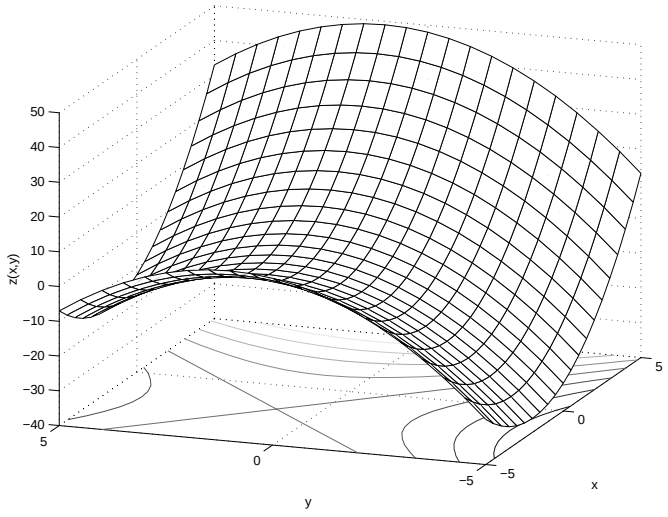
(a) Unter welcher Bedingung erfüllt die Funktion $f(x,t) = \exp[i(kx - \omega t)]$ die Wellengleichung?

Bilden sie dazu die partiellen Ableitungen $\dfrac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2}$ und $\dfrac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2}$ und setzen sie diese in die Wellengleichung ein.

(b) Zeigen sie: Jede Funktion der Form $y = f(x - ct)$ oder $y = f(x + ct)$ ist Lösung der Wellengleichung mit der Geschwindigkeit $c = \sqrt{a}$. Welche Geschwindigkeit erhalten sie somit für die in (a) gefundene Lösung?

7. (Funktionen mehrerer Variabler) **3–D Plot**

Betrachten sie den folgenden Graphen der Funktion $z(x,y)$. Stellt er eine der Funktionen f, g, h oder k dar oder nicht? Wenn ja, welche?



8. (Funktionen mehrerer Variabler)

Untersuchen sie die Funktionen $f(x,y) = (1 + \sin x)(1 + y^2)$ und $g(x,y) = e^{-x^2-y^2}$ auf Nullstellen und Extremwerte.

9. (Partielle Ableitung) **Produktregel**

(a) Zeigen sie, dass für die Gradientenbildung des Produktes zweier skalarer Funktionen $f(x,y)$ und $g(x,y)$ folgende Produktregel gilt:

$$\vec{\nabla}(fg) = g\ \vec{\nabla}f + f\ \vec{\nabla}g\ .$$

(b) Berechnen sie damit den Gradienten der Funktion $h(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-x^2-y^2}$.

10. (Partielle Ableitung) **Tangentialebene und Tangentengleichung**

Entwickeln sie die Funktion $z = f(x, y) = xy^2 - yx^3$ um den Punkt (1, 2) bis zur linearen Ordnung nach Taylor. Geometrisch betrachtet, haben sie damit die Ebene gefunden, die die Funktion $f(x, y)$ im Punkt (1, 2) bestmöglich approximiert. Dies ist die Tangentialebene T an f in (1, 2). Wenn sie nun noch die Tangentialebene T mit der Ebene $z = 2$ schneiden, so erhalten sie die Tangente t an die Kurve $xy^2 - yx^3 = 2$. Ohne diese Beziehung nach x oder y aufzulösen, können sie somit die Gleichung der Tangente dieser Kurve im Punkt (1, 2) bestimmen. Wie lautet sie?

11. (Partielle Ableitung) **Kugelsymmetrie**

(a) Berechnen sie für den Betrag des Ortsvektors $r = |\vec{r}| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ den Gradienten in 2, 3 und n Dimensionen.

(b) Zeigen sie: Falls $f(x, y)$ nur vom Abstand des Punktes (x, y) vom Ursprung abhängt, d.h. falls $f(x, y) = f(\sqrt{x^2 + y^2}) = f(r)$ mit $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ gilt, dann kann man den Gradienten wie folgt berechnen:

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\vec{r}}{r} \tag{18.46}$$

mit dem Ortsvektor $\vec{r} = \binom{x}{y}$. Hängt Ihr Beweis der Beziehung (18.46) von der Zahl der Dimensionen (hier 2) ab, oder gilt (18.46) auch in n Dimensionen?

(c) Berechnen sie den Gradienten für $f(x, y) = \exp(-x^2 - y^2)$ sowie für das Coulombpotential in drei Dimensionen $\phi(x, y, z) = a/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

12. (Partielle Ableitung) **Partielle Differentialgleichungen II: Diffusionsgleichung**

Eine Gleichung der Form

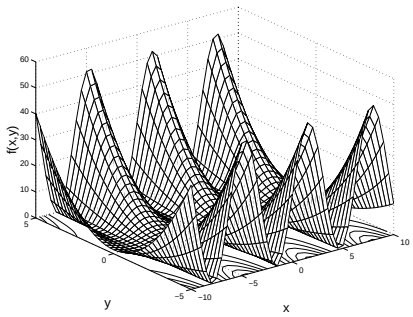
$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2}$$

heißt Diffusionsgleichung (oder Wärmeleitungsgleichung).

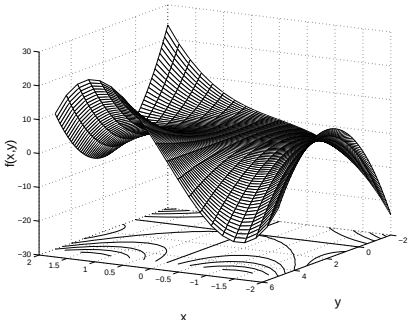
Für welche Diffusionskonstante D erfüllt die Funktion

$$f(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp(-\frac{x^2}{2t})$$

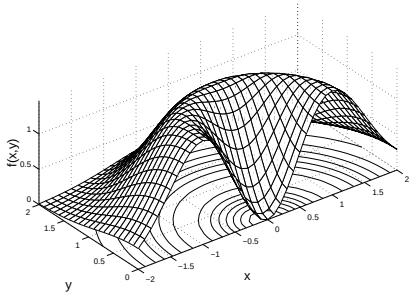
die Diffusionsgleichung? Skizzieren sie $f(x, t)$ für die Zeiten $t = 1$, 2, 3 und 4.



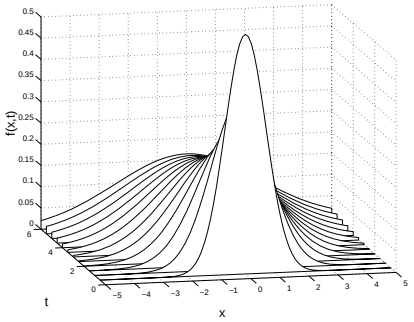
$f(x,y) = (1+\sin x)(1+y^2)$



$f(x,y) = xy^2 - yx^3$



$f(x,y) = (x^2+y^2)e^{-x^2-y^2}$



$f(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp(-\frac{x^2}{2t})$

Abbildung 18.5: Eine kleine Galerie.

Anhang A

Lösungen der Aufgaben

A.1 Aufgaben zu Kapitel 1

1. (Bruchrechnen) Bestimmen Sie

(a) $\frac{6}{5} \cdot \frac{10}{3} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5}{5 \cdot 3} = 4$

(b) $\frac{2}{197} \cdot \frac{197}{3} = \frac{2}{3}$

(c) $\frac{3^2}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{3}{2}$

(d) $\frac{3}{2} + \frac{5}{2} = \frac{8}{2}$

(e) $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{4+3}{12} = \frac{7}{12}$

(f) $\frac{3}{2} - \frac{2}{3} = \frac{9-4}{6} = \frac{5}{6}$

(g) $\frac{2}{3} - \frac{5}{4} = \frac{8-15}{12} = -\frac{7}{12}$

(h) $\frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{10}} = \frac{2}{5} \cdot \frac{10}{3} = \frac{4}{3}$

(i) $\frac{\frac{5}{7}}{\frac{10}{21}} = \frac{5}{7} \cdot \frac{21}{10} = \frac{3}{2}$

---

2. (Summen) Berechnen Sie folgende Summen:

(a) $\sum_{k=1}^{5} k = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$

(b) $\sum_{\alpha=2}^{4} \alpha^2 = 2^2 + 3^2 + 4^2 = 4 + 9 + 16 = 29$

(c) $\sum_{n=4}^{6} (n-2)^2 = \sum_{\alpha=2}^{4} \alpha^2 = 29 \quad (\text{mit } \alpha = n - 2)$

---

3. (Betrag, Ungleichung) Für welche x sind folgende Ungleichungen erfüllt?

Die Definition des Betrags von x : $\quad |x| := \begin{cases} x & : \quad x \geq 0 \\ -x & : \quad x < 0 \end{cases}$

(a) $\quad |x| < 2 \Leftrightarrow (x \geq 0 \text{ und } x < 2) \text{ oder } (x < 0 \text{ und } x > -2)$
$\Leftrightarrow -2 < x < 2$

(b) $\quad |x - 1| > 2$
$\Leftrightarrow \quad (x - 1 \geq 0 \text{ und } x - 1 > 2) \text{ oder } (x - 1 < 0 \text{ und } -(x - 1) > 2)$

$\Leftrightarrow \quad (x \geq 1 \text{ und } x > 3) \text{ oder } (x < 1 \text{ und } x < -1)$
$\Leftrightarrow \quad x > 3 \text{ oder } x < -1$

(c) $|x+2| \leq 4$
$\Leftrightarrow \quad (x+2 \geq 0 \text{ und } x+2 \leq 4) \text{ oder } (x+2 < 0 \text{ und } -(x+2) \leq 4)$
$\Leftrightarrow \quad (x \geq -2 \text{ und } x \leq 2) \text{ oder } (x < -2 \text{ und } x \geq -6)$
$\Leftrightarrow \quad -6 \leq x \leq 2$

---

4. (Summen) Berechnen Sie folgende Summen:

(a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{4} i = 1+2+3+4 = 10$

(b) $\displaystyle\sum_{m=0}^{3} (m+1) = 1+2+3+4 = 10$

(c) $\displaystyle\sum_{\nu=2}^{5} 3 = 3\sum_{\nu=2}^{5} 1 = 3 \cdot 4 = 12$

(d) $\displaystyle\sum_{\mu=1}^{N} a = a\sum_{\mu=1}^{N} 1 = aN$

(e) $\displaystyle\sum_{q=1}^{4} 2^q = 2+2^2+2^3+2^4 = 2+4+8+16 = 30$

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{3} n^2 = 1^2+2^2+3^2 = 1+4+9 = 14$

(g) $\displaystyle\sum_{q=3}^{5} (q-2)^2 = \sum_{n=1}^{3} n^2 = 14$ wobei $n = q-2$ gesetzt wurde; vgl. 1f

(h) $\displaystyle\sum_{a=0}^{4} a - \sum_{b=0}^{4} b = 0$ (Der Wert der Summe ist unabhängig vom Laufindex)

(i) $\displaystyle\sum_{\nu=0}^{4} \nu^2 - \sum_{\mu=0}^{3} \mu^2 = \sum_{\nu=0}^{3} \nu^2 + 4^2 - \sum_{\nu=0}^{3} \nu^2 = 4^2 = 16$

---

5. (Summen) Schreiben Sie folgende Summen ohne Summenzeichen:

(a) $\displaystyle\sum_{\alpha=2}^{6} x^\alpha = x^2+x^3+x^4+x^5+x^6$

geometrische Reihe allgemein: $\displaystyle\sum_{\alpha=0}^{n} x^\alpha = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$, hier: $\displaystyle\frac{x^7-1}{x-1} - x - 1$

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} (-1)^k \frac{x^k}{k} = -x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5}$

---

6. (Summen) Schreiben Sie folgende Summen mit dem Summenzeichen:

(a) $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots + x^{20} = \sum_{k=0}^{20} x^k$

(b) $x + 4x^2 + 9x^3 + 16x^4 + \ldots + 100x^{10} = \sum_{k=1}^{10} k^2 x^k$

(c) $1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots + x^8 = \sum_{k=0}^{8} (-1)^k x^k$

(d) $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots - \frac{x^{12}}{12} = \sum_{k=1}^{12} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$

---

7. (Summen, Mittelwert, Varianz) Werden bei einem Experiment n Meßwerte x_1, x_2, $\ldots$, x_n gemessen, dann heißt

$$\overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \quad \text{“arithmetisches Mittel” und} \tag{1.1}$$

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 \quad \text{“Varianz”.} \tag{1.2}$$

Zeigen Sie:

$$\sigma_x^2 = \overline{x^2} - \overline{x}^2 \tag{1.3}$$

wobei

$$\overline{x^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \tag{1.4}$$

Bemerkung: $\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2}$ heißt “Standardabweichung”.

$$\begin{aligned}
\sigma_x^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 - 2x_i\overline{x} + \overline{x}^2) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} 2x_i\overline{x} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \overline{x}^2 \\
&= \overline{x^2} - 2\overline{x} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i + \overline{x}^2 \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} 1 \\
&= \overline{x^2} - 2\overline{x} \cdot \overline{x} + \overline{x}^2 \\
&= \overline{x^2} - \overline{x}^2
\end{aligned}$$

---

8. (Betrag, Ungleichung) Für welche x sind folgende Ungleichungen erfüllt?

(a) $3|x-1| < 4$
$\Leftrightarrow \quad |x-1| < \frac{4}{3}$
$\Leftrightarrow \quad (x-1 \geq 0 \text{ und } x-1 < \frac{4}{3}) \text{ oder } (x-1 < 0 \text{ und } -(x-1) < \frac{4}{3})$
$\Leftrightarrow \quad (x \geq 1 \text{ und } x < \frac{7}{3}) \text{ oder } (x < 1 \text{ und } x > -\frac{1}{3})$
$\Leftrightarrow \quad (1 \leq x < \frac{7}{3}) \text{ oder } (-\frac{1}{3} < x < 1)$
$\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{3} < x < \frac{7}{3}$

(b) $\Big|x-|1|\Big| \geq 2$
$\Leftrightarrow \quad |x-1| \geq 2$
$\Leftrightarrow \quad (x-1 \geq 0 \text{ und } x-1 \geq 2) \text{ oder } (-(x-1) \geq 2 \text{ und } x-1 < 0)$
$\Leftrightarrow \quad x \geq 3 \text{ oder } x \leq -1, \text{ also } x \in \mathbf{R} \setminus (-1,3\ )$

(c) $|x| \leq \frac{1}{2}x + 1$
$\Leftrightarrow \quad (x \geq 0 \text{ und } x \leq \frac{1}{2}x+1) \text{ oder } (x < 0 \text{ und } -x \leq \frac{1}{2}x+1)$
$\Leftrightarrow \quad (x \geq 0 \text{ und } x \leq 2) \text{ oder } (x < 0 \text{ und } x \geq -\frac{2}{3})$
$\Leftrightarrow \quad -\frac{2}{3} \leq x \leq 2$

(d) $|2x-4| > 8x+1$
$\Leftrightarrow \quad (2x-4 \geq 0 \text{ und } 2x-4 > 8x+1) \text{ oder } (2x-4 < 0 \text{ und } -(2x-4) > 8x+1)$
$\Leftrightarrow \quad \underbrace{(x \geq 2 \text{ und } 6x < -5)}_{\text{nicht erfüllbar}} \text{ oder } (x < 2 \text{ und } 10x < 3)$
$\Leftrightarrow \quad (x < 2 \text{ und } x < \frac{3}{10}) \Leftrightarrow x < \frac{3}{10}$

---

9. (Beispiel aus der Gewässerbiologie) Die Köcherfliegenlarven der Gattung *Hydropsyche* leben am Boden von Fließgewässern. Dort bauen sie kleine Netze (durchschnittliche Anströmfläche $\overline{A}_H = 48\ \text{mm}^2$), die das in dem Wasser driftende organische Material (sog. Seston: Plankton, kleine Makroinvertebraten (z.B. Insekten), abgestorbenes Pflanzenmaterial) herrausfiltern, wovon sie sich dann ernähren. Um abschätzen zu können, welche Nahrungsmenge den Larven pro Tag zur Verfügung steht, wird an einem Tag alle 2 Stunden eine Driftmessung durchgeführt. Dazu wird ein Driftnetz mit kreisrunder Öffnung (Durchmesser $d = 11.3$ cm) für jeweils eine halbe Stunde ($= \Delta t$) in dem Fließgewässer aufgestellt. Dabei wurden folgende Mengen m_i an Seston aus dem Wasser gefiltert:

Uhrzeit	1:00	3:00	5:00	7:00	9:00	11:00	13:00	15:00	17:00	19:00	21:00	23:00
m_i/g	1.1	2.8	1.5	1.1	1.8	1.7	1.6	1.7	1.2	1.4	1.2	1.5

Die Fließgeschwindigkeit betrug $v = 40$ cm/s.

(a) Welche Anströmfläche A hat das Driftnetz?
$A = \pi r^2 = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \pi \frac{11.3^2}{4} cm^2 \approx 100\,\text{cm}^2$ (3 gültige Stellen)

(b) Wieviel Trockengewicht (TG) Seston $\overline{m}$ wurde im Durchschnitt in einer halben Stunde mit dem Driftnetz aus dem Wasser gefiltert? Wie groß ist die zugehörige Standardabweichung?

$$\overline{m} = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^{12} m_i = 1.55\text{g}\,,$$

$$\begin{aligned}\sigma_m^2 &= \overline{m^2} - \overline{m}^2 \\ &= 2.5983\ \mathrm{g}^2 - 2.4025\ \mathrm{g}^2 \\ &= 0.1958\ \mathrm{g}^2\end{aligned}$$

$\rightarrow\ \sigma_m = 0.44\,\mathrm{g}$ (Die einzelnen Massen waren auf zwei Stellen genau angegeben)

(c) Wie groß ist die Sestonflussdichte $j = \frac{\overline{m}}{A\Delta t}$ (Sestontrockenmasse pro Querschnittsfläche und Zeit in $\frac{\mathrm{mg}}{\mathrm{cm}^2\mathrm{min}}$?

$$\begin{aligned}j &= \frac{\overline{m}}{A \cdot \Delta t} \\ &= \frac{1.55\ \mathrm{g}}{100\ \mathrm{cm}^2 \cdot 30\ \mathrm{min}} \\ &= \frac{1.55}{3000} \cdot 1000\ \frac{\mathrm{mg}}{\mathrm{cm}^2\mathrm{min}} \\ &\approx 0.52\ \frac{\mathrm{mg}}{\mathrm{cm}^2\mathrm{min}}\end{aligned}$$

(d) Welche Strecke legt ein Wassermolekül in diesem Fließgewässer in einer halben Stunde zurück? Welches Wasservolumen V (in Litern) ist in einer halben Stunde durch das Netz geflossen?

Angenommen, das Wassermolekül fliesst mit der Fliessgeschwindigkeit $v = 40\ \frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}$, dann legt es in einer halben Stunde (30 min bzw. 1800 s)

$$\begin{aligned}l &= v \cdot \Delta t \\ &= 40\ \frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}} \cdot 1800\ \mathrm{s} = 72\,000\ \mathrm{cm}\end{aligned}$$

zurück. Durch das Netz sind dann

$$\begin{aligned}V &= A \cdot l = 100\ \mathrm{cm}^2 \cdot 72\,000\ \mathrm{cm} \\ &= 7.2 \cdot 10^6\ \mathrm{cm}^3 = 7200\,\mathrm{l} = 7.2\ \mathrm{m}^3\end{aligned}$$

geflossen.

(e) Wie groß ist die Sestonkonzentration ρ (Milligramm Seston TG pro Liter Wasser)?

Da in einer halben Stunde 7200 l Wasser durch das Netz fliessen und im Mittel dabei 1.55 g herausgefiltert werden können, ist

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{1.55}{7200} \cdot \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{l}} \\ &= 0.00022\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{l}} = 0.22\ \frac{\mathrm{mg}}{\mathrm{l}}\end{aligned}$$

(f) Wieviel Milligramm Seston TG hat das Netz der Köcherfliege an einem Tag aus dem Wasser gefiltert?

Die Larve filtert mit ihrem Netz pro Tag ($T = 24 \cdot 60\,\mathrm{min}$)

$$\begin{aligned}m_H &= j \cdot A_H \cdot T \\ &= 0.52\ \frac{\mathrm{mg}}{\mathrm{cm}^2\ \mathrm{min}} \cdot 0.48\ \mathrm{cm}^2 \cdot 1440\ \mathrm{min} = 360\ \mathrm{mg}\end{aligned}$$

(g) Die Tiere des 5. Larvenstadiums von *Hydropsyche pellucidula* haben ein Trockengewicht von durchschnittlich 7.6 mg. Um zu überleben, benötigen sie täglich 85% ihres Körpergewichtes an Nahrung. Reicht also die in ihr Netz gedriftete Menge an Seston aus?

In das Netz driften

$$\frac{360 \text{ mg} \cdot 100}{7.6 \text{ mg}} = 4700 \text{ \%}$$

ihres Körpergewichts.

A.2 Aufgaben zu Kapitel 2

1. (Funktionen) Skizzieren Sie folgende Funktionen $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$:

(a)	$f(x) = x$	(e)	$f(x) = -2x + 3$	(i)	$f(x) = 2x^2$
(b)	$f(x) = 2x$	(f)	$f(x) = 2x - 3$	(j)	$f(x) = x^2/2$
(c)	$f(x) = x/2$	(g)	$f(x) = -2x - 3$	(k)	$f(x) = x^3$
(d)	$f(x) = 2x + 3$	(h)	$f(x) = x^2$	(l)	$f(x) = 1/x$

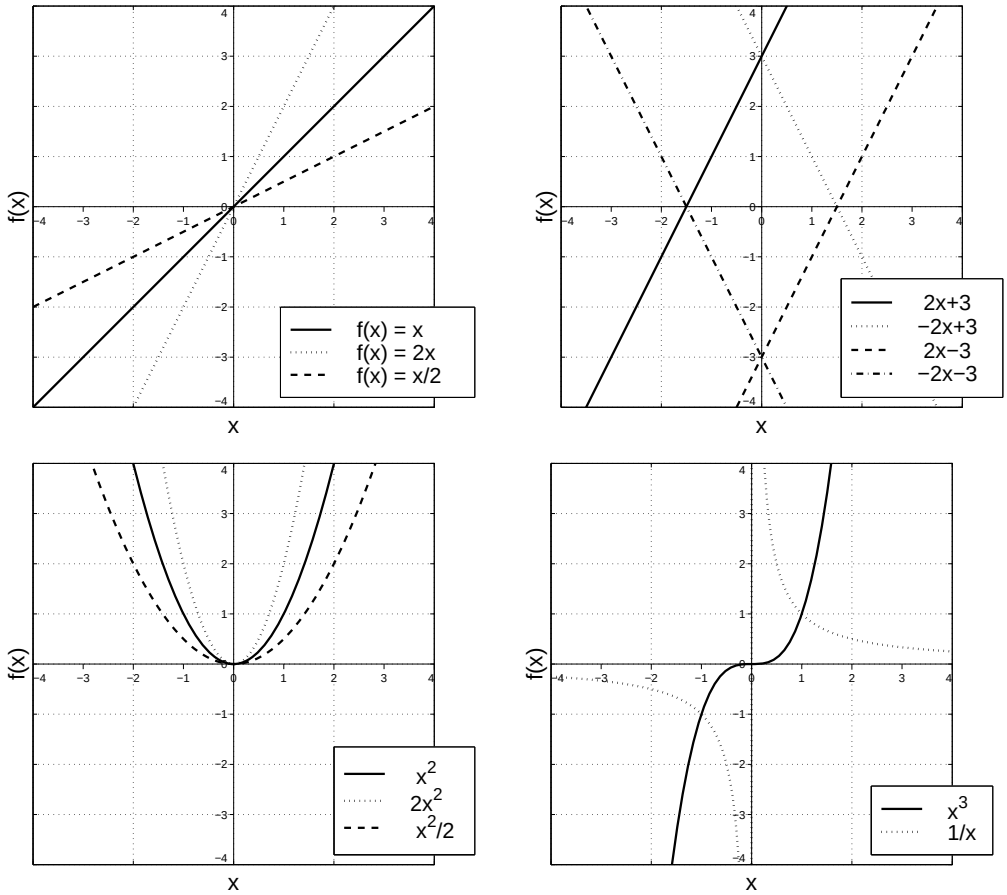


Abbildung A.1: zu Aufgabe 1 von Kapitel 2

2. (Quadratische Gleichungen)

Vorbemerkung: Ein Produkt ist genau dann Null, wenn einer seiner Faktoren Null ist (und keiner divergiert; siehe später). Das heisst für quadratische Gleichungen der Form

$$(x-a)(x-b)=0 \iff x^2-(a+b)x+ab=0$$

kann man die beiden Lösungen $x_1=a$ und $x_2=b$ aus der linken Form sofort ablesen. Mitunter gelingt es aber auch aus der Form $x^2+px+q=0$ die Faktorzerlegung indirekt abzulesen und zwar dann, wenn es gelingt, die Zerlegung $-p=a+b$ und $q=ab$ zu „sehen“ (Satz von Vieta). Natürlich bleibt aber immer der Weg über die pq–Formel

$$x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\,.$$

Hier nun:

(a) $(x-2)^2=0 \;\Leftrightarrow\; x-2=0 \;\Leftrightarrow\; x=2$

(b) $2(x+3)^2=8 \;\Leftrightarrow\; (x+3)^2=4 \;\Leftrightarrow\; x_{1,2}+3=\pm\sqrt{4} \;\Leftrightarrow\; x_{1,2}=-3\pm 2 \;\Leftrightarrow\; x_1=-1\,,\; x_2=-5$

(c) $(x-1)(x+2)=0 \;\Leftrightarrow\; x-1=0$ oder $x+2=0 \;\Leftrightarrow\; x_1=1\,,\; x_2=-2$

(d) $x(x-1)=0 \;\Leftrightarrow\; x_1=0\,,\; x_2=1$

(e) $x^2+2x=0 \;\Leftrightarrow\; x(x+2)=0 \;\Leftrightarrow\; x_1=0\,,\; x_2=-2$

(f) $4x^2-3x=0 \;\Leftrightarrow\; x(4x-3)=0 \;\Leftrightarrow\; x_1=0\,,\; x_2=\frac{3}{4}$

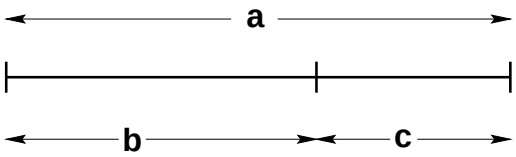
(g) $x^2+2x-3=0 \;\Leftrightarrow\; (x+3)(x-1)=0 \;\Leftrightarrow\; x_1=-3$ oder $x_2=1$

(h) $x^2=3x+4 \;\Leftrightarrow\; x^2-3x-4=0 \;\Leftrightarrow\; (x-4)(x+1)=0 \;\Leftrightarrow\; x_1=4$ oder $x_2=-1$

(i) $\frac{1}{2}x^2+x=3 \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{2}x^2+x-3=0 \;\Leftrightarrow\; x^2+2x-6=0 \;\Leftrightarrow\; x_{1,2}=-1\pm\sqrt{1+6} \;\Leftrightarrow\; x_{1,2}=-1\pm\sqrt{7}$

---

3. (Quadratische Gleichung) Eine Strecke soll so geteilt werden, dass der kürzere Teil sich zu dem längeren Teil so verhält, wie der längere Teil zur ganzen Strecke. Wie lang ist der längere Teil relativ zur ganzen Strecke? Dieses Verhältnis wird *Goldener Schnitt* genannt.



Randbedingungen: (I) $b+c=a$ und (II) $\dfrac{b}{c}=\dfrac{a}{b} \;\Leftrightarrow\; b^2=ac$

I in II: $b^2+ab-a^2=0 \;\Leftrightarrow\; (\frac{b}{a})^2+(\frac{b}{a})-1=0 \;\Leftrightarrow\; (\frac{b}{a})_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+1}=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{5}{4}}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

Da die negative Lösung geometrisch keinen Sinn ergibt, ist

$$\frac{b}{a} \;=\; \frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618$$

die Lösung.

---

4. (Scheitelpunktgleichung) Wo liegt der Scheitel folgender Parabeln? Sind die Parabeln nach oben oder nach unten geöffnet?
Allgemein hat die Parabel

$$\begin{aligned} y &= ax^2 + bx + c \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{a} \end{aligned}$$

mit $D = \frac{b^2}{4} - ac$ ihren Scheitelpunkt bei $x_S = -\frac{b}{2a}$ und $y_S = -\frac{D}{a}$. Die Parabel ist nach oben geöffnet, falls $a > 0$ gilt.

(a) $f(x) = 2(x+3)^2 - 2 \;\rightarrow\; S : (-3, -2)$; oben

(b) $f(x) = x^2 + 2x \;\rightarrow\; a = 1,\ b = 2,\ c = 0 \;\rightarrow\; D = 1 \;\rightarrow\; S : (-1, -1)$; oben

(c) $f(x) = -4x^2 + 12x \;\rightarrow\; a = -4,\ b = 12,\ c = 0 \;\rightarrow\; D = 36 \;\rightarrow\; S : (\frac{3}{2}, 9)$; unten

(d) $f(x) = x^2 + 2x - 3 \;\rightarrow\; a = 1,\ b = 2,\ c = -3 \;\rightarrow\; D = 4 \;\rightarrow\; S : (-1, -4)$; oben

(e) $f(x) = -2x^2 + 6x + 4 \;\rightarrow\; a = -2,\ b = 6,\ c = 4 \;\rightarrow\; D = 17 \;\rightarrow\; S : (\frac{3}{2}, \frac{17}{2})$; unten

(f) $f(x) = (x-2)(x-4) \;\rightarrow\; a = 1,\ b = -6,\ c = 8 \;\rightarrow\; D = 1 \;\rightarrow\; S : (3, -1)$; oben

(g) $f(x) = 2(x-3)(x+5) = 2x^2 + 4x - 30 \;\rightarrow\; a = 2,\ b = 4,\ c = -30 \;\rightarrow\; D = 64 \;\rightarrow\; S : (-1, -32)$; oben

(h) $f(x) = x(x-1) + 2 = x^2 - x + 2 \;\rightarrow\; a = 1,\ b = -1,\ c = 2 \;\rightarrow\; D = -\frac{7}{4} \;\rightarrow\; S : (\frac{1}{2}, \frac{7}{4})$; oben

---

5. (Beispiel aus der Physik: Wurfparabel) Wird am Ort $x_0 = 0$ ein Ball in die Luft geworfen, dann entspricht (bei Vernachlässigung der Luftreibung) seine Bewegung folgender Parabel:

$$h(x) = \frac{v_y}{v_x}x - \frac{1}{2}\frac{g}{v_x^2}x^2 \tag{1.5}$$

Darin ist g die Erdbeschleunigung, $v_x \neq 0$ die horizontale und v_y die vertikale Geschwindigkeitskomponente beim Loslassen des Balls. $h(x)$ ist die Höhe des Balls h in Abhängigkeit vom Ort x.

$$h(x) = \frac{v_y}{v_x}x - \frac{1}{2}\frac{g}{v_x^2}x^2 = ax^2 + bx + c \;\text{ mit }\; a = -\frac{1}{2}\frac{g}{v_x^2},\ b = \frac{v_y}{v_x},\ c = 0$$

(a) Welche Höhe erreicht der Ball maximal? Wie weit ist er bis dahin geflogen?
Der Scheitelpunkt liegt bei

$$x_\mathrm{S} = -\frac{b}{2a} = -\frac{\frac{v_y}{v_x}}{2(-\frac{1}{2})\frac{g}{v_x^2}} = \frac{v_x v_y}{g} \;\text{ mit }\; h(x_S) = \frac{v_y}{v_x}\frac{v_y v_x}{g} - \frac{g}{2v_x^2}\frac{v_y^2 v_x^2}{g^2} = \frac{v_y^2}{2g}$$

$\rightarrow\; h_\mathrm{max} = h_{x_\mathrm{S}} = \dfrac{v_y^2}{2g}$; bis dahin ist der Ball $x_\mathrm{S} = \dfrac{v_x v_y}{g}$ weit geflogen.

(b) Wie weit fliegt der Ball insgesamt?

Die Flugweite beträgt wegen der Symmetrie der Flugbahn das Doppelte der Entfernung des Scheitelpunkts vom Ursprung. Berechnung des Schnittpunktes der Parabel mit der x–Achse:

$$\begin{aligned} & h(x) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x = 0 \ \text{ oder } \ x = \frac{v_y}{v_x}\frac{2v_x^2}{g} = 2\frac{v_x v_y}{g} \end{aligned}$$

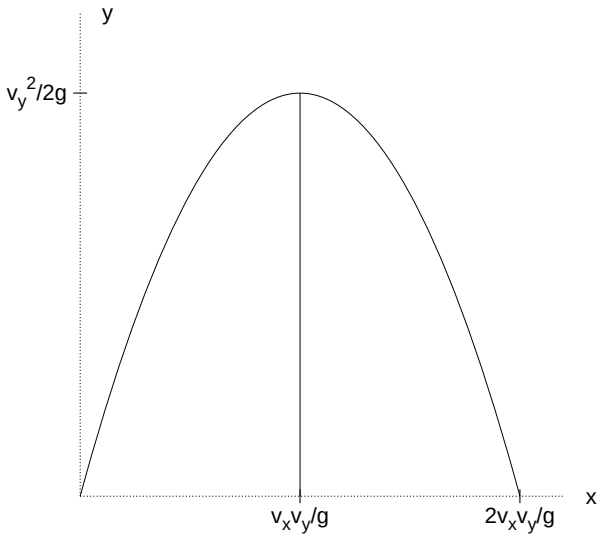


Abbildung A.2: Skizze der Wurfbahn

---

6. (Beispiel aus der Populationsökologie) Eine Population von z.B. Fruchtfliegen bestehe aus N Individuen. Die Anzahl der neugeborenen Fliegen pro Tag sei proportional zur Anzahl der Indviduen: $N_b = rN$. Dabei ist r die Geburtenrate. Die Anzahl der gestorbenen Tiere pro Tag N_d ist auf Grund von Nahrungsmangel bei zu großen Populationen größer als allein durch das Sterben alter Tiere. Dies kann in seiner einfachsten Form durch eine quadratische Abhängigkeit von der Populationsgröße berücksichtigt werden: $N_d = aN^2$. Darin ist $a \in \mathbf{R}^+$ ein geeigneter Proportionalitätsfaktor. Bei welcher Populationsgröße N wird die Anzahl der Geburten pro Tag genau durch die Todesfälle ausgeglichen?

$$\begin{aligned} &\text{Neugeborene: } N_b = rN \\ &\text{Sterbefälle: } N_d = aN^2, \ a > 0 \end{aligned}$$

Wann (für welche N) ist $N_b = N_d$?

$$\begin{aligned} & N_b = N_d \\ \Leftrightarrow \quad & rN = aN^2 \\ \Leftrightarrow \quad & (r - aN)N = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & N = 0 \ \text{ oder } \ N = \frac{r}{a} \end{aligned}$$

7. (Umkehrfunktion) Wie lauten die Umkehrfunktionen folgender Funktionen? Für welche x sind die Funktionen bzw. ihre Umkehrfunktionen überhaupt definiert?

(a)

$$\begin{aligned} & y = 2(x+3)^2 - 2 \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{y+2}{2} = (x+3)^2 \\ \Leftrightarrow \quad & x+3 = \pm\sqrt{\frac{y}{2}+1} \\ \Leftrightarrow \quad & x = -3 \pm \sqrt{\frac{y}{2}+1},\ y \geq -2 \end{aligned}$$

Um nun eine bijektive und damit umkehrbare Funktion zu erhalten, muss man den Definitionsbereich einschränken und die Zielmenge auf die Wertemenge begrenzen (vgl. die Umkehrung von x^2 im Skript). Hier ist $y \geq -2$ die Wertemenge und für $x \geq -3$ ist die positive Wurzel die Umkehrfunktion und für $x \leq -3$ die negative.

(b)

$$\begin{aligned} & y = -2x^2 + 6x + 4 \\ \Leftrightarrow \quad & y = -2(x - \frac{3}{2})^2 + \frac{17}{2} \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{17}{4} - \frac{y}{2} = (x - \frac{3}{2})^2 \\ \Leftrightarrow \quad & x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{17}{4} - \frac{y}{2}},\ y \leq \frac{17}{2} \end{aligned}$$

Hier ist $y \leq \frac{17}{2}$ die Wertemenge und für $x \geq \frac{3}{2}$ ist die positive Wurzel die Umkehrfunktion und für $x \leq \frac{3}{2}$ die negative.

(c)

$$\begin{aligned} & y = 3\sqrt{x-2} \\ \Leftrightarrow \quad & x - 2 = \frac{y^2}{9} \\ \Leftrightarrow \quad & x = \frac{1}{9}y^2 + 2 \end{aligned}$$

Für $y \geq 0$ ist dies die gesuchte Umkehrfunktion.

(d) Für $y(x) = \sqrt{x^2+4}$ ist $y(x) = y(-x)$, also ist y nicht injektiv und somit nicht umkehrbar. Erst unter der Einschränkung $x \geq 0$ oder $x \leq 0$ und der Angabe der Wertemenge $y \geq 2$ kann die Umkehrfunktion gebildet werden und es ist

$$\begin{aligned} & y = \sqrt{x^2+4} \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 = y^2 - 4 \\ \Leftrightarrow \quad & x = \pm\sqrt{y^2-4},\ y \geq 2 \end{aligned}$$

---

8. (Umkehrfunktionen)

(a) Welche Geraden $y = mx + b$ sind identisch mir ihrer Umkehrfunktion?
Umkehrfunktion zu $y = mx + b$ ist $x = \frac{1}{m}(y - b) = \frac{1}{m}y - \frac{b}{m}$
Beide Funktionen sind gleich, falls

$$1.\ m = \tfrac{1}{m} \text{ und } 2.\ b = -\tfrac{b}{m}$$

Aus 1. folgt $m = \pm 1$. Im Fall $m = 1$ folgt aus 2. $b = 0$, andernfalls ($m = -1$) kann b beliebig aus $\mathbf{R}$ gewählt werden. Es sind also $y = x$ und $y = -x + b,\ b \in \mathbf{R}$, die Geraden, die ihren eigenen Umkehrfunktion entsprechen.

(b) Welche Hyperbeln $y = \frac{c}{x-a} + b$ sind identisch mit ihrer Umkehrfunktion?
Umkehrfunktion zu $y = \frac{c}{x-a} + b,\ x \neq a$ ist $x = \frac{c}{y-b} + a,\ y \neq b$. Beide Funktionen sind gleich, falls $a = b$ für beliebiges $c \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Der Fall $c = 0$ muss ausgenommen werden, da $y = b,\ b \in \mathbf{R}$, nicht injektiv und somit nicht umkehrbar ist.

---

9. (Komposition von Funktionen) Um schnell einen Eindruck von dem Aussehen einer zusammengesetzten Funktion wie z.B. $f(x) = \sqrt{\sin^2(x) + 1}$ zu bekommen, ohne die Funktion gleich diskutieren zu müssen, sollte man sich einfach Schritt für Schritt klar machen, was diese Funktion macht. Also:

(a) Wie sieht $y = \sin(x)$ aus?
(b) Was passiert mit $\sin(x)$, wenn seine Funktionswerte quadriert werden?
(c) Was bewirkt das $+1$?
(d) Wie wirkt sich schließlich die Wurzel darauf aus?

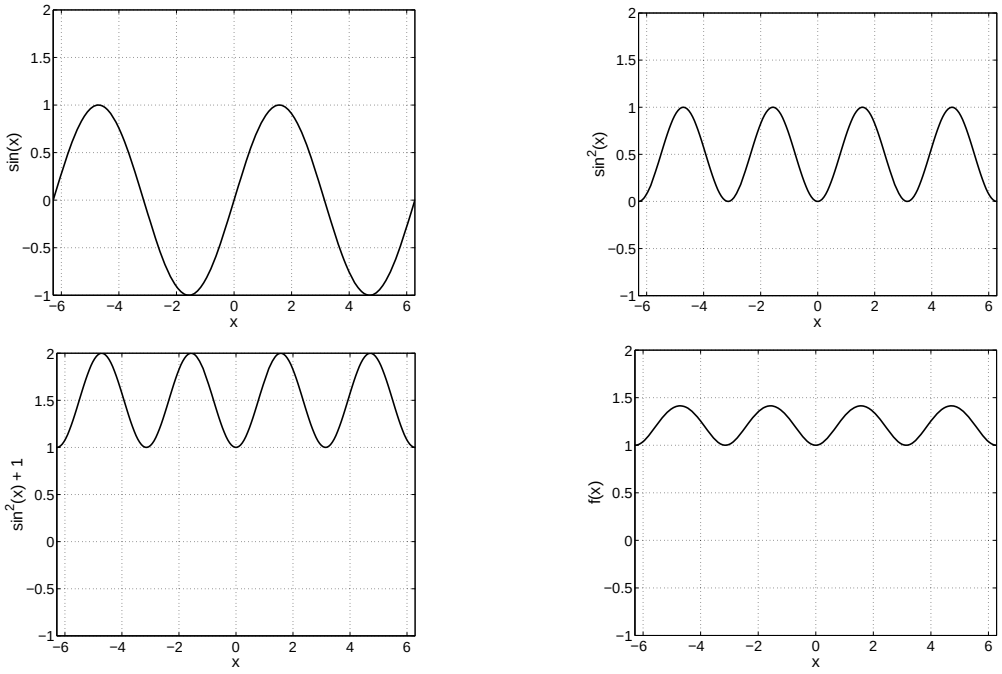


Abbildung A.3: zu $f(x) = \sqrt{\sin^2(x) + 1}$

Veranschaulichen Sie sich in gleicher Weise die beiden Funktionen

$$g(x) = \frac{1}{x^2 + 2} \quad \text{und} \quad h(x) = (\mathrm{e}^x - 1)^2 \ !$$

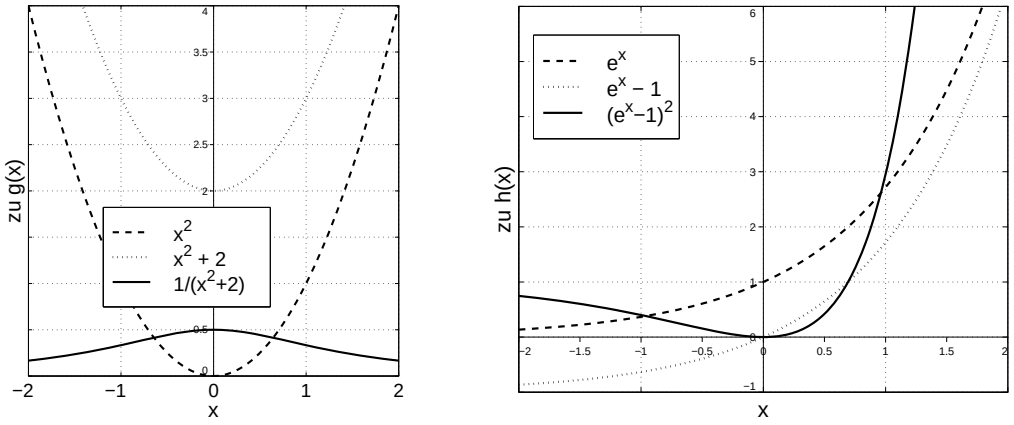


Abbildung A.4: zu $g(x) = \frac{1}{x^2+2}$ (links) und $h(x) = (\mathrm{e}^x - 1)^2$ (rechts)

---

10. (Komposition von Funktionen) Skizzieren Sie die Funktion $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R},\ x \mapsto (x+1)\mathrm{e}^{-4x}$. Überlegen Sie sich dazu die Form der einzelnen Komponenten dieser Funktion. Welchen Definitionsbereich, welche Ziel- und Wertemenge hat die Funktion? Ist sie injektiv und/oder surjektiv? Kann man f umkehren?

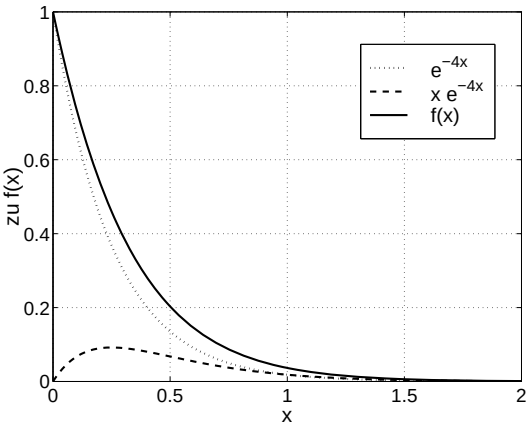


Abbildung A.5: zu $f(x) = (x+1)\mathrm{e}^{-4x}$

Die Definitionsmenge ist $\mathbf{R}^+$, die Zielmenge ist $\mathbf{R}$, die Wertemenge $(0, 1)$. Die Funktion ist injektiv. Surjektiv ist sie erst, wenn man die Zielmenge auf $(0, 1)$ einschränkt. Unter dieser Einschränkung ist $f(x)$ dann auch umkehrbar.

---

11. (Komposition von Funktionen) Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen $f(x) = -x^3 + 4x$ und $g(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2x^2$! Überlegen Sie sich dazu, wie sich die Funktionen für sehr große und sehr kleine Werte von x verhalten (d.h. asymptotisch ($|x| \to \infty$) und in

der Nähe von Null ($|x| \ll 1$)), und berechnen Sie die Nullstellen. Sie sollen nicht die Lage eventueller Extremstellen berechnen!

Skizzieren Sie außerdem den Graphen der Gaußfunktion $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$. Kann diese Funktion Nullstellen haben?

$f(x) = -x^3 + 4x = x \cdot (4 - x^2)$

1. Nullstellen: $x_1 = 0,\ x_{2,3} = \pm 2$
2. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$
4. Für $0 < x \ll 1$ ist $x > x^3 \ \rightarrow\ 4x$-Term dominant $\rightarrow\ f(x) > 0$
5. Für $-1 \ll x < 0$ ist $x < x^3 < 0$ aber $|x| > |x^3| \ \rightarrow\ 4x$-Term dominant $\rightarrow\ f(x) < 0$

$g(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2x^2 = \frac{1}{2}x^2(x^2 - 4)$

1. Nullstellen: $x_1 = 0$, sowie $x_{2,3} = \pm 2$, wie f(x)
2. $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \infty$
4. Für $0 < x \ll 1$ ist $x^2 > x^4 \ \rightarrow\ -2x^2$ dominant $\rightarrow\ g(x) < 0$
5. Für $-1 \ll x < 0$ ist ebenfalls $-2x^2$ dominant $\rightarrow\ g(x) < 0$

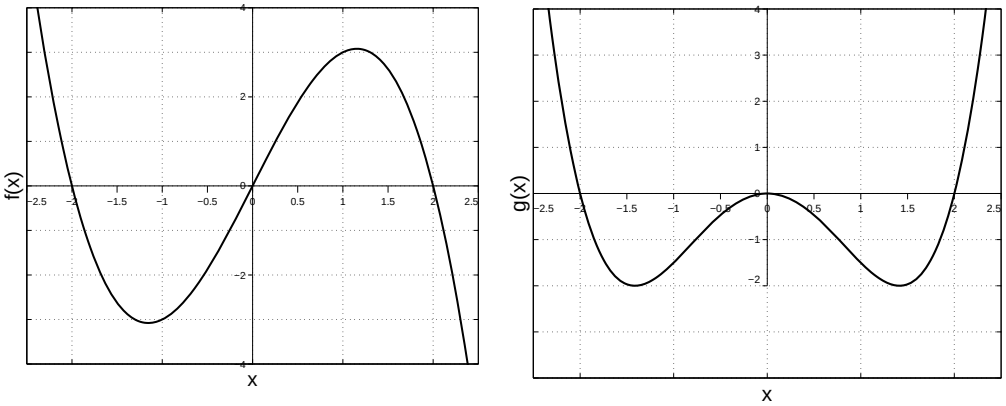


Abbildung A.6: $f(x) = -x^3 + 4x = x \cdot (4 - x^2)$ (links) und $g(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2x^2$ (rechts)

$f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ hat keine Nullstelle, da $\mathrm{e}^x > 0$ für alle $x \in \mathbf{R}$
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ und $f(0) = 1$

---

12. (Beispiel aus der Neurobiologie) In den Membranen von Zellen sind Ionenpumpen eingebaut, die bestimmte Ionensorten durch die Membran pumpen. Dadurch ist z.B. die Konzentration von Kalium-Ionen innerhalb der Zelle um das zwanzigfache höher als im extrazellulären Medium. Die Natrium-Konzentration ist dagegen außerhalb der Zelle um das fünfzehnfache größer als innerhalb. Weiterhin gibt es Ionenkanäle, die spezifisch bestimmte Ionensorten durch die Membran fließen lassen. Wenn nur Ionenkanäle in die Zellmembran eingebaut sind, die für Kalium-Ionen durchlässig sind, dann stellt sich bei dem sogenannten Kalium-Gleichgewichtspotential E_K ein Gleichgewicht zwischen dem durch den Konzentrationsunterschied hervorgerufenen Ionen-Rückfluß und dem diesen entgegenwirkenden elektrischen Feld ein, welches sich durch den Ionenfluß aufbaut. Für

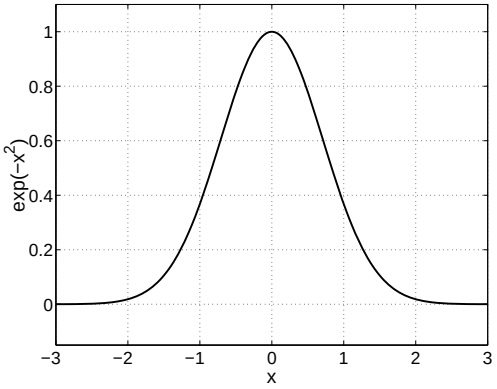


Abbildung A.7: $f(x) = \exp(-x^2)$

das Gleichgewichtspotential der Ionensorte X gilt allgemein die Nernst'sche Formel

$$E_X = 58\text{mV} \times \log_{10} \frac{[X]_o}{[X]_i} \quad , \tag{1.6}$$

wobei $[X]_i$ die Ionenkonzentration innerhalb der Zelle und $[X]_o$ die Ionenkonzentration außerhalb der Zelle ist.

(a) Wo liegen die Gleichgewichtspotentiale von Kalium und Natrium (E_K und E_Na)?

Verhältnis der Ionenkonzentrationen:

$$[\text{K}^+]_i = 20[\text{K}^+]_o$$
$$[\text{Na}^+]_o = 15[\text{Na}^+]_i$$

$$\begin{aligned} E_\text{K} &= 58\text{mV} \cdot \log_{10} \frac{[\text{K}^+]_o}{[\text{K}^+]_i} \\ &= 58\text{mV} \cdot \log_{10} \frac{[\text{K}^+]_o}{20[\text{K}^+]_o} \\ &= -75\text{mV} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_\text{Na} &= 58\text{mV} \cdot \log_{10} \frac{[\text{Na}^+]_o}{[\text{Na}^+]_i} \\ &= 58\text{mV} \cdot \log_{10} \frac{15[\text{Na}^+]_i}{[\text{Na}^+]_i} \\ &= 68\text{mV} \end{aligned}$$

Für den elektrischen Strom I, den die Ionen beim Durchfließen eines Kanals verursachen, gilt näherungsweiße das Ohmsche Gesetz:

$$I = g(V - E)\,. \tag{1.7}$$

Dabei ist V die elektrische Spannung, die über der Membran anliegt, g die Leitfähigkeit des Kanals, durch den die Ionen fließen (der Widerstand ist $R = 1/g$) und E das Gleichgewichtspotential der entsprechenden Ionensorte.

Skizzieren Sie die Strom-Spannungskennlinien (d.h. $I(V)$) für folgende Fälle (zeichnen Sie für (b), (c), (d), (e) jeweils **ein** Diagramm):

(b) In einem Membranstück seien ein, zwei oder drei Kanäle geöffnet. Im offenen Zustand haben die Kanäle alle die gleiche konstante Leitfähigkeit von jeweils g. Ihr Gleichgewichtspotential sei bei 0 mV (3 Kurven; linke Abbildung). Beachten Sie: Die Leitfähigkeit von parallel geschalteten Kanälen addiert sich.

(c) Zwei Ionenkanäle haben die gleiche Leitfähigkeit g aber unterschiedliche Gleichgewichtspotentiale. Der erste Kanal hat ein negatives Gleichgewichtspotential $E_1 = -1$ (z.B. das von Kalium E_{K}), der zweite ein positives $E_2 = 1$ (z.B. das von Natrium E_{Na}) (2 Kurven; rechte Abbildung).

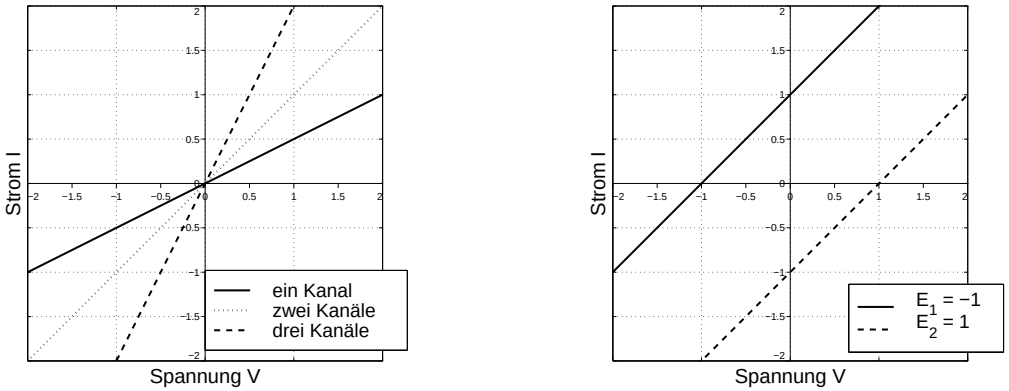


Abbildung A.8: Die Fälle mit konstanter Leitfähigkeit

(d) Die beiden Kanäle aus (b) haben nun eine spannungsabhängige Leitfähigkeit: Unterhalb einer Spannung V_g ($E_1 < V_g = -0.5 < E_2$) sei die Leitfähigkeit beider Kanäle klein, darüber ändert sie sich sprunghaft auf einen größeren Wert, d.h. ab der Spannung V_g öffnen sich die Kanäle. In Neuronen spielen solche Kanäle eine wichtige Rolle bei der Erzeugung von Aktionspotentialen (auch Spikes genannt). Das sind pulsartige Entladungen mit denen die Neurone miteinander kommunizieren (2 Kurven; linke Abbildung).

(e) Nun soll sich die Leitfähigkeit der beiden Kanäle nicht sprunghaft sondern allmählich ändern. Außerdem soll sich die Leitfähigkeit einmal bei niedriger ($V_g = -0.66$; $1a$, $2a$) und einmal bei etwas höherer ($V_g = -0.33$; $1b$, $2b$) Spannung ändern (4 Kurven; rechte Abbildung).

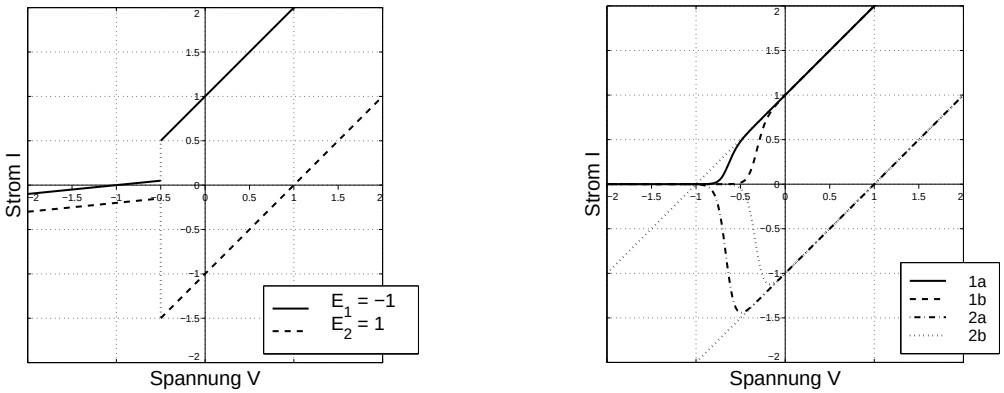


Abbildung A.9: Die Fälle mit spannungsabhängiger Leitfähigkeit

A.3 Aufgaben zu Kapitel 3

1. (Binomische Formeln) Formen Sie mit Hilfe der binomischen Formeln um und vereinfachen Sie wenn möglich!

(a) $(x+2)^2 = x^2 + 4x + 4$

(b) $(2x-3)^2 = 4x^2 - 12x + 9$

(c) $(-z+4)^2 = z^2 - 8z + 16$

(d) $(-x-2)^2 = x^2 + 4x + 4$

(e) $y^2 - 4 = (y+2)(y-2)$

(f) $y^2 + 4y + 4 = (y+2)^2$

(g) $4z^2 - 12z + 9 = (2z-3)^2$

(h) $(y-3)(y+3) = y^2 - 9$

(i) $\dfrac{x^2+6x+9}{x+3} = \dfrac{(x+3)^2}{x+3} = x+3$

(j) $\dfrac{y^2-8x+16}{y-4} = \dfrac{(y-4)^2}{y-4} = y-4$

(k) $\dfrac{(z+2)^2}{z^2-4} = \dfrac{(z+2)^2}{(z+2)(z-2)} = \dfrac{z+2}{z-2}$

---

2. (Potenzgesetze) Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke:

(a) $x^2x^5 = x^7$

(b) $(x^3xx^2)^2 = (x^{3+1+2})^2 = (x^6)^2 = x^{12}$

(c) $\dfrac{y^5x^2y}{y^4} = \dfrac{y^6x^2}{y^4} = x^2y^2 = (xy)^2$

(d) $x^{-\frac{1}{2}}\sqrt{xy} = \dfrac{\sqrt{x}\sqrt{y}}{\sqrt{x}} = \sqrt{y}$

(e) $\dfrac{xy^{-2}z^6}{z^{-4}y^2x} = \dfrac{z^{10}}{y^4}$

(f) $\left(x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{3}}x^2\right)^3 = (x^{\frac{7}{3}})^3 \cdot (y^{-\frac{1}{3}})^3 = x^7y^{-1} = \dfrac{x^7}{y}$

(g) $\dfrac{yx^a}{x^{-a}} = y \cdot x^a \cdot x^a = yx^{2a}$

(h) $\dfrac{\sqrt{xyz^2}}{x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}} = x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{1}{2}} \cdot y^{-\frac{1}{2}} \cdot z^{\frac{2}{2}} = x|z|$ Bemerkung: Wegen $z^2 = (-z)^2$ ist $\sqrt{z^2} = |z|$.

---

3. (Exponentialfunktion, Logarithmus) Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke:

(a) Für $x > 0$ gilt: $\log(x^2x^5) = \log(x^7) = 7\log(x)$

(b) Für $x > 0$ gilt: $2\ln(\sqrt{x}) = \ln(\sqrt{x}^2) = \ln(x)$

(c) $\log(x) - \log(xy) = \log\left(\frac{x}{xy}\right) = \log\left(\frac{1}{y}\right) = -\log(y)$

(d) $2^x 5^x = (2 \cdot 5)^x = 10^x$

(e) $\mathrm{e}^x \mathrm{e}^y \mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{x+y-x} = \mathrm{e}^y$

(f) Für $a > 0$ und $a \neq 1$ gilt: $\log_a(a^x) = x\log_a(a) = x \cdot 1 = x$

(g) $10^{\log_{10}(x^2)} = x^2$

(h) $\mathrm{e}^{-(x^2-4x)}\mathrm{e}^{-4} = \mathrm{e}^{-(x^2-4x+4)} = \mathrm{e}^{-(x-2)^2}$

(i) $\log\left(\frac{x^2}{y^{-2}}\right) - 2\log(x) = \log(x^2 \cdot y^2) - \log x^2 = \log(x^2) + \log(y^2) - \log(x^2) = \log(y^2) = 2\log(y)$

---

4. (Skalengesetze in der Biologie)

Die Auskühlung (=Wärmeverlust) eines Lebewesens ist proportional zu seiner Oberfläche multipliziert mit dem Temperaturunterschied zwischen Innen und Außen. Die Wärmeproduktion ist aber proportional zu seinem Volumen. (Wie sollten sich prinzipiell Wärmeproduktion und Wärmeverlust eines Tieres zueinander verhalten?) Was hat dies für die Größe von Säugetieren in den kälteren Regionen im Vergleich zu denen in den wärmeren zur Folge?

$$\text{Wärmeverlust: } \Delta W^- \sim O \cdot \Delta T \;\rightarrow\; \Delta W^- = c_1 \cdot O \cdot \Delta T$$
$$\text{Wärmeproduktion: } \Delta W^+ \sim V \;\rightarrow\; \Delta W^+ = c_2 \cdot V$$

Im Gleichgewicht sollte $\frac{\Delta W^-}{\Delta W^+} = 1$ gelten $\rightarrow$ $\frac{O \cdot \Delta T}{V} = \frac{c_2}{c_1}$.

Weil $O \sim r^2$ und $V \sim r^3$, r "Radius" des Tieres $\rightarrow$ $\frac{c_3 r^2 \Delta T}{c_4 r^3} = 1 \Leftrightarrow \Delta T = c \cdot r$ mit $c = \frac{c_4}{c_3} = \text{const.}$

Das heisst mit zunehmender Temperaturdifferenz zwischen Innen und Außen sollten die Tiere größer werden, also erwarten wir in Polargebieten größere Tiere als in den Tropen (Bergmann'sche Regel).
Durch Vergrößerung der Oberfläche bei gleichem Volumen wird der Wärmeverlust erhöht. Die geringsten Verluste bei gegebenem Volumen hat die Kugelform. Eine Reduktion von Körperauswüchsen zur Verringerung des Wärmeverlustes findet man im Tierreich entsprechend der Allen'schen Regel.

---

5. (Biomasse von Bäumen)

Wir wollen die Abhängigkeit der Masse eines Baumes von der Dichte der Bepflanzung untersuchen. Die Baumdichte ϱ ist dabei definiert als die Anzahl der Bäume auf einer

bestimmten Bodenfläche. Empirisch lässt sich nun feststellen, dass das Verhältnis L der Blattfläche aller Bäume zur Bodenfläche in etwa konstant ist. (Überlegen Sie sich, warum das so ist!),

$$L = \frac{\text{Gesamtblattfl.}}{\text{Bodenfl.}} = \text{mittl. Blattfl. eines B.} \times \frac{\text{Zahl der Bäume}}{\text{Bodenfläche}} = \overline{\lambda}\varrho = \text{const.}$$

Wir wollen nun annehmen, dass die mittlere Blattfläche $\overline{\lambda}$ eines Baumes proportional zum Quadrat seiner Höhe h, das mittlere Gewicht $\overline{w}$ hingegen proportional zur dritten Potenz der Baumhöhe ist. Wie verhält sich dann das mittlere Gewicht $\overline{w}$ eines Baumes als Funktion der Baumdichte ϱ? Diskutieren Sie Ihr Ergebnis!

Annahmen:
$$\text{I} \quad \overline{\lambda} \sim h^2 \quad \rightarrow \quad \overline{\lambda} = a \cdot h^2$$
$$\text{II} \quad \overline{w} = \sim h^3 \quad \rightarrow \quad \overline{w} = b \cdot h^3$$

Gesucht: $\overline{w}(\varrho)$
Da $\overline{\lambda} \cdot \varrho = ah^2\varrho = L \quad \rightarrow \quad h = (\frac{L}{a\varrho})^{\frac{1}{2}}$
$\rightarrow$ in II: $\overline{w} = b(\frac{L}{a\varrho})^{\frac{3}{2}} \sim \varrho^{-\frac{3}{2}}$

$$\overline{w} = w_0(\frac{\varrho_0}{\varrho})^{\frac{3}{2}}$$

Die natürliche Skala für die Baumdichte ist hier $\varrho_0 = \frac{L}{a}$ pro Fächeneinheit und w_0 ist das mittlere Gewicht für $\varrho = \varrho_0$. Für $\varrho > \varrho_0$ wird $\overline{w} < w_0$, für $\varrho < \varrho_0$ wird $\overline{w} > w_0$ mit einer Divergenz von $\overline{w}$ für $\varrho \rightarrow 0$.

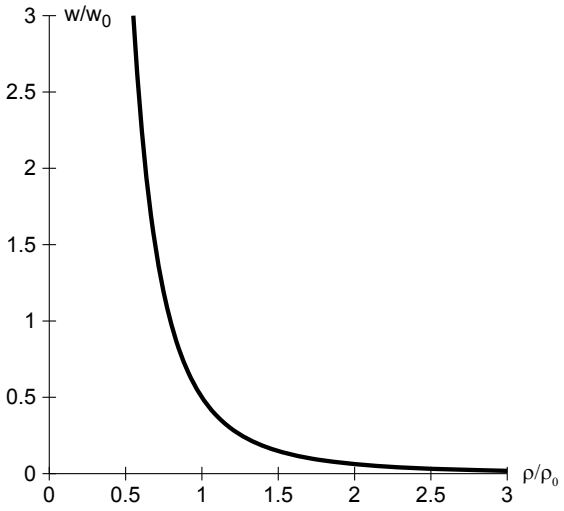


Abbildung A.10: Baummasse versus Bepflanzungsdichte

---

6. (Gewicht von Schlangen)

Bei der Untersuchung der Schlangenart *Heterodon nasicus* (Schlangenart in Kansas, USA) stellt man fest, dass ihr Gewicht w proportional zur dritten Potenz ihrer Länge l ist, $w = al^3$ und $a = 500\text{g/m}^3$. Tragen Sie diese Abhängigkeit in einer doppeltlogarithmischen Abbildung auf. (Auf der x-Achse gilt also $x = \log(l)$ und auf der y-Achse

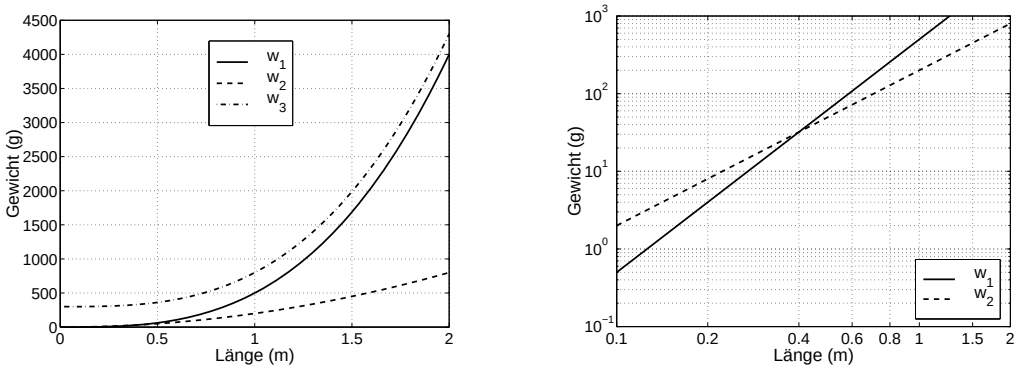


Abbildung A.11: Schlangengewicht versus -länge; linear (links) und doppeltlogarithmisch (rechts)

$y = \log(w)$, wobei l in Metern und w in Gramm gemessen wird.) Welche Kurve erhalten Sie? Für eine andere Schlangenart gelte $w = bl^2$ mit $b = 200\text{g/m}^2$. Wie verändert sich Ihr Ergebnis?

Eine weitere Schlangenart genügt der Beziehung $w = al^3 + 300\text{g}$. Auf welche Schwierigkeiten stoßen sie nun? Wie lassen sich diese umgehen?

Lösung:

1. Fall: $w_1(l) = al^3 \iff \log(w_1(l)) = 3\log(l) + \log(a)$. 2. Fall: $w_2(l) = bl^2 \iff \log(w_2(l)) = 2\log(l) + \log(b)$. 3. Fall: $w_3(l) = al^3 + c \iff \log(w_3(l)) = \log(al^3 + c)$.

Die Schwierigkeit im 3. Fall besteht darin, dass $\log(al^3 + c)$ auf Grund der Summe im Argument des Logarithmus nicht wie in den anderen Fällen dargestellt werden kann. Erst nach Umformung auf $w_3(l) - c = al^3 \iff \log(w_3(l) - c) = 3\log(l) + \log(a)$ kann der 3. auf den 1. Fall zurückgeführt werden.

---

7. (Logarithmus) Zeigen Sie durch geeignetes Logarithmieren bzw. Exponentieren:

(a) $\log_a x = \log_b x \cdot \log_a b \quad a, b, x \in \mathbf{R}^+ \backslash \{1\}$

Wegen $c \cdot \log(x) = \log(x^c)$ ist $\log_b(x) \cdot \log_a(b) = \log_a(b^{\log_b(x)}) = \log_a(x)$

(b) $\log_a(b) = \dfrac{1}{\log_b(a)} \quad a, b \in \mathbf{R}^+ \backslash \{1\}$

$$\begin{aligned} & \log_a(b) = \frac{1}{\log_b(a)} \\ \Leftrightarrow \quad & \log_a(b) \cdot \log_b(a) = 1 \\ \Leftrightarrow \quad & \log_b(a^{\log_a(b)}) = 1 \\ \Leftrightarrow \quad & \log_b(b) = 1 \end{aligned}$$

wahr für alle $a, b > 0 \quad a, b \neq 1$
alternativ: Wähle $x = a$ in (a)

(c) $\ln 10 = \dfrac{1}{\log_{10} \mathrm{e}}$

Fall (b) mit $a = \mathrm{e}$ und $b = 10$, da $\ln = \log_{\mathrm{e}}$

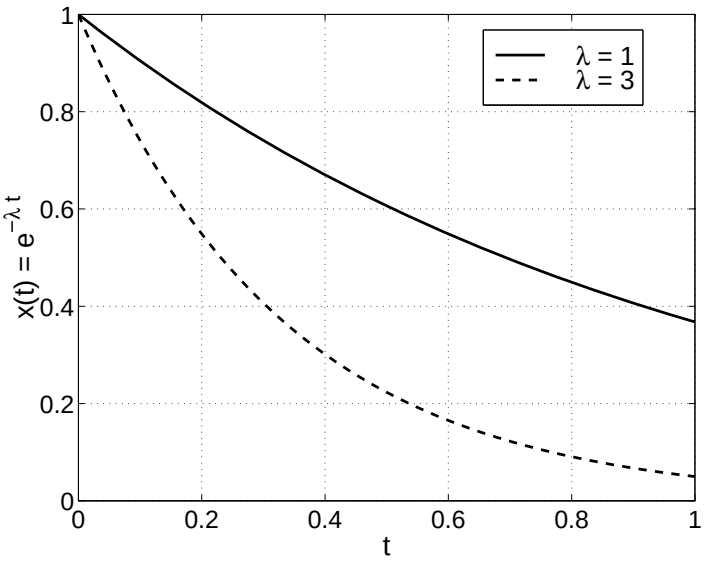


Abbildung A.12: Zum radioaktiven Zerfall

(d) $a^x = b^{cx} \Rightarrow c = \log_b(a); \quad a,\ b > 0$

$$\begin{aligned} & a^x = b^{cx} \\ \Rightarrow \quad & \log_b(a^x) = \log_b(b^{cx}) \\ \Leftrightarrow \quad & x \cdot \log_b(a) = c \cdot x \cdot \log_b(b) = c \cdot x \\ \Leftrightarrow \quad & c = \log_b(a) \quad x \neq 0 \end{aligned}$$

---

8. (Radioaktiver Zerfall) Radioaktive Stoffe zerfallen unter Aussendung von Strahlung in andere Stoffe. Sei $x(t)$ die Menge der noch nicht zerfallenen Atome zum Zeitpunkt t und x_0 die Anzahl der zum Zeitpunkt $t = 0$ unzerfallenen Atome. Dann gilt

$$x(t) = x_0 \mathrm{e}^{-\lambda t} \ ,$$

wobei λ die Zerfallsrate ist (Zerfälle pro Zeit).

(a) Skizzieren Sie $x(t)$ für $t \geq 0$ einmal für eine große und einmal für eine kleine Zerfallsrate λ. (siehe Abbildung A.12)

(b) Nach welcher Zeit ist genau die Hälfte des ursprünglich vorhandenen Stoffes zerfallen ("Halbwertszeit")?

$x(t_{\frac{1}{2}}) = \frac{x_0}{2}$

$$\begin{aligned} & \tfrac{x_0}{2} = x_0 \mathrm{e}^{-\lambda t_{\frac{1}{2}}} \\ \Leftrightarrow \quad & \tfrac{1}{2} = \mathrm{e}^{-\lambda t_{\frac{1}{2}}} \\ \Leftrightarrow \quad & \ln \tfrac{1}{2} = -\lambda t_{\frac{1}{2}} \\ \Leftrightarrow \quad & \tfrac{\ln 2}{\lambda} = t_{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

---

9. (Binomischer Satz) Schreiben Sie mit Hilfe des Binomischen Satzes die Funktion $f(x) = (2 + x)^4$ als Polynom in x. Werten Sie dieses Polynom in linearer Näherung für $x = 0.01$ aus und vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem exakten Resultat $2.01^4 = 16.32240801$!

Binomischer Satz: $(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$
Hier:

$$\begin{aligned}
(2+x)^4 &= \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{0} 2^{4-k} x^k \\
&= \binom{4}{0} 2^4 \cdot x^0 + \binom{4}{1} 2^3 \cdot x^1 + \binom{4}{2} 2^2 \cdot x^2 + \binom{4}{3} 2^1 \cdot x^3 + \binom{4}{4} 2^0 \cdot x^4 \\
&= 1 \cdot 16 \cdot 1 + 4 \cdot 8 \cdot x + 6 \cdot 4 \cdot x^2 + 4 \cdot 2 \cdot x^3 + 1 \cdot 1 \cdot x^4 \\
&= 16 + 32x + 24x^2 + 8x^3 + x^4
\end{aligned}$$

in linearer Näherung gilt: $(2 + x)^4 = 16 + 32x$
für $x = 0.01$ also $2.01^4 \approx 16.32$
Das ist bereits eine gute Näherung, da das exakte Ergebnis $2.01^4 = 16.32240801$ beträgt.

---

10. (Beispiel aus der Ökologie)

Ein wichtiges Charakteristikum eines Lebensraumes ist dessen Artendiversität. Die Diversität ist umso größer, je mehr verschiedene Arten dort anzutreffen sind und je gleichmäßiger die Individuen sich auf diese Arten verteilen. Der Shannon Index H_S ist ein aus der Informationstheorie stammendes Maß für die Diversität einer Biozönose, das genau diese beiden Eigenschaften besitzt:

$$H_S = -\sum_{i=1}^{N} p_i \log_2 p_i \qquad p_i = \frac{n_i}{M} \qquad M = \sum_{i=1}^{N} n_i$$

N ist die Anzahl der gefundenen Arten, n_i sind deren Individuenzahlen, M ist die Anzahl der insgesamt gefundenen Individuen. Die Wahrscheinlichkeit bzw. relative Häufigkeit, ein Individuum der Art i anzutreffen ist p_i.

(a) Welche Werte kann p_i (allgemein eine beliebige Wahrscheinlichkeit) annehmen? Welchen Wert nimmt p_1 an wenn die Art 1 sehr dominierend ist, d.h. von dieser Art kommen sehr viele Individuen vor, während von allen anderen Arten nur Einzeltiere gefunden werden. Wie groß ist dann p_i für die übrigen Arten?

Maximaler Wert für p_i ist 1, denn falls alle Tiere nur von einer Art sind, ist $n_1 = M$ und somit $p_1 = \frac{M}{M} = 1$. Minimaler Wert für p_i ist 0, falls von einer Art keine Individuen gefunden werden. Im allgemeinen ist $0 \leq p_i \leq 1$ für alle i.

(b) Welchen Wert hat $\sum_{i=1}^{N} p_i$, d.h. wie groß ist die Wahrscheinlichkeit eine beliebige Art anzutreffen?

$$\sum_{i=1}^{N} p_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{n_i}{M} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} n_i = \frac{1}{M} \cdot M = 1$$

d.h. die Wahrscheinlichkeit, eine beliebige Art anzutreffen, ist 1.

(c) Skizzieren Sie die Funktionen $f(p_i) = -\log_2 p_i$, $g(p_i) = p_i$ und $h(p_i) = f(p_i) \cdot g(p_i) = -p_i \log_2 p_i$ für $p_i \in [0; 1]$! Welchen Funktionswert hat $h(1)$? Welchen Funktionswert hat $h(0)$? Rechnen sie dazu eventuell einige Werte für kleine p_i (z.B. 0.1, 0.01, 0.001) mit dem Taschenrechner aus.

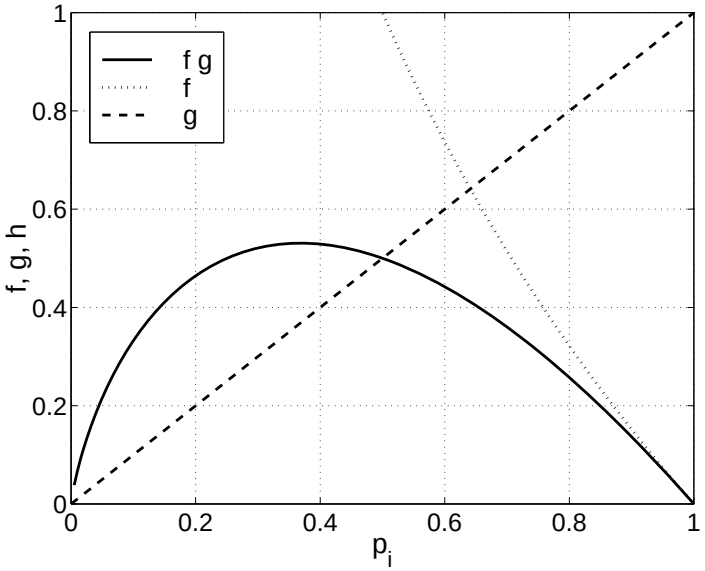


Abbildung A.13: zum Shannonindex

(d) An welcher Stelle p_i schneidet $h(p_i)$ die Winkelhalbierende $g(p_i)$? Korrigieren Sie eventuell ihre Skizze von $h(p_i)$!

$$\begin{aligned} & h(p_i) = g(p_i) \\ \Leftrightarrow \quad & p_i = -p_i \log_2 p_i \\ \Leftrightarrow \quad & p_i = 0 \text{ oder } \log_2(p_i) = -1 \\ \Leftrightarrow \quad & p_i = \frac{1}{2} \text{ oder } p_i = 0 \end{aligned}$$

(e) Welche Werte haben p_1 und H_S, wenn nur eine einzige Art gefunden wurde?
$N = 1,\ M = n_1 \ \Rightarrow \ p_1 = \frac{M}{M} = 1$ und $H_S = -\sum_{i=1}^{1} p_i \log_2 p_i = -1 \cdot 0 = 0$

(f) Zeigen Sie, dass zur einfacheren Berechnung der Shannon-Index auf folgende Form gebracht werden kann:

$$H_S = \left(\ln M - \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} n_i \ln n_i \right) / \ln 2$$

$$
\begin{aligned}
H_S &= -\sum_{i=1}^{N} p_i \log_2 p_i \\
&= -\frac{1}{\ln(2)} \sum_{i=1}^{N} \frac{n_i}{M} \ln(\frac{n_i}{M}) \\
&= -\frac{1}{\ln(2)} \sum_{i=1}^{N} \frac{n_i}{M} \left(\ln(n_i) - \ln(M)\right) \\
&= -\frac{1}{\ln(2)} \left(\frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} n_i \ln(n_i) - \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} n_i \ln(M) \right) \\
&= -\frac{1}{\ln(2)} \left(\frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} n_i \ln(n_i) - \ln(M) \right) \\
&= \left(\ln(M) - \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} n_i \ln(n_i) \right) / \ln(2)
\end{aligned}
$$

(g) In folgender Tabelle sind die Anzahl der Individuen n_i aller Makroinvertebraten aufgelistet, die in zwei Abschnitten P1 und P2 der Plane, einem Bach im Hohen Fläming (Brandenburg), gefunden wurden:

Art	P1	P2	Art	P1	P2
Dugesia conocephala	9	15	*Heptagenia sulphurea*	3	34
Ancylus fluviatilis	2	7	*Paraleptophlebia spec.*	0	4
Pisidium spec.	15	43	*Perlodes dispar*	0	3
Erpobdella octoculata	0	8	*Protonemoura spec.*	19	0
Glossiphonia complanata	6	10	*Orectochilus villosus*	0	5
Gammarus pulex	36	120	*Halesus radiatus*	0	2
Gammarus roeseli	0	440	*Hydropsyche pellucidula*	15	0
Baetis spec.	27	20	*Hydropsyche spec.*	2	20
Ephemera danica	0	120	*Ryacophila fasciata*	2	0

In welchem Abschnitt ist die Diversität größer?
Es ergeben sich folgende relative Häufigkeiten p_i:

Art	P1	P2	Art	P1	P2
Dugesia conocephala	$\frac{9}{136}$	$\frac{15}{851}$	*Heptagenia sulphurea*	$\frac{3}{136}$	$\frac{34}{851}$
Ancylus fluviatilis	$\frac{2}{136}$	$\frac{7}{851}$	*Paraleptophlebia spec.*	0	$\frac{4}{851}$
Pisidium spec.	$\frac{15}{136}$	$\frac{43}{851}$	*Perlodes dispar*	0	$\frac{3}{851}$
Erpobdella octoculata	0	$\frac{8}{851}$	*Protonemoura spec.*	$\frac{19}{136}$	0
Glossiphonia complanata	$\frac{6}{136}$	$\frac{10}{851}$	*Orectochilus villosus*	0	$\frac{5}{851}$
Gammarus pulex	$\frac{36}{136}$	$\frac{120}{851}$	*Halesus radiatus*	0	$\frac{2}{851}$
Gammarus roeseli	0	$\frac{440}{851}$	*Hydropsyche pellucidula*	$\frac{15}{136}$	0
Baetis spec.	$\frac{27}{136}$	$\frac{20}{851}$	*Hydropsyche spec.*	$\frac{2}{136}$	$\frac{20}{851}$
Ephemera danica	0	$\frac{120}{851}$	*Ryacophila fasciata*	$\frac{2}{136}$	0

Damit ergibt sich $H_S^1 = 2.9168$ und $H_S^2 = 2.3741$, d. h. obwohl in Abschnitt 2 mehr Tiere und Arten gefunden werden, ist die Diversität nach Shannon in Abschnitt 1 größer. Der Grund liegt in der Dominanz von Gammarus roeseli, Gammarus pulex und Ephemera danica in Abschnitt 2.

(h) Bei einer festen Artenzahl N wird der Shannon-Index H_S am größten, wenn alle Arten gleich häufig vorkommen, d.h. $n_i = n_j$ für alle i, j. Wie groß sind dann die n_i und die p_i bei einer gegebenen Individuenzahl M? Wie groß ist dafür der Shannon-Index H_S?

Gegeben: N und M fest; $n_i = n_j$ für alle i, j
Gesucht: $n_i,\ p_i,\ H_S$
Aus $M = \sum_{i=0}^{N} n_i$ folgt für $n_i = n_j = n$ für alle i, j

$$M = \sum_{i=1}^{N} n = n \sum_{i=1}^{N} 1 = n \cdot N$$

also $n = \frac{M}{N} \Rightarrow p_i = \frac{n_i}{M} = \frac{n}{M} = \frac{\frac{M}{N}}{M} = \frac{1}{N} = p_i$ für alle i

$$\begin{aligned} H_S &= -\sum_{i=1}^{N} p_i \log_2 p_i = -\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{N} \log_2(\frac{1}{N}) \\ &= -\frac{1}{N} \log_2(\frac{1}{N}) \sum_{i=1}^{N} 1 = \frac{1}{N} \log_2(\frac{1}{N}) N \\ &= -\log_2(\frac{1}{N}) = \log_2(N) \end{aligned}$$

Das Ergebnis ist unabhängig von der Anzahl der Tiere, entscheidend ist die Anzahl der Arten und dass es von jeder Art gleich viele Individuen gibt.

---

11. (Logarithmus) Berechnen Sie $\log_3 7$ und $\log_7 3$! Formen Sie dazu die Ausdrücke geeignet um und benutzen Sie dann Ihren Taschenrechner!

$$\log_3(7) = \frac{\log_{10}(7)}{\log_{10}(3)} = \frac{\ln(7)}{\ln(3)} = 1.7712$$

$\log_7(3) = \frac{1}{\log_3(7)} = 0.5646$ und allgemein:

$$\log_y(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(y)}$$

---

12. (Binomischer Satz) Berechnen Sie 2.1^5 mit dem Taschenrechner! Berechnen Sie mit dem Binomischen Satz ohne Taschenrechner die lineare und quadratische Näherung von 2.1^5 und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem exakten Resultat! Führen Sie dann die gleichen Rechnungen für 1.9^5 durch!

$$\begin{aligned} 2.1^5 &= (2 + 0.1)^5 \\ &= \binom{5}{0} 2^5 \cdot 0.1^0 + \binom{5}{1} 2^4 \cdot 0.1^1 + \binom{5}{2} 2^3 \cdot 0.1^2 + \binom{5}{3} 2^2 \cdot 0.1^3 + \\ &\quad \binom{5}{4} 2^1 \cdot 0.1^4 + \binom{5}{5} 2^0 \cdot 0.1^5 \\ &= 1 \cdot 32 \cdot 1 + 5 \cdot 16 \cdot 0.1 + 10 \cdot 8 \cdot 0.01 + 10 \cdot 4 \cdot 0.001 + \\ &\quad 5 \cdot 2 \cdot 0.0001 + 1 \cdot 1 \cdot 0.00001 \\ &= 40.84101 \end{aligned}$$

lineare Näherung:

$$\begin{aligned} 2.1^5 &\approx \binom{5}{0} 2^5 \cdot 0.1^0 + \binom{5}{1} 2^4 \cdot 0.1^1 \\ &= 1 \cdot 32 \cdot 1 + 5 \cdot 16 \cdot 0.1 \\ &= 40 \end{aligned}$$

quadratische Näherung:

$$\begin{aligned} 2.1^5 &\approx \binom{5}{0}2^5 \cdot 0.1^0 + \binom{5}{1}2^4 \cdot 0.1^1 + \binom{5}{2}2^3 \cdot 0.1^2 \\ &= 1 \cdot 32 \cdot 1 + 5 \cdot 16 \cdot 0.1 + 10 \cdot 8 \cdot 0.01 \\ &= 40.8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1.9^5 &= (2 - 0.1)^5 \\ &= \binom{5}{0}2^5 \cdot (-0.1)^0 + \binom{5}{1}2^4 \cdot (-0.1)^1 + \binom{5}{2}2^3 \cdot (-0.1)^2 + \\ &\quad \binom{5}{3}2^2 \cdot (-0.1)^3 + \binom{5}{4}2^1 \cdot (-0.1)^4 + \binom{5}{5}2^0 \cdot (-0.1)^5 \\ &= 1 \cdot 32 \cdot 1 + 5 \cdot 16 \cdot (-0.1) + 10 \cdot 8 \cdot 0.01 + \\ &\quad 10 \cdot 4 \cdot (-0.001) + 5 \cdot 2 \cdot 0.0001 + 1 \cdot 1 \cdot (-0.00001) \\ &= 24.76099 \end{aligned}$$

lineare Näherung, wie oben: 24
quadratische Näherung: 24.8

---

13. (Skalengesetze in der Biologie) Das Gewicht G eines Tieres ist proportional zu seinem Volumen V: $G \sim V$ (Zusatzaufgabe: welche physikalischen Gesetze fallen Ihnen dazu ein? Wie lautet dann also der Proportionalitätsfaktor?). Der Druck p, der auf jedem einzelnen der n Füße mit der Auftrittsfläche A lastet, ist dann gegeben durch $p = \frac{G}{nA}$. Warum haben also kleine Tiere (z.B. Katzen) relativ zur Körpergröße kleinere Füße als große Tiere (z.B. Elefanten)?

Gewicht $G = g \cdot \rho \cdot V$, da $G = m \cdot g$ und $m = \rho \cdot V$

Da V wie r^3 skaliert, verachtfacht sich beispielsweise der Druck auf den Füßen bei Verdoppelung der Körpergröße. Oberflächen skalieren dagegen nur wie r^2 bei Veränderung der Körpergröße. Deshalb muss die Auftrittsfläche überproportional ansteigen, um dem wachsenden Druck bei Vergrößerung des Tieres standzuhalten.

---

14. (Beispiel aus der Neurobiologie) Zur Partnerfindung setzen Heuschrecken ihren Gesang ein. Wenn der Gesang von einem paarungsbereiten Geschlechtspartner erkannt wird, bewegt sich dieser auf den Sänger zu. Es wurden nun die Antworteigenschaften verschiedener Neurone des auditorischen Systems in Abhängigkeit von der Umgebungstemperatur untersucht, um zu sehen, wie sich die Temperatur auf die Eigenschaften der neuronalen Verarbeitung des Gesangs niederschlägt. Die meisten Neurone antworten bei höheren Temperaturen viel stärker auf einen Reiz als bei niedrigen Temperaturen. Um diese Temperaturabhängigkeit zu quantifizieren, wird aus den Daten der Q_{10}-Wert berechnet. Dieser gibt an, um welchen Faktor sich eine Größe ändert, wenn die Temperatur um 10°C erhöht wird. Beispielsweise bedeutet ein Q_{10}-Wert von 2, dass sich die Meßgröße bei einer Erhöhung der Temperatur um 10°C verdoppelt.

(a) Die Antwortstärke $x(10°\text{C})$ des BGN1-Neurons bei einer Temperatur von $T = 10°\text{C}$ sei 1, der Q_{10}-Wert 1.5 . Welche Antwortstärke $x(T)$ hat das Neuron bei $T = 20$, 30 und 40°C ? Fertigen Sie eine Skizze der Funktion $x(T)$ an!

$x(10°\text{C}) = 1,\ Q_{10} = 1.5 \quad \rightarrow \quad x(20°\text{C}) = Q_{10} \cdot x(10°\text{C}) = 1.5 \quad \rightarrow \quad x(30°\text{C}) = Q_{10} \cdot x(20°\text{C}) = 1.5^2 = 2.25 \quad \rightarrow \quad x(40°\text{C}) = Q_{10} \cdot x(30°\text{C}) = 1.5^3 = 3.375$

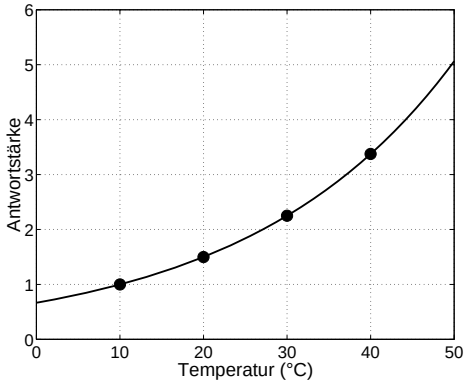


Abbildung A.14: Temperaturabhängigkeit der neuronalen Antwortstärke

(b) Wie würde die Temperaturabhängigkeit für $Q_{10} = 1$ und $Q_{10} = 0.5$ aussehen?

Für $Q_{10} = 1$ wäre $x(T) =$ konstant, also wäre x temperaturunabhängig.
Für $Q_{10} = \frac{1}{2}$ würde x mit wachsender Temperatur exponentiell abnehmen.

(c) Wie Sie in ihrer Skizze sehen, wächst die Antwortstärke x exponentiell mit der Temperatur T an. Was wäre eine geeignete Basis der Exponentialfunktion? Was steht in ihrem Exponenten? Wie sieht also die Funktion $x(T)$ aus?

Bei jedem Schritt auf der x–Achse um 10°C vervielfacht sich der Funktionswert um das 1.5-fache, eine geignete Basis ist deshalb der Q_{10}–Wert. Der Exponent p muss folgenden Bedingungen gerecht werden:
bei $10°\text{C} : p = 0$, bei $20°\text{C} : p = 1$, bei $30°\text{C} : p = 2$, bei $40°\text{C} : p = 3$
$\Rightarrow \quad p = \frac{T - 10°\text{C}}{10°\text{C}} = \frac{T - T_0}{T_0} \quad \text{mit} \quad T_0 = 10°\text{C}$

$$x(T) = Q_{10}^{\frac{T-T_0}{T_0}}$$

(d) Wird die Antwortstärke x bei zwei verschiedenen Temperaturen T gemessen, kann daraus der Q_{10}-Wert berechnet werden. Sei $x_1 = x(T_1)$ die Antwort zur Temperatur T_1 und $x_2 = x(T_2)$ die Antwort zur Temperatur T_2. Zeigen Sie, dass daraus Q_{10} nach folgender Formel berechnet werden kann:

$$Q_{10} = \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\frac{10°\text{C}}{T_2 - T_1}}$$

Mit $x_1 = x(T_1) = Q_{10}^{\frac{T_1 - T_0}{T_0}}$ und $x_2 = x(T_2) = Q_{10}^{\frac{T_2 - T_0}{T_0}}$ folgt

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{Q_{10}^{\frac{T_1 - T_0}{T_0}}}{Q_{10}^{\frac{T_2 - T_0}{T_0}}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x_1}{x_2} = Q_{10}^{\frac{T_1 - T_0}{T_0} - \frac{T_2 - T_0}{T_0}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x_1}{x_2} = Q_{10}^{\frac{T_1 - T_2}{T_0}}$$

$$\Leftrightarrow \quad Q_{10} = \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\frac{T_0}{T_1 - T_2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad Q_{10} = \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\frac{T_0}{T_2 - T_1}}$$

(e) In untenstehender Tabelle sind die Antwortstärken zweier verschiedener Neuronentypen bei jeweils zwei Temperaturen angegeben. Welches der beiden Neurone zeigt eine stärkere Temperaturabhängigkeit in seinem Antwortverhalten?

Neuron	$T_1/°\mathrm{C}$	x_1	$T_2/°\mathrm{C}$	x_2
UGN2	23	170	32	280
AN4	21	210	31	260

Für UGN2: $x_1 = x(23°\mathrm{C}) = 170$ und $x_2 = x(32°\mathrm{C}) = 280$

$$Q_{10} = \left(\frac{280}{170}\right)^{\frac{10°\mathrm{C}}{32°\mathrm{C}-23°\mathrm{C}}} = \left(\frac{28}{17}\right)^{\frac{10}{9}} = 1.7410$$

Für AN4: $x_1 = x(21°\mathrm{C}) = 210$ und $x_2 = x(31°\mathrm{C}) = 260$

$$Q_{10} = \left(\frac{260}{210}\right)^{\frac{10°\mathrm{C}}{31°\mathrm{C}-21°\mathrm{C}}} = \left(\frac{26}{21}\right)^{1} = 1.2381$$

UGN2 zeigt also eine stärkere Temperaturabhängigkeit als AN4, da $Q_{10}(\mathrm{UGN1}) > Q_{10}(\mathrm{AN4})$.

A.4 Aufgaben zu Kapitel 4

1. (Folgen) Die Masse einer Bakterienpopulation a_n in der n-ten Generation sei gegeben durch

$$a_n = \frac{n-2}{n-1}\,. \tag{1.8}$$

(a) Wie groß ist die Masse der Bakterien a_{n+1} in der darauf folgenden Generation $n+1$?

$a_n = \dfrac{n-2}{n-1} = 1 - \dfrac{1}{n-1},\ n \in \mathbf{N}\backslash\{1\}$

$a_{n+1} = \dfrac{n+1-2}{n+1-1} = \dfrac{n-1}{n} = 1 - \dfrac{1}{n}$

(b) Wird die Population wachsen, d.h. ist die Folge a_n monoton wachsend?

Frage: $a_{n+1} \geq a_n$?

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad 1 - \frac{1}{n} \geq 1 - \frac{1}{n-1} \\ &\Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{n} \leq \tfrac{1}{n-1} \\ &\Leftrightarrow \quad n \geq n-1 \end{aligned}$$

Wahre Aussage für alle $n \in \mathbf{N}\backslash\{1\}$ $\Rightarrow$ die Folge wächst monoton. Da auch $n > n-1$ gilt, ist die Folge sogar streng monoton.

(c) Gibt es eine maximale Masse der Bakterienpopulation, d.h. ist die Folge beschränkt?

Da der Zähler immer kleiner als der Nenner ist, ist die Folge nach oben durch 1 beschränkt. Nach unten ist sie durch ihr erstes Glied $a_2 = 0$ beschränkt, da sie monoton wächst. Daraus folgt die Beschränktheit der Folge.

(d) Eine allgemeine Version der Gleichung (1.8) wäre

$$a_n = \frac{n-k}{n-q}\,, \quad k, q \in \mathbf{R}\,. \tag{1.9}$$

Wie müssten k und q gewählt werden, damit die Population wächst?
Es muss gelten: $a_{n+1} \geq a_n$ für $a_n = \frac{n-k}{n-q} = 1 - \frac{k-q}{n-q}$

$$\begin{aligned}
& 1 - \frac{k-q}{n+1-q} \geq 1 - \frac{k-q}{n-q} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{k-q}{n+1-q} \leq \frac{k-q}{n-q} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{n+1}{k-q} - \frac{q}{k-q} \geq \frac{n}{k-q} - \frac{q}{k-q} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{n+1}{k-q} \geq \frac{n}{k-q} \\
\Leftrightarrow \quad & n+1 \geq n \text{ falls } k-q > 0 \\
\text{oder} \quad & n+1 \leq n \text{ falls } k-q < 0
\end{aligned}$$

Ab $n > q$ wächst die Folge monoton für $k \geq q$, streng monoton für $k > q$. Im Falle $k = q$ kann zwar obige Umformung nicht durchgeführt werden, da man nicht durch Null dividieren darf, aber man erkennt auch direkt aus der Definition der Folge, dass sie in diesem Falle konstant 1 ist.

---

2. (Rekursive Folge) Eine Folge a_n sei gegeben durch die Rekursionsvorschrift

$$a_{n+1} = \frac{2}{3} a_n \ .$$

(a) Berechnen Sie die Folgenglieder a_1 bis a_4 mit $a_0 = 4$ und tragen Sie diese in ein Koordinatensystem ein! (siehe Abbildung A.15)

n	1	2	3	4
a_n	$\frac{8}{3}$	$\frac{16}{9}$	$\frac{32}{27}$	$\frac{64}{81}$

(b) Können Sie eine Formel für das n-te Folgenglied a_n angeben, wenn ein beliebiges a_0 gegeben ist?

Für beliebiges a_0 ist $a_1 = \frac{2}{3}a_0$, $a_2 = \frac{2}{3}a_1 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 a_0$, $a_3 = \frac{2}{3}a_2 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 a_0$ etc. Allgemein ist

$$a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n a_0$$

(c) Zeigen Sie, dass die Folge a_n streng monoton fallend ist!

$$\begin{aligned}
& a_{n+1} < a_n \\
\Leftrightarrow \quad & a_{n+1} - a_n < 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{2}{3} a_n - a_n < 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \left(\frac{2}{3} - 1\right) a_n < 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \left(-\frac{1}{3}\right) a_n < 0 \\
\Leftrightarrow \quad & a_n > 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \tfrac{2}{3}^n a_0 > 0 \qquad \text{wegen (b)} \\
\Leftrightarrow \quad & a_0 > 0
\end{aligned}$$

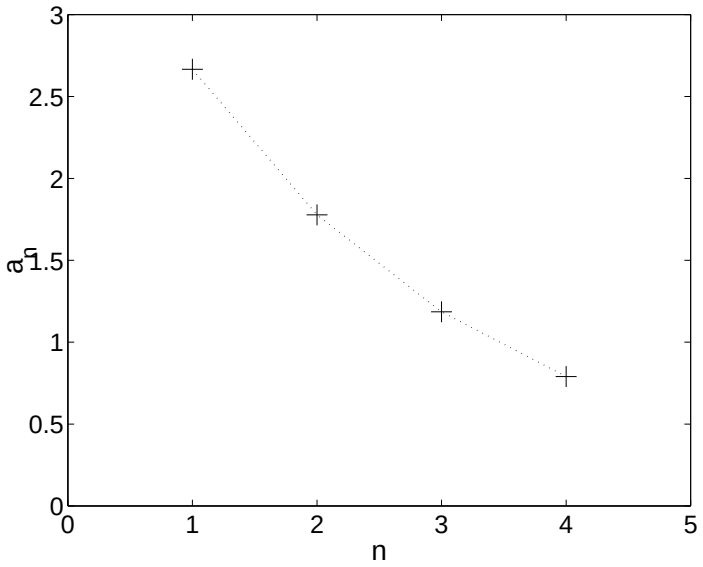


Abbildung A.15: Die ersten vier Glieder der Folge a_n

Wenn also für alle $n \in \mathbf{N}$ $a_n > 0$ ist, fällt die Folge streng monoton. Es ist $a_n > 0$ für alle n genau dann, wenn $a_0 > 0$. Falls $a_0 < 0$ ist $a_n < 0$ für alle $n \in \mathbf{N}$, d.h. die Folge wächst dann streng monoton. Für $a_0 = 0$ ist die Folge konstant 0.

(d) Ist a_n nach unten beschränkt? Ist die Folge konvergent?

1. Fall: Wenn $a_0 > 0$ sind alle $a_n > 0$, die Folge ist also nach unten durch 0 beschränkt. Da sie zudem monoton fällt, ist sie auch konvergent.
2. Fall: Für $a_0 = 0$ gilt für alle $n \in \mathbf{N}$ $a_n = 0$, d.h. die Folge ist beschränkt und konvergiert gegen 0.
3. Fall: Für $a_0 < 0$ gilt für alle $n \in \mathbf{N}$ $a_n < 0$, d.h. die Folge ist nach oben beschränkt. Außerdem ist sie monoton wachsend und damit konvergent.

(e) Welchen Grenzwert hat die Folge a_n?

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \left[\left(\frac{2}{3}\right)^n a_0 \right] \\ &= a_0 \cdot \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \\ &= 0 \quad \text{(Skript 5.1, Bsp. 4)} \end{aligned}$$

---

3. (Monotonie von Folgen) Welche der Folgen sind monoton wachsend, welche monoton fallend, welche zeigen strenge Monotonie? Begründen Sie ihre Antwort mathematisch!

(a) $a_n = 1 \;\rightarrow\; a_{n+1} = a_n \;\rightarrow$ monoton wachsend und fallend, da konstant, aber weder streng monoton wachsend, noch streng monoton fallend.

(b) $x_t = \left(\frac{1}{2}\right)^t \;\rightarrow\; x_{t+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{t+1} = \frac{1}{2}x_t \;\rightarrow\; \forall\, t \in \mathbf{N}$ ist $x_{t+1} < x_t$, d.h. x_t ist streng monoton fallend.

(c) $y_m = \left(-\frac{1}{2}\right)^m = (-1)^m \left(\frac{1}{2}\right)^m \;\rightarrow$ Aufgrund des $(-1)^m$ alterniert die Folge, sie ist also weder monoton wachsend noch fallend.

(d) $\alpha_{n+1} = 2 \cdot \alpha_n \quad (\alpha_0 = 1) \quad \rightarrow$ Da $\alpha_{n+1} = 2\alpha_n > \alpha_n,\ \alpha_0 > 0$ ist α_n streng monoton wachsend. Alternativ kann man erkennen, dass $\alpha_n = 2^n$ ist, und weil $2^{n+1} = 2^n \cdot 2 > 2^n$ ist, folgt ebenfalls das streng monotone Wachstum der Folge α_n.

(e) $z_n = n + \dfrac{1}{n}$

n	1	2	3	4	5
z_n	2	$2\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{3}$	$4\frac{1}{4}$	$5\frac{1}{5}$

Verdacht: $z_{n+1} > z_n$
Beweis:

$$\begin{aligned} & z_{n+1} > z_n \\ \Leftrightarrow \quad & n+1+\frac{1}{n+1} > n+\frac{1}{n} \\ \Leftrightarrow \quad & 1 > \tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{n+1} \\ \Leftrightarrow \quad & 1 > \tfrac{1}{n(n+1)} \\ \Leftrightarrow \quad & 1 > \tfrac{1}{n^2+n} \\ \Leftrightarrow \quad & n^2+n > 1 \qquad \text{(da } n^2+n \text{ positiv ist)} \end{aligned}$$

Weil $n \in \mathbf{N}$ gilt, ist n mindestens 1 und somit $n^2 + n > 1$ für alle $n \in \mathbf{N}$.

A.5 Aufgaben zu Kapitel 5

1. (Grenzwerte von Folgen) Berechnen Sie die Grenzwerte folgender Folgen:

(a) $a_n = \dfrac{1}{n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \qquad \text{(Skript 5.1, Bsp. 1)}$$

(b) $x_n = \dfrac{n+1}{n-1}$

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n-1}\right) &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n(1+\frac{1}{n})}{n(1-\frac{1}{n})}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n}}\right) \\ &= \frac{1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{1-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}} \\ &= \frac{1+0}{1-0} \\ &= 1 \end{aligned}$$

(c) $y_t = \dfrac{t^2 - 5t + 10}{3t - 2}$

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} \frac{t^2 - 5t + 10}{3t - 2} &= \lim_{t\to\infty} \left(\frac{t^2}{3t-2} + \frac{-5t}{3t-2} + \frac{10}{3t-2} \right) \\
&= \lim_{t\to\infty} \left(\frac{t}{3 - \frac{2}{t}} + \frac{-5}{3 - \frac{2}{t}} + \frac{1}{t} \cdot \frac{10}{3t-2} \right) \\
&= \frac{\lim\limits_{t\to\infty} t}{3 - 2 \lim\limits_{t\to\infty} \frac{1}{t}} + \frac{-5}{3 - 2 \lim\limits_{t\to\infty} \frac{1}{t}} + \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \cdot \frac{10}{3 - 2 \lim\limits_{t\to\infty} \frac{1}{t}} \\
&= \frac{\infty}{3} - \frac{5}{3} + 0 \cdot \frac{10}{3} = \infty
\end{aligned}$$

Allgemein gilt: Der Betrag des Grenzwertes eines Quotienten zweier Polynome ist unendlich, wenn der Grad des Zählers größer ist als der des Nenners, er ist 0, falls der Grad des Zählers kleiner ist als der des Nenners, und gleich dem Quotienten der Koeffizienten der Variablen des höchsten Grades, falls Zähler und Nenner Polynome gleichen Grades sind. Zusammen:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{an^p}{bn^q} = \begin{cases} \infty & : \quad p > q \\ \frac{a}{b} & : \quad p = q \\ 0 & : \quad p < q \end{cases}$$

---

2. (Grenzwerte von Reihen) Bestimmen Sie die Grenzwerte folgender Reihen! Nehmen Sie dazu auch das Skript zur Hilfe.

(a) $s_m = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{i}$. Gesucht: $\lim_{m\to\infty} s_m = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} ... \\
&> 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}_{=\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}}_{=\frac{1}{2}} + ... \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + ...
\end{aligned}$$

Da die Reihe unendlich viele Terme enthält, lässt sich die obige Abschätzung beliebig oft wiederholen, d.h. die Reihe divergiert.

$$\lim_{n\to\infty} s_m = \infty$$

(b) $q_m = \sum_{\nu=1}^{m} \frac{1}{3^\nu}$: Mit der Summenformel für die geometrische Reihe ist

$$\begin{aligned}
\lim_{m\to\infty} \sum_{\nu=1}^{m} \frac{1}{3^\nu} &= \lim_{m\to\infty} \sum_{\nu=0}^{m} \left(\frac{1}{3}\right)^\nu - 1 \\
&= \frac{1 - \lim\limits_{m\to\infty} (\frac{1}{3})^{m+1}}{\frac{2}{3}} - 1 \\
&= \frac{3}{2} - 1 \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

---

3. (Grenzwerte von Folgen) Welchen Grenzwert besitzen die einzelnen Folgen? Sind sie beschränkt? Begründen Sie ihre Antwort mathematisch!

(a) $a_n = 500 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 500$, die Folge ist also beschränkt, da sie konstant ist.

(b) $b_n = \dfrac{n^2 - 10}{4n^3 + n^2 - 100}$

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{n^2 - 10}{4n^3 + n^2 - 100} \\
&= \frac{n^2(1 - \frac{10}{n^2})}{n^2(4n + 1 - \frac{100}{n^2})} \\
&= \frac{1 - \frac{10}{n^2}}{4n + 1 - \frac{100}{n^2}} \\
\Rightarrow \lim_{n\to\infty} b_n &= \frac{1 - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{10}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty} (4n) + 1 - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{100}{n^2}} \\
&= \frac{1 - 0}{\infty + 1 - 0} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Die Folge ist konvergent, also auch beschränkt.

(c) $c_n = \dfrac{6n^{10} - n^4}{3n^{10} + n}$

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{6n^{10} - n^4}{3n^{10} + n} \\
&= \frac{n^{10}(6 - \frac{1}{n^6})}{n^{10}(3 + \frac{1}{n^9})} \\
&= \frac{6 - \frac{1}{n^6}}{3 + \frac{1}{n^9}} \\
\Rightarrow \lim_{n\to\infty} c_n &= \frac{6 - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^6}}{3 - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^9}} \\
&= \frac{6 + 0}{3 + 0} \\
&= 2
\end{aligned}$$

Auch diese Folge ist beschränkt, da konvergent.

(d) $y_{n+1} = -\frac{1}{2} \cdot y_n \;\Rightarrow\; y_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n y_0$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} y_n &= \lim_{n\to\infty}\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^n y_0\right] \\ &= y_0 \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ &= y_0 \cdot 0 \\ &= 0 \quad \text{für alle } y_0 \in \mathbf{R}\end{aligned}$$

Die Folge ist wieder beschränkt, da konvergent.

---

4. (Geometrische Reihe) Wenn die Erdölvorräte bei konstantem gegenwärtigen Jahresverbrauch noch für 30 Jahre ausreichen, um wieviel Prozent müsste sich dann von Jahr zu Jahr der Verbrauch reduzieren, damit sie für immer ausreichen würden?

Sei x_0 der derzeitige Verbrauch, x_n der Verbrauch im n-ten Jahr von heute an gezählt, dann ist $M = 30x_0$ der gesamte Erdölvorrat. Der Verbrauch verringere sich nun von Jahr zu Jahr um p Prozent:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n - \frac{p}{100}x_n \\ &= \left(1 - \frac{p}{100}\right) x_n\end{aligned}$$

Mit $q = \left(1 - \frac{p}{100}\right) < 1$ ist also

$$x_{n+1} = qx_n\,, \quad x_0 = \frac{M}{30} > 0$$

$\Rightarrow$ $x_n = q^n x_0$, damit beträgt der kumulative Verbrauch V_n in den nächsten n Jahren:

$$\begin{aligned}V_n &= \sum_{k=0}^{n} x_k \\ &= x_0 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n \\ &= x_0(1 + q + q^2 + \ldots + q^n) \\ &= x_0\left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}\right)\end{aligned}$$

Für $n \Rightarrow \infty$ ist

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} V_n &= \sum_{k=0}^{\infty} x_k \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(x_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}\right) \\ &= x_0 \frac{1}{1 - q}\,, \qquad \text{da } 0 < q < 1\end{aligned}$$

Dieser Gesamtverbrauch darf nicht größer sein als die heutigen Erdölvorräte, damit diese

für immer ausreichen:

$$\begin{aligned}
& V \leq M \\
\Leftrightarrow \quad & x_0 \frac{1}{1-q} \leq 30 \cdot x_0 \\
\Leftrightarrow \quad & 1 \leq 30 - 30q \quad \text{da } x_0 > 0 \text{ und } q < 1 \\
\Leftrightarrow \quad & 30q \leq 29 \\
\Leftrightarrow \quad & q \leq \frac{29}{30} \\
\Leftrightarrow \quad & 1 - \frac{p}{100} \leq \frac{29}{30} \\
\Leftrightarrow \quad & -\frac{p}{100} \leq -1 + \frac{29}{30} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{p}{100} \geq 1 - \frac{29}{30} \\
\Leftrightarrow \quad & p \geq \frac{100}{30} = 3\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Der Erdölverbrauch müsste also jedes Jahr erneut um mindestens $3\frac{1}{3}$ Prozent verringert werden, damit die heute bekannten Reserven beliebig lange ausreichen würden. In letzter Konsequenz bedeutet dies natürlich, dass irgendwann praktisch gar kein Öl mehr verbraucht werden darf.

A.6 Aufgaben zu Kapitel 6

1. (Lineare Iterierte Abbildung) Untersuchen Sie das folgende Populationsmodell, das explizit auf Geburts- und Sterbeprozesse eingeht: Die mittlere Geburtenrate pro Kopf und Generationszeit sei α, die Sterberate β. Daraus ergibt sich folgende Dynamik der Bevölkerungsgröße x_t:

$$x_{t+1} = x_t + \alpha x_t - \beta x_t \ . \tag{1.10}$$

(a) Wofür stehen die einzelnen Terme auf der rechten Seite von (1.10)? Welche Werte dürfen die Parameter α und β annehmen, damit das Modell biologisch sinnvoll ist?

$$x_{t+1} = x_t + \overbrace{\alpha}^{\text{Geburtenrate}} x_t - \underbrace{\beta}_{\text{Sterberate}} \overbrace{x_t}^{\text{Bevölkerungsgröße}}$$

αx_t: Zahl der Geburten in der Zeit zwischen t und $t+1$
βx_t: Zahl der Sterbefälle in der Zeit zwischen t und $t+1$
Damit Geburten zu einer Bevölkerungszunahme und Sterbefälle zu einer Bevölkerungsabnahme führen, muss $\alpha > 0$ und $\beta > 0$ sein. Damit die Anzahl der sterbenden Bevölkerung nicht die der Gesamtbevölkerung überschreitet, muss $\beta \leq 1 + \alpha$ sein.

(b) Geben Sie Bedingungen an die Parameter α und β an, unter denen die Bevölkerungsgröße x_t (i) wächst, (ii) konstant bleibt und (iii) ausstirbt. Was bedeutet Wachsen und Aussterben im Kontext der Monotonie von Folgen?

$$x_{t+1} = x_t + \alpha x_t - \beta x_t = (1 + \alpha - \beta) x_t = c \cdot x_t$$

mit $c = 1 + \alpha - \beta$.
Zunahme: $\Rightarrow \ x_{t+1} > x_t \ \Leftrightarrow \ c \cdot x_t > x_t \ \Leftrightarrow \ c > 1 \ \Leftrightarrow \ 1 + \alpha - \beta > 1 \ \Leftrightarrow \ \alpha > \beta$, wenn also die Geburtenrate größer als die Sterberate ist.

Konstanz: $\Rightarrow \ x_{t+1} = x_t; \Leftrightarrow \ c \cdot x_t = x_t \ \Leftrightarrow \ c = 1 \ \Leftrightarrow \ 1 + \alpha - \beta = 1 \ \Leftrightarrow \ \alpha = \beta$, d.h. Geburten- und Sterberate sind gleich groß.
Abnahme: $\Rightarrow \ x_{t+1} < x_t; \Leftrightarrow \ c \cdot x_t < x_t \ \Leftrightarrow \ c < 1 \ \Leftrightarrow \ 1 + \alpha - \beta < 1 \ \Leftrightarrow \ \alpha < \beta$,

die Geburtenrate ist kleiner als die Sterberate.
Eine Zunahme bedeutet in diesem Fall streng monotones Wachstum der Folge, eine Abnahme streng monotones Fallen der Folge.

(c) Wie entwickelt sich die Bevölkerung für beliebige Zeiten t, wenn sie zur Zeit Null durch x_0 gegeben ist? Welche Lösung hat also die Iterierte Abbildung (1.10)?

$x_{t+1} = c \cdot x_t$ mit x_0 führt auf die Folge $x_t = c^t \cdot x_0$

$$x_t = (1 + \alpha - \beta)^t \cdot x_0$$

ist die Lösung von $x_{t+1} = x_t + \alpha x_t - \beta x_t$.

---

2. (Beispiel aus der Medizin) Ein Patient erhält täglich ein Medikament mit einer festen Dosis von d mg (Milligram) und scheidet pro Tag p Prozent der im Körper angesammelten Medikamentenmenge wieder aus.

(a) Machen Sie sich klar, warum für die Medikamentenmenge x_{n+1} im Körper des Patienten am $n+1$-ten Tag gilt

$$x_{n+1} = qx_n + d \tag{1.11}$$

wobei x_n die Medikamentenmenge am n-ten Tag und $q = 1 - p/100$ ist.

$$\begin{aligned}
& x_{neu} = x_{alt} - \text{Abnahme} + \text{Zufuhr} \\
\Leftrightarrow \quad & x_{n+1} = x_n - (p \text{ Prozent von } x_n) + d \\
\Leftrightarrow \quad & x_{n+1} = x_n - \frac{p}{100} x_n + d \\
\Leftrightarrow \quad & x_{n+1} = \left(1 - \frac{p}{100}\right) x_n + d \\
\Leftrightarrow \quad & x_{n+1} = qx_n + d \quad \text{mit } q = 1 - \frac{p}{100}
\end{aligned}$$

(b) Warum muss in diesem Beispiel der Parameter q zwischen Null und Eins liegen und der Parameter d positiv sein, um der biologischen Realität zu entsprechen?

Der Körper scheidet nichts oder eine positive Menge des Medikamentes aus, daher ist $p \geq 0$ und somit $q \leq 1$. Auf der anderen Seite kann der Körper nicht mehr ausscheiden, als sich in ihm befindet, daher ist $p \leq 100$ und daher $q \geq 0$.

(c) Unter welchen Bedingungen an d und q ist die Folge x_n monoton wachsend oder fallend? Ist sie streng monoton?

wachsend:

$$\begin{aligned}
& x_{n+1} \geq x_n \\
\Leftrightarrow \quad & qx_n + d \geq x_n \\
\Leftrightarrow \quad & (q-1)x_n \geq -d \\
\Leftrightarrow \quad & x_n \leq \frac{d}{1-q} \quad \text{für } q \neq 1
\end{aligned}$$

fallend, analoge Berechnung:

$$x_n \geq \frac{d}{1-q} \quad q \neq 1$$

Für $x_n = \frac{d}{1-q}$ ist x_n wachsend und fallend, also konstant ($q \neq 1$)
Ist x_n irgendwann, z.B. am Anfang, kleiner als $\frac{d}{1-q}$, dann sind auch alle folgenden x_n

kleiner als $\frac{d}{1-q}$ und die Folge ist streng monoton wachsend für alle $d \in \mathbf{R}^+$ und $q \in (0,1)$.
Ist x_n irgendwann größer als $\frac{d}{1-q}$, dann ist die Folge streng monoton fallend für alle $d \in \mathbf{R}^+$ und $q \in (0,1)$.

Der Sonderfall $q = 0$ (alles wird ausgeschieden) führt auf die konstante Folge $x_n = d$ für alle $n \in \mathbf{N}$.

Der Sonderfall $q = 1$ (nichts wird ausgeschieden) führt auf $x_n = x_0 + n \cdot d$. Diese Folge ist streng monoton wachsend und nicht beschränkt für $d > 0$.

(d) Welche Funktion f hat die entsprechende Iterierte Abbildung $x_{n+1} = f(x_n)$?

Da $x_{n+1} = qx_n + d = f(x_n)$ ist $f(x) = qx + d$.

(e) Skizzieren Sie den Graph von f! Zeichnen Sie zusätzlich die Winkelhalbierende ein! (siehe Abbildung A.16)

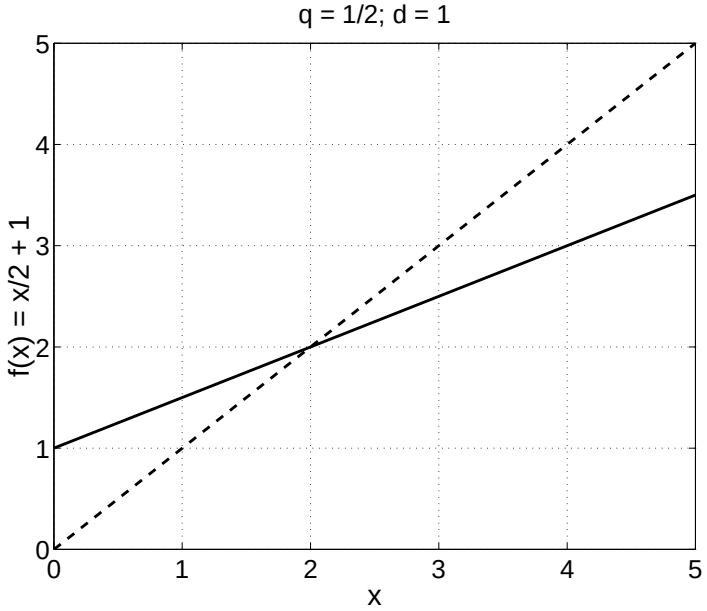


Abbildung A.16: $f(x) = qx + d$ für $q = 1/2$ und $d = 1$ zusammen mit der Winkelhalbierenden

(f) Besitzt diese Iterierte Abbildung Fixpunkte? Wenn ja: Wie hängt ihre Größe von d und q ab? Was bedeutet das Erreichen eines Fixpunktes für die Medikamentenmenge?

Fixpunktbedingung:

$$\begin{aligned} & f(x^*) = x^* \\ \Leftrightarrow \quad & qx^* + d = x^* \\ \Leftrightarrow \quad & x^* = \frac{d}{1-q} \quad q \neq 1 \end{aligned}$$

d.h. falls $q \neq 1$ ist, gibt es einen Fixpunkt bei $\frac{d}{1-q} = x^*$, und falls $q = 1$ ist, gibt es keinen Fixpunkt (da $d > 0$). Das Erreichen eines Fixpunktes bedeutet hier, dass sich die Medikamentenmenge im Körper mit der Zeit nicht mehr ändert, sondern konstant bleibt.

(g) Welche Zeitentwicklung erwarten Sie für lange Zeiten? Diskutieren Sie diese Frage qualitativ mit Hilfe der bisherigen Ergebnisse. Was bedeutet dies für den langfristigen Medikamentenlevel im Körper?

Sei zunächst $0 < q < 1$:
Aus (c) folgt dann: Für $x_0 < x^*$ ist x_n streng monoton wachsend, aber durch x^* nach oben beschränkt, d.h. x_n nähert sich von unten an den Fixpunkt an.
Für $x_0 = x^* \quad x_n = x^*$ für alle $n \in \mathbf{N}$.
In allen diesen Fällen wird sich also ein konstanter Medikamentenlevel bei $x^* = \frac{d}{1-q}$ einstellen.
Für den Spezialfall $q = 1$ ist $x_n = x_0 + n \cdot d$, d.h. die Medikamentenmenge im Körper wird beliebig groß mit wachsender Zeit.

---

3. (Beispiel aus der Fischereibiologie I) In einem großen Fischteich lebt seit längerer Zeit eine stabile Population von etwa 9000 Plötzen (*Rutilus rutilus*). Davon sind 6.2% fortpflanzungsfähig und es gibt genauso viele Männchen wie Weibchen. Jedes der geschlechtsreifen Weibchen legt im Schnitt 10 000 Eier pro Jahr ab. Davon erleben nur 0.2% das nächste Jahr. Von den Tieren, die das erste Jahr überlebt haben, gehen jedes Jahr 50% zugrunde[1].

Wir wollen aus diesen Angaben ein Modell für die Populationsgröße der Plötzen machen. Da Plötzen nur einmal im Jahr laichen, bietet es sich an, mit einer linearen Iterierten Abbildung als einfachstes Modell für die Anzahl der Plötzen x_n im Jahr n zu beginnen. Um dieses aus obigen Angaben zu entwickeln, beantworten Sie bitte folgende Fragen:

(a) Wieviele der aus den 10 000 Eiern eines Weibchens geschlüpften Jungfische leben noch im darauffolgenden Jahr?

Es leben noch 0.2% von 10000, das sind $0.002 \cdot 10000 = 20$

(b) Welcher Bruchteil der Gesamtpopulation ist überhaupt in der Lage Eier zu legen?

6.2% sind geschlechtsreif, davon sind die Hälfte Weibchen, also sind 3.1% in der Lage, Eier zu legen.

(c) Wie groß ist dann die Geburtenrate α (Anzahl der Nachkommen pro Tier und Jahr)? Berücksichtigen Sie das Ergebnis aus (a)!

Da 3.1% der Population je 20 Nachkommen hervorbringen ist $\alpha = 20 \cdot 3.1\% = 62\% = 0.62$

(d) Wie groß ist die Sterberate β (Anzahl der toten Tiere pro Tier und Jahr)?

$\beta = 50\% = 0.5$

(e) Geben Sie nun die Formel einer homogenen linearen Iterierten Abbildung für die Anzahl der Plötzen $x_{n+1} = f(x_n) = rx_n$ im nächsten Jahr $n + 1$ in Abhängigkeit der Populationsgröße x_n im Jahr n an! Wie groß ist also der Parameter r ?

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= rx_n \\ &= (1 + \alpha - \beta)x_n \\ &= (1 + 0.62 - 0.5)x_n \\ &= 1.12x_n \end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad r = 1.12$

[1] 80% davon werden von Freßfeinden erbeutet, 18% verhungern, 1.999% werden geangelt und nur 0.001% sterben eines natürlichen Todes

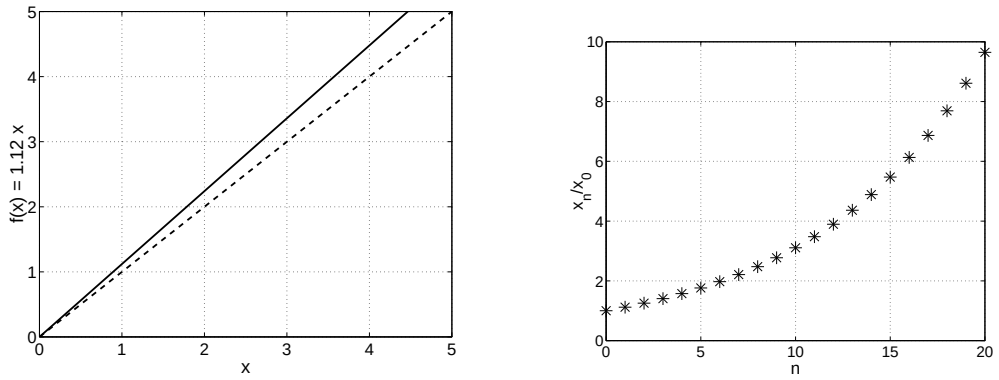


Abbildung A.17: Links: $f(x)$ gegen x mit Winkelhalbierender; Rechts: die ersten 20 Glieder der Folge x_n

(f) Skizzieren sie den Graph der Funktion $f(x)$!

Siehe den linken Teil der Abbildung A.17.

(g) Geben Sie die explizite Lösung $(x_n)n \in \mathbf{N}$ der linearen Iterierten Abbildung $x_{n+1} = f(x_n)$ für beliebige Anfangspopulationen $x_0 > 0$ an und skizzieren Sie den typischen Lösungsverlauf! (siehe Abbildung A.17 rechts)

Aus $x_{n+1} = rx_n \quad \Rightarrow \quad x_n = r^n \cdot x_0,\ n \in \mathbf{N}$

(h) Wie wird sich die Population nach dieser Formel im Laufe der Zeit entwickeln? Warum macht das biologisch keinen Sinn?

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} r^n x_0 = x_0 \lim_{n\to\infty} r^n = \infty\,, \quad \text{da } \ r > 1\,.$$

$\Rightarrow$ die Population wird beliebig groß, was Mangels unendlicher Resourcen (Platz, Futter, etc.) natürlich nicht realistisch sein kann.

---

4. (Beispiel aus der Fischereibiologie II) In einem ähnlichen Teich wie in der vorherigen Aufgabe wird wesentlich intensiver geangelt. Dadurch gehen jedes Jahr zusätzlich 20% der Plötzenpopulation verloren.

(a) Wie groß ist in diesem Teich die Sterberate β?

$\beta = \beta_{\text{alt}} + 20\% = 0.5 + 0.2 = 0.7$

(b) Wie wird sich unter diesen Bedingungen und unter Verwendung des linearen Modells aus der vorherigen Aufgabe die Plötzenpopulation langfristig entwickeln? Skizzieren sie wiederum den Graphen der Abbildung $f(x)$ und die Populationsgröße x_n für $x_0 = 9000$ und $n = 1, 2, \ldots, 5$ (siehe Abbildung A.18).

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= (1 + \alpha - \beta)x_n \\ &= (1 + 0.62 - 0.7)x_n \\ &= 0.92x_n \\ &= rx_n \end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad |r| < 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} r^n x_0 = x_0 \lim_{n\to\infty} r^n = 0$, die Population wird aussterben.

(c) Um den Fischbestand zu sichern, werden jedes Jahr d Plötzen aus einer Zucht in den Teich eingesetzt. Wie lautet nun die entsprechende lineare Iterierte Abbildung? Fertigen Sie eine Skizze des Graphen der entsprechenden Funktion $f(x)$ an und zeichnen Sie zusätzlich die Winkelhalbierende ein!

Mit konstanter Zufuhr d ist

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= rx_n + d \\ &= (1 + \alpha - \beta)x_n + d \\ &= f_{\text{neu}}(x_n) \end{aligned}$$

(d) Wo liegt der Fixpunkt der Abbildung aus Teilaufgabe (c)?

Der Fixpunkt liegt bei

$$\begin{aligned} & x^* = f(x^*) \\ \Leftrightarrow \quad & x^* = rx^* + d \\ \Leftrightarrow \quad & x^* = \frac{d}{1-r} \end{aligned}$$

Hier gilt:

$$\begin{aligned} x^* &= \frac{1}{1-0.92}d \\ &= 12.5d \end{aligned}$$

(e) Wieviele Fische müssten jedes Jahr durch Neubesatz dem Teich hinzugefügt werden (wie groß muss also d sein), um die Population stabil auf 9000 Tiere zu halten?

$$\begin{aligned} & x^* = 12.5d \\ \Leftrightarrow \quad & 9000 = 12.5d \\ \Leftrightarrow \quad & d = 720 \end{aligned}$$

(f) Wie lautet die allgemeine Lösung der Iterierten Abbildung aus Teilaufgabe (c) und (e)? Wie entwickelt sich die Population, wenn nach einem besonders harten Winter nur $x_0 = 1000$ Tiere überlebt haben? Skizzieren Sie diese Lösung!

Ablauf der Folge:
$x_0 \;\mapsto\; rx_0 + d \;\mapsto\; r(rx_0 + d) + d = r^2x_0 + rd + d \;\mapsto\; r[r(rx_0 + d) + d] + d =$

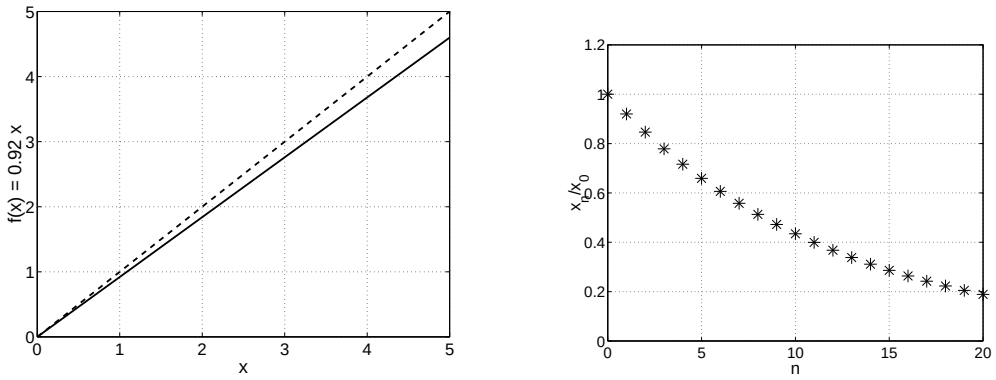


Abbildung A.18: Links: $f(x)$ gegen x mit Winkelhalbierender; Rechts: die ersten 20 Glieder der Folge x_n

$r^3x_0 + r^2d + rd + d \mapsto \ldots$
Allgemein:

$$\begin{aligned} x_n &= r^n x_0 + d(1 + r + r^2 + \ldots + r^{n-1}) \\ &= r^n x_0 + d \cdot \frac{1 - r^n}{1 - r} \qquad (1.12) \\ &= \underbrace{\frac{d}{1-r}}_{x^*} - \underbrace{\frac{d}{1-r}}_{x^*} r^n + r^n x_0 \\ &= x^* - (x^* - x_0)r^n \qquad (1.13) \end{aligned}$$

Langfristig wird sich immer der Fixpunkt einstellen, da

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} x_n &= \lim_{n\to\infty} (r^n x_0 + d\frac{1 - r^n}{1 - r}) \\ &= x_0 \cdot \underbrace{\lim_{n\to\infty} r^n}_{=0 \text{ , da } |r|<1} + d\frac{1 - \lim\limits_{n\to\infty} r^n}{1 - r} \\ &= \frac{d}{1 - r} \\ &= x^* \end{aligned}$$

Speziell für $x_0 = 1000,\ d = 720,\ r = 0.92,\ x^* = 9000$ ist nach Gleichung (1.12):

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.92 \cdot 1000 + 720\frac{1 - r}{1 - r} \\ &= 920 + 720 \\ &= 1640 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= (0.92)^2 \cdot 1000 + 720\frac{1 - 0.92^2}{1 - 0.92} \\ &= 846 + 720 \cdot 1.92 \\ &= 2228 \end{aligned}$$

und so weiter. Nach Formel (1.13):

$$\begin{aligned} x_1 &= 9000 - (9000 - 1000) \cdot 0.92 \\ &= 1640 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= 9000 - (9000 - 1000) \cdot 0.92^2 \\ &= 2228 \end{aligned}$$

Die Form (1.13) der Lösung ist am besten interpretierbar:

$x_n = (\text{Fixpunkt}) - (\text{anfängliche Abweichung vom Fixpunkt}) \cdot r^n = x^* - (x^* - x_0) \cdot r^n$

Da r^n für $|r| < 1$ mit wachsendem n immer kleiner wird, erkennt man, dass die Population sich auf den Fixpunkt hinentwickelt und dass die anfängliche Abweichung $(x^* - x_0)$ immer weniger zu x_n beiträgt.

---

5. (Lineare Iterierte Abbildung) Wir betrachten eine inhomogene lineare Iterierte Abbildung vom Typ

$$x_{t+1} = ax_t + b \quad , \quad x_0 \in \mathbf{R}^+ \qquad (1.14)$$

(siehe z.B. die Medikamentenaufgabe **2**, die Plötzenaufgabe **3** oder die Holzaufgaben im Skript).

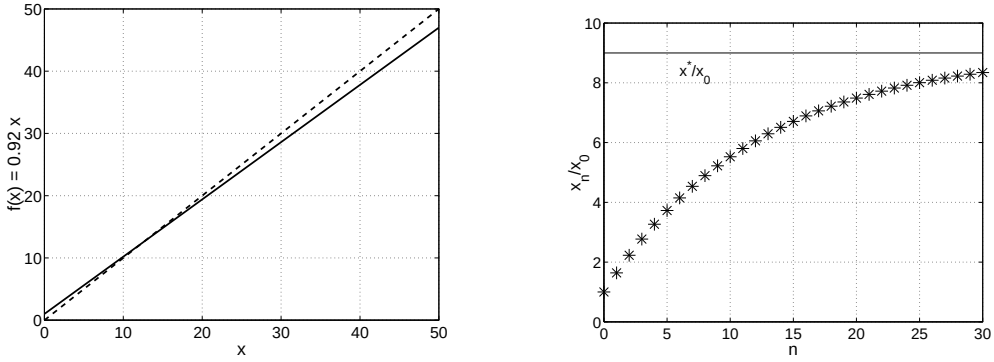


Abbildung A.19: Links: $f(x)$ gegen x mit Winkelhalbierender; Rechts: die Entwicklung der Folge nach der Störung

(a) Wie lautet die entsprechende homogene Iterierte Abbildung?
Die zugeordnete homogene iterierte Abbildung ist

$$x_{t+1} \quad = \quad ax_t, \quad x_0 \in \mathbf{R}^+$$

ohne die Inhomogenität b.

(b) Welche allgemeine Lösung hat die homogene Iterierte Abbildung?

$$x_t^{\text{hom}} = a^t \cdot x_0, \quad x_0 \in \mathbf{R}^+, \quad t \in \mathbf{N}$$

(c) Berechnen Sie die Fixpunkte der inhomogenen Iterierten Abbildung!
Fixpunktbedingung: $x^* = f(x^*)$
hier: $x^* = ax^* + b \Leftrightarrow x^* = \frac{b}{1-a}, \quad a \neq 1$
Für $a = 1$ ist die Bedingung nur für $b = 0$ erfüllbar.

(d) Geben Sie eine spezielle Lösung der inhomogenen Iterierten Abbildung an!
Eine spezielle Lösung ist z.B. die Fixpunktlösung, d.h.

$$\begin{aligned} x_t^{\text{sp}} &= x^* \\ &= \frac{b}{1-a}, \quad t \in \mathbf{N},\ a \neq 1 \end{aligned}$$

(e) Wie lautet die allgemeine Lösung der inhomogenen Iterierten Abbildung?
Die allgemeine Lösung lautet

$$\begin{aligned} x_t^{\text{allg}} &= c \cdot x_t^{\text{hom}} + x_t^{\text{sp}} \\ &= c \cdot a^t + \frac{b}{1-a}, \quad t \in \mathbf{N},\ a \neq 1 \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung ist unabhängig von x_0, enthält aber einen freien Parameter (hier c), der durch x_0 festgelegt wird.

(f) Berechnen Sie die Lösung der inhomogenen Iterierten Abbildung für den Anfangswert x_0.

$$\begin{aligned} & x_0^{\text{allg}} = x_0 \\ \Leftrightarrow \quad & c \cdot a^0 + \tfrac{b}{1-a} = x_0 \\ \Leftrightarrow \quad & c = x_0 - \tfrac{b}{1-a} = x_0 - x^* \end{aligned}$$

Die spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung zum Anfangswert x_0 lautet also

$$x_t = (x_0 - x^*)a^t + x^* = x^* - (x^* - x_0)a^t, \quad t \in \mathbf{N}\,.$$

A.7 Aufgaben zu Kapitel 7

1. (Beispiel aus der Fischereibiologie III) In der Aufgabe 3 des vorherigen Kapitels haben Sie gesehen, dass die lineare Iterierte Abbildung als Modell für die Populationsgröße der Plötzen nicht die tatsächliche Situation einer stabilen Populationsgröße beschreibt. Ein Modell, das die Probleme bei zu großen Individuenzahlen berücksichtigt, ist die Logistische Abbildung $x_{n+1} = rx_n(1-x_n/C)$. Zusätzlich zu dem linearen Modell $x_{n+1} = rx_n$ kommt hier also noch der Faktor $1 - x_n/C$ mit einem weiteren Parameter C hinzu. Der Parameter r wurde bereits in der Aufgabe 3 zuvor berechnet und ist gleich 1.12 .

(a) Berechnen sie für beliebige $r \in (0; 4]$ und $C > 0$ die Fixpunkte der logistischen Abbildung!

Fixpunkte von $x_{n+1} = f(x_n) = rx_n(1 - \frac{x_n}{C})$ ergeben sich aus $f(x^*) = x^* \Rightarrow$

$$\begin{aligned} & x^* = rx^*(1 - \frac{x^*}{C}) \\ \Leftrightarrow \quad & x^* = 0 \text{ oder } 1 = r(1 - \tfrac{x^*}{C}) \\ \Leftrightarrow \quad & x^* = 0 \text{ oder } \tfrac{x^*}{C} = \tfrac{r-1}{r} \\ \Leftrightarrow \quad & x^* = 0 \text{ oder } x^* = C - \tfrac{C}{r} = C\left(1 - \tfrac{1}{r}\right) \end{aligned}$$

(b) Wie groß muss der Parameter C sein, damit die logistische Abbildung für den speziellen Wert von $r = 1.12$ eine stabile Population vom 9000 Tieren reproduziert?

Damit für $r = 1.12$ ein Fixpunkt entsteht, muss

$$\begin{aligned} C &= \frac{rx^*}{r-1} \\ &= \frac{1.12 \cdot 9000}{1.12 - 1} \\ &= 84000 = 8.4 \cdot 10^4 \end{aligned}$$

gewählt werden.

(c) Es sei nun $r = 3.2$, $C = 1$ und $x_0 = 0.8$. Berechnen Sie die ersten sechs Werte der logistischen Abbildung und tragen sie diese in ein Achsenkreuz ein. Was fällt ihnen auf?

$$x_{n+1} = 3.2 \cdot x_n(1 - x_n) \text{ mit } x_0 = 0.8$$

n	0	1	2	3	4	5	6
x_n	0.8	0.512	0.8	0.512	0.8	0.512	0.8

A.8 Aufgaben zu Kapitel 8

1. (Grenzwerte) Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{für } x = 3 \\ 1, & \text{für } x \neq 3 \end{cases}$$

(a) Welchen Funktionswert hat $f(x)$ an der Stelle $x = 3$?

$$f(3) = 2$$

(b) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $f(x)$!

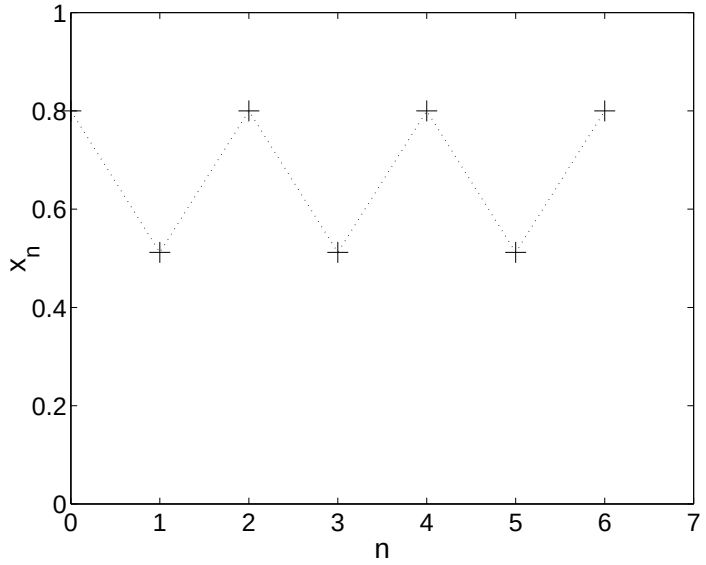


Abbildung A.20: Die Lösung oszilliert.

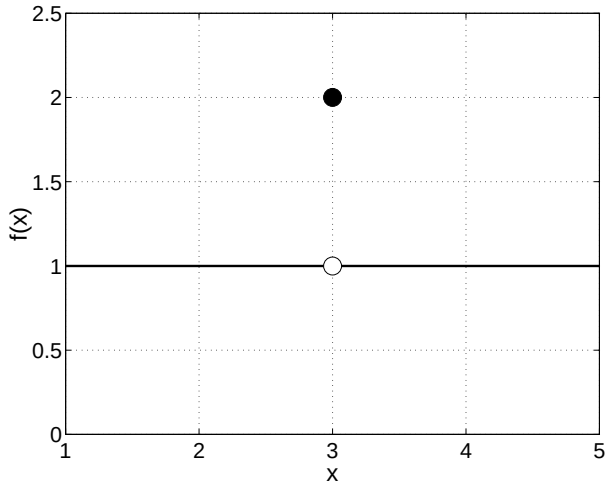


Abbildung A.21: Graph der Funktion $f(x)$

(c) Welchen Grenzwert hat $f(x)$ für $x \to 3$? (wie lauten der rechts- und der linksseitige Grenzwert?)

Linksseitiger Grenzwert: $\lim_{x \to 3^-} f(x) = 1$ (links von 3 (für alle $x < 3$) ist $f(x) = 1 \Rightarrow$ auch der Grenzwert ist 1)

Rechtsseitiger Grenzwert: $\lim_{x \to 3^+} f(x) = 1$ (analog für $x > 3$)
$\Rightarrow$ da $\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^+} f(x)$ ist $\lim_{x \to 3} f(x)$ existent und gleich 1.
Da $f(3) = 2 \neq \lim_{x \to 3} f(x)$ ist die Funktion an der Stelle $x = 3$ nicht stetig.

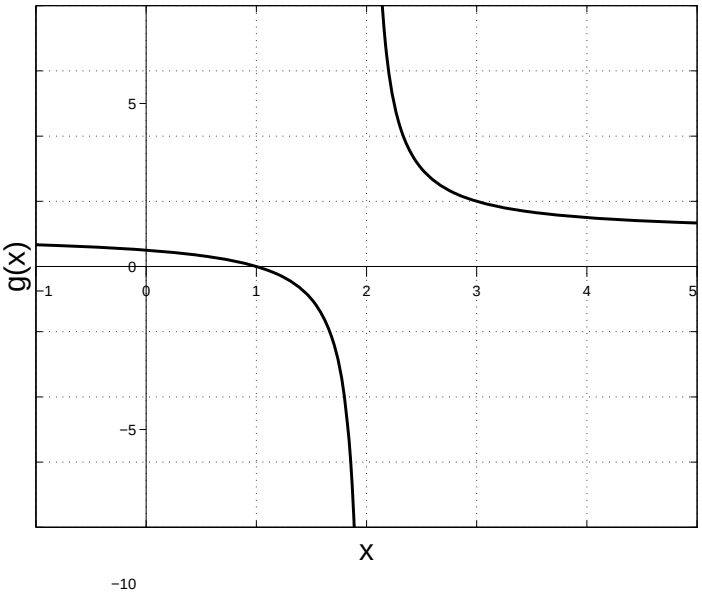


Abbildung A.22: Graph der Funktion $g(x)$

2. (Grenzwerte) Gegeben ist die Funktion

$$g(x) = \frac{1}{x-2} + 1$$

(a) Wie geht diese Funktion aus der Hyperbel $h(x) = 1/x$ hervor?

Die Funktion $g(x)$ geht aus $h(x) = \frac{1}{x}$ durch Translation um 2 Einheiten in x-Richtung und eine Einheit in y-Richtung hervor.

(b) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $g(x)$! (siehe Abbildung A.22)

(c) Wie lauten der linksseitige und der rechtsseitige Grenzwert $\lim\limits_{x\to 2^-} g(x)$ und $\lim\limits_{x\to 2^+} g(x)$?

$\lim\limits_{x\to 2^-} g(x) = -\infty$ und $\lim\limits_{x\to 2^+} g(x) = +\infty$

(d) Existiert $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$, $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$?

Aus (c) folgt, dass $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$ nicht existiert.

$\lim\limits_{x\to 1} g(x) = g(1) = 0$

---

3. (Funktionen) Die beiden **Hyperbelfunktionen** $\sinh(x)$ (lies: **sinus hyperbolicus**) und $\cosh(x)$ (lies: **cosinus hyperbolicus**) sind definiert als

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \text{und} \qquad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

(a) Welchen Funktionswert haben $\sinh(x)$ und $\cosh(x)$ an der Stelle $x = 0$?

$$\begin{aligned} \sinh(0) &= \frac{e^0 - e^{-0}}{2} = \frac{1-1}{2} = 0 \\ \cosh(0) &= \frac{e^0 + e^{-0}}{2} = \frac{1+1}{2} = 1 \end{aligned}$$

(b) Welche Grenzwerte haben die beiden Funktionen für $x \to \pm\infty$?

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \sinh(x) &= \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^{x} - \lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^{-x}\right)\\ &= \frac{1}{2}(\infty - 0)\\ &= \infty\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} \sinh(x) &= \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{x} - \lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x}\right)\\ &= \frac{1}{2}(0 - \infty)\\ &= -\infty\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \cosh(x) &= \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^{x} + \lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^{-x}\right)\\ &= \frac{1}{2}(\infty + 0)\\ &= \infty\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} \cosh(x) &= \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{x} + \lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x}\right)\\ &= \frac{1}{2}(0 + \infty)\\ &= \infty\end{aligned}$$

(c) Welche Art von Symmetrie zeigen diese Funktionen?

$\sinh(x)$ ist punktsymmetrisch bezüglich $(0, 0)$. Man nennt diese Eigenschaft auch ungerade. Dies folgt aus

$$\begin{aligned}\sinh(-x) &= \frac{\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-(-x)}}{2}\\ &= \frac{\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{x}}{2}\\ &= -\frac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{2}\\ &= -\sinh(x)\end{aligned}$$

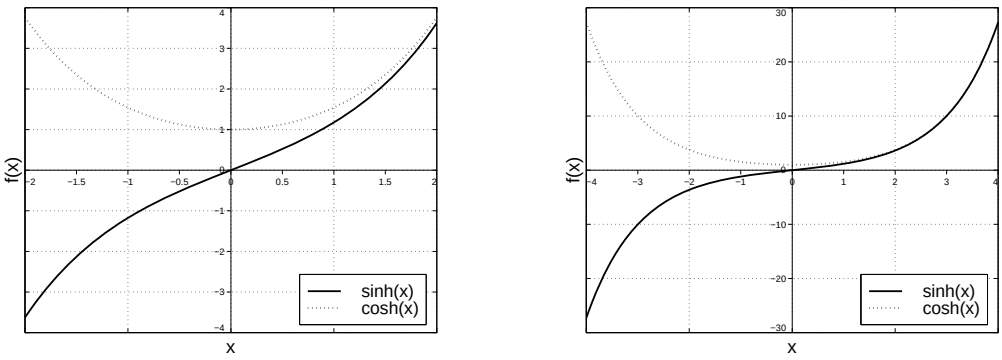


Abbildung A.23: sinh und cosh; Beachte die unterschiedliche Skalierung der x–Achse

$\cosh(x)$ ist achsensymmetrisch bezüglich der y–Achse. Man nennt dies auch gerade. Beweis:

$$\begin{aligned}\cosh(-x) &= \frac{\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-(-x)}}{2}\\ &= \frac{\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{x}}{2}\\ &= \frac{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}{2}\\ &= \cosh(x)\end{aligned}$$

(d) Skizzieren Sie die Graphen der beiden Funktionen!

---

4. (Grenzwerte) Überprüfen Sie ob die folgende Grenzwerte existieren und berechnen Sie gegebenenfalls ihre Werte:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} 2x^2 = 0$

(b) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)^3}$ existiert nicht, da
$\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{1}{(x-1)^3} = +\infty \neq \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{1}{(x-1)^3} = -\infty$

(c)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \frac{2x^4+5x^3}{x^7} &= 2\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^3} + 5\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^4}\\ &= 2\cdot 0 + 5\cdot 0\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} \frac{8x^{21}+2x^{13}-20x^3}{4x^{21}-x^4} &= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^{21}}{x^{21}}\cdot\frac{8+\frac{2}{x^8}-\frac{20}{x^{18}}}{4-\frac{1}{x^{17}}}\right)\\ &= \frac{8}{4} = 2\end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{8x^{21}+2x^{13}-20x^3}{4x^{21}-x^4} &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^3}{x^3}\cdot\frac{8x^{18}+2x^{10}-20}{x(4x^{17}-1)}\right)\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x^3}\cdot\frac{\lim\limits_{x\to 0}(8x^{18}+2x^{10}-20)}{\lim\limits_{x\to 0}(4x^{17}-1)}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\\ &= 1\cdot\frac{-20}{-1}\cdot \underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}}_{\text{existiert nicht}}\end{aligned}$$

Der Grenzwert existiert nicht. Es handelt sich um eine Polstelle wie bei $\frac{1}{x}$, d.h. mit Vorzeichenwechsel und

$$\lim_{x\to 0^+}\tfrac{1}{x} = +\infty \text{ und } \lim_{x\to 0^-}\tfrac{1}{x} = -\infty$$

(f)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} \frac{x^2-x_0^2}{x-x_0} &= \lim_{x\to x_0}\frac{(x-x_0)(x+x_0)}{x-x_0} \quad \text{(3. binomische Formel)}\\ &= \lim_{x\to x_0}(x+x_0)\\ &= 2x_0\end{aligned}$$

A.9 Aufgaben zu Kapitel 9

1. (Ableitung) Bestimmen Sie die maximalen Definitionsgebiete M der folgenden Funktionen und berechnen Sie die Ableitungen für alle $x \in M$. Hinweis: für die Ableitung der Exponentialfunktion gilt $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x$.

(a) $f(x) = x^2 - 7x^5\,, \quad M = \mathbf{R}$
$f'(x) = 2x - 35x^4$

(b) $f(x) = 2x^{3/2} + ax^{-4}\,, \quad M = \mathbf{R}^+$
(+ wegen der Wurzel in $x^{\frac{3}{2}}$ und ohne die 0 wegen $\frac{a}{x^4}$)
$f'(x) = 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot x^{\frac{3}{2}-1} + a \cdot (-4)x^{-5} = 3\sqrt{x} - \frac{4a}{x^5}$

(c) $f(x) = \dfrac{\frac{1}{2}x^2 + 2}{3x^3 - 4x}\,, \quad M = \mathbf{R} \backslash \underbrace{\left\{0, \pm\frac{2}{3}\sqrt{3}\right\}}_{\substack{\text{Nullstellen} \\ \text{des Nenners}}}$

Ableitung mittels Quotientenregel: $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

Hier mit $u(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2 \;\Rightarrow\; u'(x) = x$ und $v(x) = 3x^3 - 4x \;\Rightarrow\; v'(x) = 9x^2 - 4$

$\Rightarrow \quad f'(x) = \dfrac{x \cdot (3x^3 - 4x) - (\frac{1}{2}x^2 + 2)(9x^2 - 4)}{(3x^3 - 4x)^2}$

Dies kann umgeformt werden zu:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x}{3x^3 - 4x} - \frac{(\frac{1}{2}x^2 + 2)(9x^2 - 4)}{(3x^3 - 4x)^2} \\ &= \frac{1}{3x^2 - 4} - \frac{\frac{9}{2}x^4 + 16x^2 - 8}{9x^6 - 24x^4 + 16x^2} \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3x^4 - 4x^2 - \frac{9}{2}x^4 - 16x^2 + 8}{(3x^3 - 4x)^2} \\ &= \frac{-\frac{3}{2}x^4 - 20x^2 + 8}{9x^6 - 24x^4 + 16x^2} \end{aligned}$$

(d) $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x - b}\,, \quad M = \mathbf{R}\backslash\{b\}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\mathrm{e}^x(x - b) - \mathrm{e}^x \cdot 1}{(x - b)^2} \\ &= \mathrm{e}^x \frac{x - b - 1}{(x - b)^2} \\ &= \mathrm{e}^x \left(\frac{1}{x - b} - \frac{1}{(x - b)^2}\right) \end{aligned}$$

Allgemein gilt für Funktionen der Form $f(x) = g(x) \cdot \mathrm{e}^x$

$$\begin{aligned} f'(x) &= g(x) \cdot \mathrm{e}^x + g'(x)\mathrm{e}^x \;\; \text{(Produktregel und } (\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x) \\ &= \mathrm{e}^x(g(x) + g'(x)) \end{aligned}$$

(e) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}\,, \quad M = \mathbf{R}$
Die Funktion ist von der Form $f(x) = g(h(x))$
mit $h(x) = x^2 + 1$ und $g(y) = \sqrt{y}$. Mit der Kettenregel ergibt sich dann

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} \cdot 2x \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \end{aligned}$$

(f) $f(x) = (1-\gamma x^4)^{-5}\,, \quad M = \mathbf{R} \setminus \underbrace{\left\{ \pm \sqrt[4]{\frac{1}{\gamma}} \right\}}_{\substack{\text{Nullstellen} \\ \text{von } 1-\gamma x^4}}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (-5)\cdot(1-\gamma x^4)^{-6}\cdot(-4\gamma x^3) \\ &= \frac{20\gamma x^3}{(1-\gamma x^4)^6} \end{aligned}$$

(g) $f(x) = \mathrm{e}^{-3x^2}\,, \quad M = \mathbf{R}$

$$f'(x) = (-6x)\cdot \mathrm{e}^{-3x^2}$$

(h) $f(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}\,, \quad M = \mathbf{R}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x} \\ &= \mathrm{e}^{x+\mathrm{e}^x} \end{aligned}$$

Allgemein gilt für Funktionen der Form $f(x) = \mathrm{e}^{g(x)}$: $f'(x) = g'(x)\mathrm{e}^{g(x)}$

(i) $f(x) = \sqrt{x^2+1} - cx\,, \quad M = \mathbf{R}$

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - c \qquad \text{vgl. Aufg. (e)}$$

(j) $f(x) = \mathrm{e}^{k(x-x_0)} + 4\sqrt{x}\,, \quad M = \mathbf{R}_0^+$ (wegen der Wurzel)

$$f'(x) = k\mathrm{e}^{k(x-x_0)} + \frac{2}{\sqrt{x}}, \quad x \neq 0 \ , f(x) \text{ ist bei 0 nicht differenzierbar}$$

(k) $f(x) = x^2 \cdot \mathrm{e}^{-3x}\,, \quad M = \mathbf{R}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x)\mathrm{e}^{-3x} + x^2 \cdot \mathrm{e}^{-3x}\cdot(-3) \ \text{(Produktregel und Kettenregel)} \\ &= \mathrm{e}^{-3x}(2x-3x^2) \end{aligned}$$

Allgemein gilt für Funktionen der Form $f(x) = g(x)\cdot \mathrm{e}^{h(x)}$:

$f'(x) = \mathrm{e}^{h(x)}(g'(x) + g(x)\cdot h'(x))$

(l) $f(x) = \dfrac{(7x^2-4)^6}{\sqrt{x^2+1}}\,, \quad M = \mathbf{R}$

Quotientenregel mit $u(x) = (7x^2-4)^6 \ \Rightarrow \ u'(x) = 84x(7x^2-4)^5$
und $v(x) = \sqrt{x^2+1} \ \Rightarrow \ v'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{84x(7x^2-4)^5\sqrt{x^2+1} - (7x^2-4)^6\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} \\ &= \frac{84x(7x^2-4)^5(x^2+1) - (7x^2-4)x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{(7x^2-4)^5}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}\left(84x(x^2+1) - (7x^2-4)x\right) \\ &= \frac{7x^2-4)^5}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}(77x^3+88x) \\ &= \frac{(7x^2-4)^5}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}\cdot 11x\cdot(7x^2+8) \end{aligned}$$

2. (Verkürzte Kurvendiskussion) Gegeben sind die beiden Funktionen:

$$f(x) = x^3 - 9x \quad \text{und} \quad g(x) = x^4 - 5x^2 + 4$$

(a) Wie verhalten sich die Funktionen für betragsmäßig sehr große Werte von x?

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ und $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \infty$

(b) Berechnen Sie die Nullstellen!

Zur Bestimmung der Nullstellen werden die Funktionen umgeformt:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 9x \\ &= x(x^2 - 9) \\ &= x(x+3)(x-3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(x) &= x^4 - 5x^2 + 4 \\ &= (x^2 - 4)(x^2 - 1) \\ &= (x+2)(x-2)(x+1)(x-1) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Nullstellen von $f(x)$: $x_{01} = 0,\ x_{02} = -3,\ x_{03} = 3$
$\Rightarrow$ Nullstellen von $g(x)$: $x_{01} = -2,\ x_{02} = 2,\ x_{03} = -1,\ x_{04} = 1$

(c) Welche Symmetrien besitzen die Funktionen?

$f(x)$ ist ungerade, da

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^3 - 9(-x) \\ &= -x^3 + 9x \\ &= -(x^3 - 9x) \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

$g(x)$ ist gerade, da

$$\begin{aligned} g(-x) &= (-x)^4 - 5(-x)^2 + 4 \\ &= x^4 - 5x^2 + 4 \\ &= g(x) \end{aligned}$$

(d) Berechnen Sie die 1., 2., 3. und 4. Ableitung von $f(x)$ und $g(x)$!

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 9 \\ f''(x) &= 6x \\ f'''(x) &= 6 \\ f''''(x) &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} g'(x) &= 4x^3 - 10x \\ g''(x) &= 12x^2 - 10 \\ g'''(x) &= 24x \\ g''''(x) &= 24 \end{aligned}$$

---

3. (Ableitung von Polynomen) Gegeben ist folgendes Polynom 4. Grades:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{4} \frac{1}{k+1} x^k$$

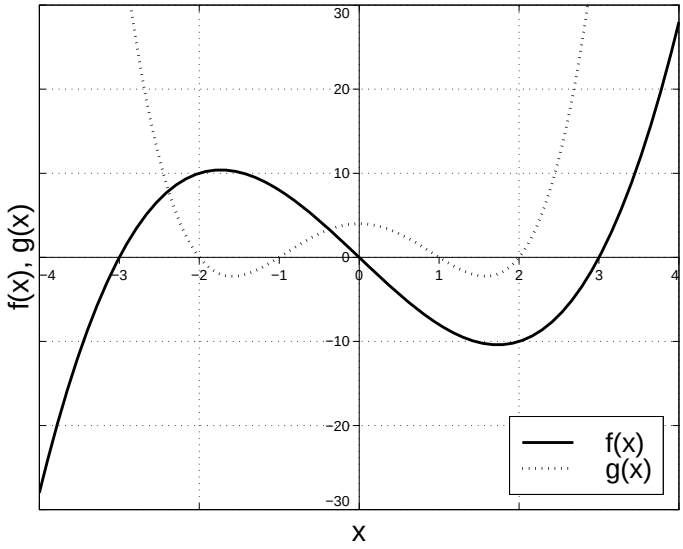


Abbildung A.24: $f(x) = x^3 - 9x$ und $g(x) = x^4 - 5x^2 + 4$

(a) Schreiben Sie die Summe aus!

$$p(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{5}x^4$$

(b) Wie lauten die lineare und die quadratische Näherung von $p(x)$?

lineare Näherung: $p_{\text{lin}}(x) = 1 + \frac{1}{2}x$

quadratische Näherung: $p_{\text{quad}}(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2$

(c) Wie verhält sich $p(x)$ für betragsmäßig sehr große Werte von x ?

$\lim_{x \to \pm\infty} p(x) = \infty$ (da die höchste Potenz x^4 gerade ist)

(d) Berechnen Sie die Ableitung $p'(x) = \mathrm{d}p(x)/\mathrm{d}x$ des Polynoms!

$p'(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3}x + \frac{3}{4}x^2 + \frac{4}{5}x^3$ oder

$p'(x) = \sum_{k=1}^{4} \frac{k}{k+1} x^{k-1}$

(e) Wie verhält sich die Ableitung $p'(x)$ für betragsmäßig sehr große Werte von x ?

$$\lim_{x \to \infty} p'(x) = \infty, \quad \lim_{x \to -\infty} p'(x) = -\infty$$

(f) Die Ableitung $p'(x)$ ist wiederum ein Polynom. Welchen Grad hat es?

$p'(x)$ ist ein Polynom dritten Grades (ein Grad niedriger als $p(x)$)

---

4. (Ableitung) Bestimmen Sie die maximalen Definitionsgebiete M der folgenden Funktionen und berechnen Sie die Ableitungen für alle $x \in M$.

(a) $f(x) = x\mathrm{e}^{-x^2}, \quad M = \mathbf{R}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \cdot \mathrm{e}^{-x^2} + x \cdot (-2x)\mathrm{e}^{-x^2} \\ &= (1 - 2x^2)\mathrm{e}^{-x^2} \end{aligned}$$

(b) $f(x) = (x-1)\mathrm{e}^{-(x-1)^2}, \quad M = \mathbf{R}$
Entweder wie zuvor mit Produkt- und Kettenregel direkt berechnen, oder man macht die folgende Beobachtung: Mit $y = x - 1 \;\Rightarrow\; f(x) = g(y) = y \cdot \mathrm{e}^{-y^2}$ wie in (a)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} g(y) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \\ &= (1 - 2y^2)\mathrm{e}^{-y^2} \cdot \underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x-1)}_{=1} \\ &= (1 - 2(x-1)^2)\mathrm{e}^{-(x-1)^2} \qquad \text{(Rücksubstitution)} \\ &= (-2x^2 + 4x - 1)\mathrm{e}^{-(x-1)^2} \end{aligned}$$

(c) $f(x) = \dfrac{1}{1 + \mathrm{e}^{-x}} = (1 + \mathrm{e}^{-x})^{-1}, \quad M = \mathbf{R}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (-1) \cdot (1 + \mathrm{e}^{-x})^{-2} \cdot (-\mathrm{e}^{-x}) \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-x}}{(1 + \mathrm{e}^{-x})^2} \end{aligned}$$

(d) $f(x) = \ln(x), \quad M = \mathbf{R}^+$

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

(e) $f(x) = \log_{10}(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}, \quad M = \mathbf{R}^+$

$$f'(x) = \frac{1}{\ln(10)} \cdot \frac{1}{x}$$

(f) $f(x) = x \log_2(x) = \dfrac{1}{\ln(2)} \cdot x \cdot \ln(x), \quad M = \mathbf{R}^+$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\ln(2)} \left(1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} \right) \\ &= \frac{1}{\ln(2)} (\ln(x) + 1) \\ &= \log_2(x) + \frac{1}{\ln(2)} \end{aligned}$$

(g) $f(x) = x^x, \quad M = \mathbf{R}^+$
Als Basis muss $x > 0$ sein, um einen beliebigen reellen Exponenten zu erlauben. Für die Berechnung der Ableitung wird $f(x)$ umgeformt:

$$\begin{aligned} x^x &= \mathrm{e}^{\ln(x^x)} \\ &= \mathrm{e}^{x \ln(x)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\ln(x) + 1)\mathrm{e}^{x \ln(x)} \qquad \text{(wie in (f))} \\ &= (\ln(x) + 1)x^x \end{aligned}$$

(h) $f(x) = ax^2 + bx + c\,, \quad M = \mathbf{R}$

$$f'(x) = 2ax + b$$

(i) $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \ , \ a_k \in \mathbf{R}\,, \quad M = \mathbf{R}$

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{n} k \cdot a_k \cdot x^{k-1}$$

---

5. (Ableitung der Umkehrfunktion) Wir betrachten die Funktion $f(x) = \ln(x+1)$.

(a) Wie geht $f(x)$ aus der Funktion $g(x) = \ln(x)$ hervor?

Die $+1$ im Argument entspricht einer Verschiebung der Funktion um -1 entlang der x-Achse.

(b) Welchen Definitions- und welchen Wertebereich hat $f(x)$?

$\mathbf{D} = \{x | x \in \mathbf{R} \text{ und } x > -1\}$, denn es muss $x + 1 > 0$ gelten ; $W = \mathbf{R}$

(c) Für welche x ist f umkehrbar? Berechnen Sie die Umkehrfunktion f^{-1} von f!

f ist für alle $x \in \mathbf{D}$ umkehrbar. Sei $y = \ln(x+1)$

$$\begin{aligned} & e^y = x + 1 \\ \Leftrightarrow \quad & x = e^y - 1 \\ \Rightarrow \quad & f^{-1}(x) = e^x - 1 \end{aligned}$$

(d) Skizzieren Sie die Graphen von $f(x)$ und $f^{-1}(x)$!

(e) Berechnen Sie zuerst die Ableitung von f^{-1} und dann damit die Ableitung von $f(x)$!

$$\begin{aligned} & (f^{-1}(x))' = e^x \\ \Rightarrow \quad & (f(x))' = \frac{1}{e^{(\ln(x+1))}} = \frac{1}{x+1} \end{aligned}$$

---

6. (Taylorentwicklung) Gegeben seien die Funktionen Cosinus hyperbolicus und Sinus hyperbolicus:

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{und} \quad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

(a) Berechnen Sie die ersten vier Ableitungen der beiden Funktionen und versuchen Sie diese jeweils durch $\cosh(x)$ oder $\sinh(x)$ auszudrücken! Geben Sie eine kompakte Form der n-ten Ableitung $\cosh^{(n)}$ bzw. $\sinh^{(n)}$ an!

$$\begin{aligned} \cosh'(x) &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh(x) \\ \sinh'(x) &= \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x) \end{aligned}$$

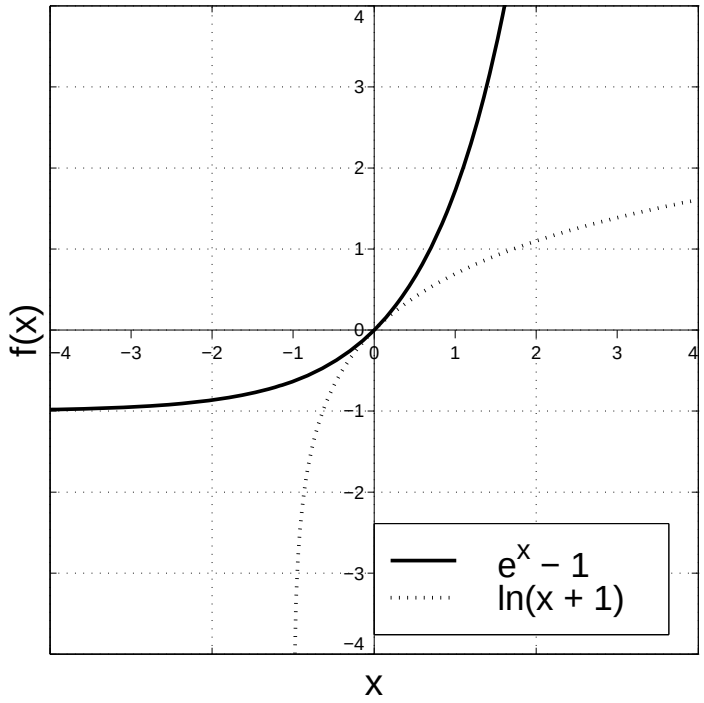


Abbildung A.25: $f(x) = \ln(x+1)$ und $f^{-1}(x) = \mathrm{e}^x - 1$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & \cosh''(x) = \cosh(x) \\ \Rightarrow \quad & \cosh'''(x) = \sinh(x) \\ \Rightarrow \quad & \cosh''''(x) = \cosh(x) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & \sinh''(x) = \sinh(x) \\ \Rightarrow \quad & \sinh'''(x) = \cosh(x) \\ \Rightarrow \quad & \sinh''''(x) = \sinh(x) \end{aligned}$$

Allgemein gilt: $[\sinh(x)]^{(n)} = \begin{cases} \cosh(x)\,, & n \text{ gerade} \\ \sinh(x)\,, & n \text{ ungerade} \end{cases}$

$$[\cosh(x)]^{(n)} = \begin{cases} \sinh(x)\,, & n \text{ gerade} \\ \cosh(x)\,, & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

(b) Stellen Sie die Taylorreihen von $\cosh(x)$ und $\sinh(x)$ für $x_0 = 0$ auf!

Aus (a) folgt: $[\cosh(x)]^{(n)}_{x_0=0} = \begin{cases} 1\,, & n \text{ gerade} \\ 0\,, & n \text{ ungerade} \end{cases}$

Damit in (9.49) aus dem Skript ⇒

$$\begin{aligned}\cosh(x) &= \cosh(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-0)^k}{k!} \cdot \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} \cosh(x) \Big|_{x_0} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad \text{(nur die Terme mit } k = 2n \text{ tragen bei)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}\end{aligned}$$

und für

$$\begin{aligned}\sinh(x) &= \sinh(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-0)^k}{k!} \cdot \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} \sinh(x) \Big|_{x_0} \\ &= 0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \qquad \text{(nur die Terme mit ungeradem } k \text{ tragen bei)}\end{aligned}$$

(c) Wie lauten die quadratischen Näherungen von $\cosh(x)$ und $\sinh(x)$ an der Stelle $x = 0$?

quadratische Näherung:

$$\begin{aligned}\cosh(x) &= 1 + \frac{1}{2}x^2 \\ \sinh(x) &= x\end{aligned}$$

Skizzieren Sie die Graphen der Näherungen zusammen mit denen der ursprünglichen Funktionen f und g.

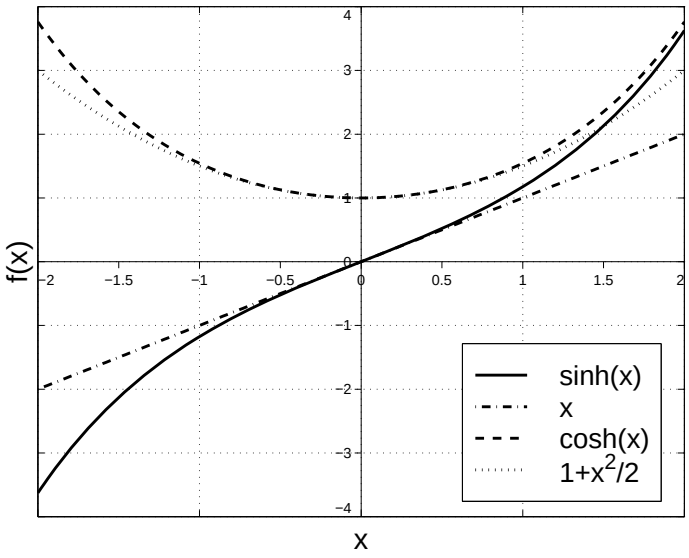


Abbildung A.26: Die Funktionen $\sinh(x)$ und $\cosh(x)$ zusammen mit ihren Näherungen

(d) Wie hängen diese mit der Taylorreihe der Exponentialfunktion zusammen? Berechnen Sie dazu $\cosh(x) + \sinh(x)$ direkt und als Summe der entsprechenden Taylorrei-

hen!

$$\begin{aligned}\cosh(x)+\sinh(x) &= \frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}+\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}\\ &= \frac{\mathrm{e}^x}{2}+\frac{\mathrm{e}^{-x}}{2}+\frac{\mathrm{e}^x}{2}-\frac{\mathrm{e}^{-x}}{2}\\ &= \mathrm{e}^x\end{aligned}$$

Taylorreihen:

$$\begin{aligned}\cosh(x)+\sinh(x) &= \left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\ldots\right)+\left(\frac{x^1}{1!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots\right)\\ &= \frac{x^0}{0!}+\frac{x^1}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\\ &= \mathrm{e}^x\end{aligned}$$

wobei $\frac{x^0}{0!}=1$, da $x^0=1$ und $0!=1$

---

7. (Gauß-Funktion) Die Gauß-Funktion ist definiert als

$$f_{\text{Gauß}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$$

(a) Berechnen Sie die erste und die zweite Ableitung der Gauß-Funktion $f'_{\text{Gauß}}$ und $f''_{\text{Gauß}}$!

$$\begin{aligned}f'_{\text{Gauß}} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)\cdot\left(-\frac{x}{\sigma^2}\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{|\sigma^3|}\cdot(-x)\cdot\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)\\ &= -\frac{x}{\sigma^2}\cdot f_{\text{Gauß}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f''_{\text{Gauß}} &= -\frac{1}{\sigma^2}\cdot f_{\text{Gauß}}-\frac{x}{\sigma^2}\cdot f'_{\text{Gauß}}\\ &= \left(-\frac{1}{\sigma^2}+\frac{x^2}{\sigma^4}\right)\cdot f_{\text{Gauß}}\\ &= \frac{1}{\sigma^2}\left(\frac{x^2}{\sigma^2}-1\right)\cdot f_{\text{Gauß}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{|\sigma^3|}\left(\frac{x^2}{\sigma^2}-1\right)\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)\end{aligned}$$

(b) Wie verhalten sich $f_{\text{Gauß}}$, $f'_{\text{Gauß}}$ und $f''_{\text{Gauß}}$ für betragsmäßig sehr große Werte von x ?

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pm\infty} f_{\text{Gauß}} &= 0\\ \lim_{|x|\to\infty} f'_{\text{Gauß}} &= 0\\ \lim_{x\to\pm\infty} f''_{\text{Gauß}} &= 0\end{aligned}$$

da die Exponentialfunktion schneller als jede Potenzfunktion gegen Null geht.

(c) Versuchen Sie $f_{\text{Gauß}}(-x)$, $f'_{\text{Gauß}}(-x)$ und $f''_{\text{Gauß}}(-x)$ jeweils durch $f_{\text{Gauß}}(x)$, $f'_{\text{Gauß}}(x)$ und $f''_{\text{Gauß}}(x)$ auszudrücken. Was sagt das Ergebnis über die Symmetrieeigenschaften der drei Funktionen aus?

$$\begin{aligned}
f_{\text{Gauß}}(-x) &= f_{\text{Gauß}}(x) \;\Rightarrow\; \text{gerade, achsensymmetrisch} \\
f'_{\text{Gauß}}(-x) &= -\frac{(-x)}{\sigma^2} f_{\text{Gauß}}(-x) \\
&= \frac{x}{\sigma^2} f_{\text{Gauß}}(x) \\
&= -f'_{\text{Gauß}}(x) \;\Rightarrow\; \text{ungerade, punktsymmetrisch zum Ursprung} \\
f''_{\text{Gauß}}(-x) &= f''_{\text{Gauß}}(x) \;\text{ da quadratisch in } x \;\Rightarrow\; \text{achsensymmetrisch, gerade}
\end{aligned}$$

(d) Berechnen Sie die Nullstellen der Gauß-Funktion und ihren beiden Ableitungen! Was bedeutet die Nullstelle von $f'_{\text{Gauß}}$ für $f_{\text{Gauß}}$? Was bedeuten die Nullstellen von $f''_{\text{Gauß}}$ für $f'_{\text{Gauß}}$? Was bedeuten die Nullstellen von $f''_{\text{Gauß}}$ für $f_{\text{Gauß}}$? Was beschreibt also der Parameter σ ?

Da $\mathrm{e}^x \neq 0$ für alle $x \in \mathbf{R} \;\Rightarrow\; f_{\text{Gauß}}(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbf{R}$.
$f'_{\text{Gauß}}(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{x}{\sigma^2} f_{\text{Gauß}} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ da $f_{\text{Gauß}} \neq 0 \Rightarrow$ $f'_{\text{Gauß}}$ hat bei $x_0 = 0$ möglicherweise ein Extremum, und da $f''_{\text{Gauß}}(0) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}\sigma^2} < 0$ handelt es sich tatsächlich um ein Maximum.

$f''_{\text{Gauß}}(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{|\sigma^3|} \left(\frac{x^2}{\sigma^2} - 1\right) \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} = 0 \Leftrightarrow x^2 = \sigma^2$
$\Leftrightarrow x = \sigma$ oder $x = -\sigma$
$\Rightarrow$ $f'_{\text{Gauß}}$ hat bei $x = \pm\sigma$ möglicherweise Extrema und $f_{\text{Gauß}}$ hat bei $x = \pm\sigma$ tatsächlich Wendepunkte, d.h. σ ist ein Maß für die Breite des Buckels der 'Gaußglocke'.

(e) Berechnen Sie die Funktionswerte an der Stelle $x = 0$!

$$\begin{aligned}
f_{\text{Gauß}}(0) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \\
f'_{\text{Gauß}}(0) &= 0 \\
f''_{\text{Gauß}}(0) &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}|\sigma^3|}
\end{aligned}$$

(f) Skizzieren Sie die Graphen der drei Funktionen $f_{\text{Gauß}}$, $f'_{\text{Gauß}}$ und $f''_{\text{Gauß}}$! Berücksichtigen Sie dabei die Ergebnisse aus (b)–(e), und dass die Funktionen durch Ableiten auseinander hervorgehen.

---

8. (Fortsetzung von Funktionen) Die Funktion f sei für $x < 0$ durch $g(x) = \mathrm{e}^x$ gegeben. Sie soll durch die Funktion $h(x) = a + bx$ für $x \geq 0$ fortgesetzt werden.

$$f(x) = \begin{cases} g(x) = \mathrm{e}^x & ; \quad x < 0 \\ h(x) = a + bx & ; \quad x \geq 0 \end{cases}$$

(a) Wie müssen a und b gewählt werden, so dass $g(0) = h(0)$ und $g'(0) = h'(0)$?

Es muss gelten: $g(0) = h(0) \Leftrightarrow 1 = a$ und $g'(0) = h'(0) \Leftrightarrow 1 = b$
d.h. für $a = b = 1$ ist $g'(0) = h'(0)$ und $g(0) = h(0)$

(b) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $f(x)$!

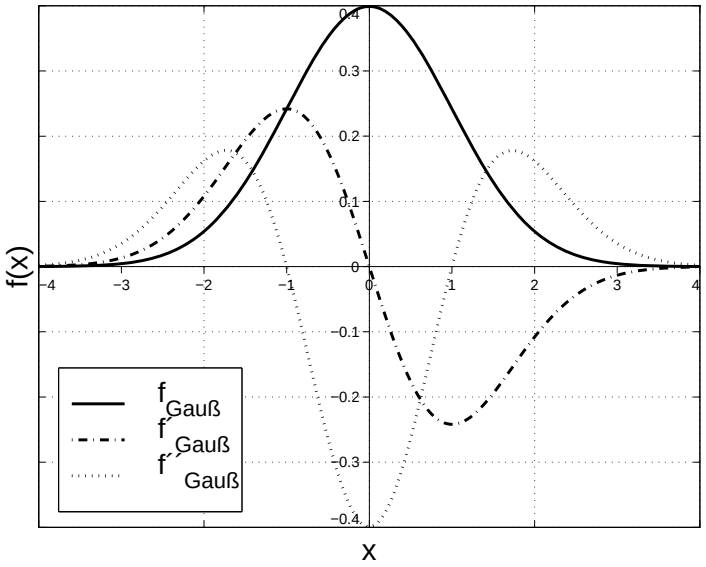


Abbildung A.27: Die Gaußglocke mit ihrer ersten und zweiten Ableitung

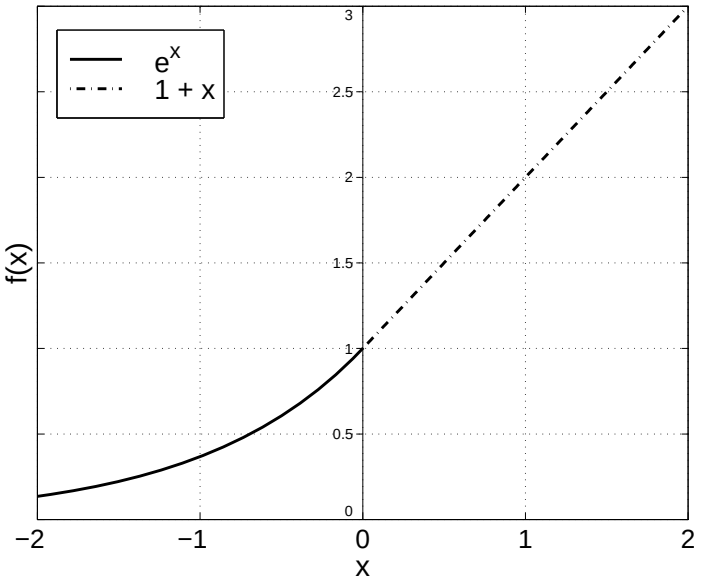


Abbildung A.28: Die Funktion $f(x)$ gegen x

(c) Berechnen Sie allgemein auch $g''(x)$ und $h''(x)$. Was gilt für die zweite Ableitung der Funktion f an der Stelle $x = 0$?

$g''(x) = \mathrm{e}^x$ und $h''(x) = 0 \Rightarrow g''(0) = 1$ und $h''(0) = 0$
$\Rightarrow$ Die zweite Ableitung macht einen Sprung an der Stelle $x = 0$

(d) Es sei nun $h(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$. Bestimmen Sie die Parameter a_k so, dass alle Ableitungen von $g(x)$ und $h(x)$ an der Stelle $x = 0$ übereinstimmen. Wie lautet dann die Funktion $f(x)$?

$\rightarrow$ Für $h(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ gilt $h^{(n)}(0) = a_n \cdot n!$, weil an der Stelle 0 nur der konstante Term beiträgt. Der konstante Term der n-ten Ableitung ergibt sich aber aus dem Term $a_n x^n$ durch n-faches Ableiten zu $a_n \cdot n \cdot (n-1) \ldots (n-(n-1)) = a_n n!$

$\Rightarrow$ Weil $(\mathrm{e}^x)^{(n)} = \mathrm{e}^x$ und somit $(\mathrm{e}^x)^{(n)}|_0 = 1$ für alle $n \in \mathbf{N}$ müssen die Parameter $a_n = \frac{1}{n!}$ gewählt werden und damit ist

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{lcl} \mathrm{e}^x & , & x < 0 \\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} & , & x \geq 0 \end{array} \right\} = \mathrm{e}^x$$

Die Forderung der Übereinstimmung aller Ableitungen an einer bestimmten Stelle mit der Funktion e^x führt auf die Potenzreihen-Darstellung von e^x.

---

9. (Beispiel aus der Neurobiologie) In der Netzhaut von Wirbeltieren befindet sich direkt unter den Photorezeptoren ein Netzwerk von sogenannten Horizontalzellen. Wird die Retina mit einem Lichtspalt der Breite $2d$ am Ort $x = 0$ beleuchtet, ergibt ein einfaches Modell folgenden Verlauf der Membranspannung $V(x)$ der Horizontalzellen am Ort in x rechtwinklig zum Spalt:

$$V(x) = \left\{ \begin{array}{lcl} c_1 \exp\left(-\frac{|x|}{\lambda}\right) + E_0 & ; & |x| > d \\ c_2 \cosh\left(\frac{x}{\lambda}\right) + E_1 & ; & |x| \leq d \end{array} \right.$$

Darin ist E_0 das Ruhepotential der Zellen im Dunkeln, E_1 ist die Membranspannung, die sich einstellt, wenn die ganze Retina beleuchtet wird, und λ ist die Längskonstante, die beschreibt, wie weit sich eine Änderung der Membranspannung in dem Horizontalzellennetzwerk ausbreitet. c_1 und c_2 sind zwei zunächst beliebige Konstanten, die im Folgenden bestimmt werden sollen.

(a) Welche Membranspannung herrscht in den Zellen, die weit vom Spalt entfernt sind?

Weit vom Spalt entfernt bedeutet $|x| \gg d$ und im Grenzfall

$$\begin{array}{rcll} \lim\limits_{|x|\to\infty} V(x) & = & \lim\limits_{|x|\to\infty} \left(c_1 \mathrm{e}^{-\frac{|x|}{\lambda}} + E_0\right) & \\ & = & E_0 \qquad \text{da} \lim\limits_{|x|\to\infty} \mathrm{e}^{-|x|} = 0 & \end{array}$$

(b) Welche Symmetrie hat die Funktion f?

$V(x)$ ist gerade, also achsensymmetrisch, denn

$$V(-x) = \left\{ \begin{array}{lcl} c_1 \mathrm{e}^{-\frac{|-x|}{\lambda}} + E_0 & = & c_1 \mathrm{e}^{-\frac{|x|}{\lambda}} + E_0 \\ c_2 \cosh\left(\frac{-x}{\lambda}\right) + E_1 & = & c_2 \cosh\left(\frac{x}{\lambda}\right) + E_1 \end{array} \right\} = V(x)$$

(c) Bestimmen Sie die beiden Konstanten c_1 und c_2 so, dass f und f' stetig an den Stellen $x = d$ und $x = -d$ ist!

Aufgrund der Symmetrie genügt es, $V(x)$ nur für positive x zu untersuchen. Sei also $x \geq 0$

$$V'(x) = \left\{ \begin{array}{lcl} -\frac{c_1}{\lambda} \mathrm{e}^{-\frac{|x|}{\lambda}} & ; & x > d \\ \frac{c_2}{\lambda} \sinh\left(\frac{x}{\lambda}\right) & ; & 0 \leq x \leq d \end{array} \right.$$

Damit $V(x)$ bei $x = d$ stetig ist, muss gelten

$$\begin{aligned} \lim_{x\to d^-} V(x) &= \lim_{x\to d^+} V(x) \\ &= V(d) \\ \Rightarrow \quad c_1 \mathrm{e}^{-\frac{d}{\lambda}} + E_0 &= c_2 \cosh\left(\frac{d}{\lambda}\right) + E_1 \end{aligned} \tag{1.15}$$

Aus der Forderung nach der Stetigkeit von $V'(x)$ an der Stelle d folgt

$$-\frac{c_1}{\lambda}\mathrm{e}^{-\frac{d}{\lambda}} = \frac{c_2}{\lambda}\sinh\left(\frac{d}{\lambda}\right) \tag{1.16}$$

Das sind zwei Gleichungen für die beiden Unbekannten c_1 und c_2.
Aus (1.16) ergibt sich c_1 zu

$$c_1 = -c_2 \sinh\left(\frac{d}{\lambda}\right)\mathrm{e}^{\frac{d}{\lambda}} \tag{1.17}$$

und damit in (1.15)

$$-c_2 \sinh\left(\frac{d}{\lambda}\right) + E_0 = c_2 \cosh\left(\frac{d}{\lambda}\right) + E_1 \tag{1.18}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \quad c_2 \underbrace{\left[\sinh\left(\frac{d}{\lambda}\right) + \cosh\left(\frac{d}{\lambda}\right)\right]}_{=\exp(\frac{d}{\lambda})} &= E_0 - E_1 \\ \Leftrightarrow \quad c_2 &= (E_0 - E_1)\mathrm{e}^{-\frac{d}{\lambda}} \\ \Rightarrow \quad c_1 &= (E_1 - E_0)\sinh\left(\frac{d}{\lambda}\right) \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt c_2 in (1.17) eingesetzt wurde.

(d) Skizzieren Sie den Graph der Membranspannung $V(x)$.

---

10. (Taylorentwicklung, Kurvendiskussion) Wir wollen zeigen, dass für $|x| \ll 1$ die Näherung $\sqrt{1-x^2} \approx 1 - \frac{1}{2}x^2$ gilt. Diese Abschätzung ist von zentraler Bedeutung für die Diskussion von Sinus und Cosinus.

(a) Entwickeln Sie dazu die Funktion $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ in eine Taylorreihe nach x um $x_0 = 0$ und brechen Sie die Entwicklung nach dem quadratischen Term ab.
$f(x) = \sqrt{1-x^2}, \quad \mathbf{D} = [-1, 1] \subset \mathbf{R}$
Die Taylorreihe $f_{\mathrm{Taylor}}(x)$ bis zum quadratischen Term um x_0 lautet allgemein

$$f_{\mathrm{Taylor}}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2$$

Bildung der Ableitungen

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \\ f''(x) &= -\frac{\sqrt{1-x^2} - x\left(-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)}{1-x^2} = -\frac{1-x^2+x^2}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} = -(1-x^2)^{-\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

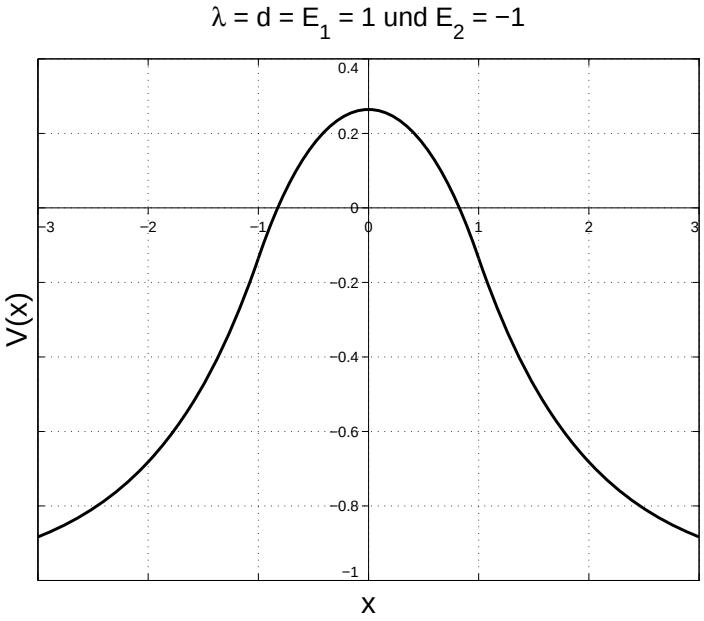


Abbildung A.29: Die Membranspannung $V(x)$ als Funktion des Ortes x

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad f(x) &= f(0) + f'(0)\cdot x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \quad \text{übrige Terme} \\
&= 1 + 0\cdot x + \frac{1}{2}(-1)x^2 + \quad \text{übrige Terme} \\
\Rightarrow \quad f(x) &\approx 1 - \frac{1}{2}x^2 = f_{\text{Taylor}}(x) \qquad \text{für } |x| \ll 1
\end{aligned}$$

(b) Führen Sie auch eine Kurvendiskussion der Funktion $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ und $g(x) = 1-\frac{1}{2}x^2$ durch, um ein besseres Verständnis für beide Funktionen und damit auch für die Grenzen der obigen Abschätzung zu erhalten. (Definitionsbereich, Verhalten an den Rändern, Nullstellen, Funktionswert an der Stelle $x = 0$, Symmetrie, Extrema, Skizze).

Diskussion	$f(x) = \sqrt{1-x^2}$	$g(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2$
Def.-Bereich	$\mathbf{D} = [-1, 1]$	$\mathbf{D} = \mathbf{R}$
Asymptotik	$f(\pm 1) = 0$	$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = -\infty$
Nullstellen	$x = -1$ oder $x = 1$	$x = -\sqrt{2}$ oder $x = \sqrt{2}$
Wert bei 0	$f(0) = 1$	$g(0) = 1$
Extrema	$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$	$g'(x) = -x = 0 \Rightarrow x = 0$
	$f''(0) = -1 < 0 \Rightarrow$ Maximum	$g''(0) = -1 < 0 \Rightarrow$ Maximum
Wendepunkte	keine, weil $f(x)$ bei 0 endet	keine, weil $g''(x) \neq 0 \; \forall \; x \in \mathbf{D}$
Symmetrie	gerade	gerade

---

11. (Taylorreihe) Berechnen Sie die ersten vier Ableitungen der Exponentialfunktion zur Basis $a \in \mathbf{R}^+$, $f(x) = a^x$, und geben Sie dann eine kompakte Formel für die n-te

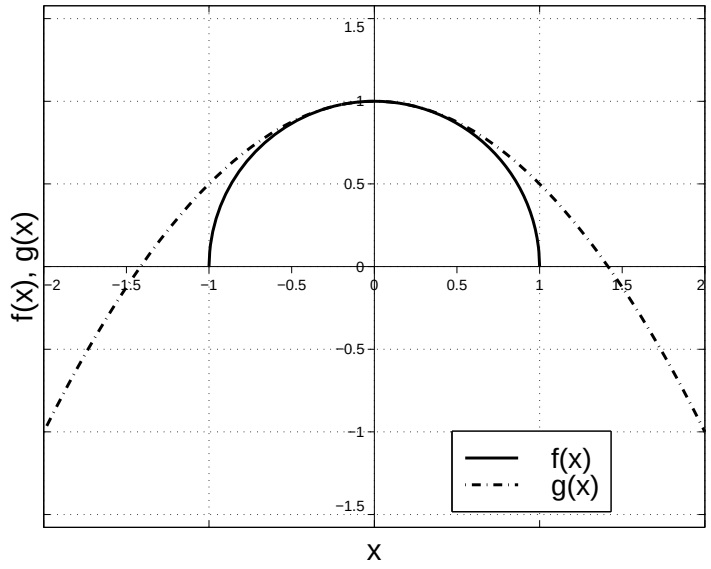


Abbildung A.30: Die Funktion $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ und ihre Näherung $g(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2$

Ableitung an. Benützen Sie dieses Ergebnis um die Taylorreihe von a^x aufzustellen! Wie hängt diese Reihe mit der Taylorreihe von e^x zusammen?

Es gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= a^x = \mathrm{e}^{\ln(a)^x} = \mathrm{e}^{x\ln(a)} \\ \Rightarrow \quad f'(x) &= \left(\mathrm{e}^{x\cdot\ln(a)}\right)\cdot\ln(a) = (\ln(a))\cdot a^x = (\ln(a))\cdot f(x) \\ \Rightarrow \quad f''(x) &= (f'(x))' = (\ln(a)f(x))' = \ln(a)\cdot f'(x) = (\ln(a))^2 f(x) \\ \Rightarrow \quad \text{allgemein} \quad f^{(k)}(x) &= (\ln(a))^k f(x) = (\ln(a))^k \cdot a^x \end{aligned}$$

Taylorreihe um x_0

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \qquad \text{(allgemein)} \\ &= a^0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\ln(a))^k a^0}{k!} x^k \qquad \text{(in diesem Fall)} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\ln(a))^k}{k!} x^k \end{aligned}$$

Hier kann man nun genau die Taylorreihe der Exponentialfunktion erkennen:

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\ln(a))^k x^k}{k!} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}(\ln(a)x)^k \\ &= \mathrm{e}^{\ln(a)\cdot x} \end{aligned}$$

12. (Kurvendiskussion) Diskutieren Sie die Funktion $g(x) = \cos(ax^2)$ mit $x \in \mathbf{R}$ und $a \in \mathbf{R}^+$.

(a) Wie lautet die erste und zweite Ableitung von g?

$$\begin{aligned} g'(x) &= -2ax \cdot \sin(ax^2) \qquad \text{(Kettenregel)} \\ g''(x) &= -2a(1 \cdot \sin(ax^2) + x \cdot 2ax \cdot \cos(ax^2)) \qquad \text{(Produkt- und Kettenregel)} \\ &= -2a(\sin(ax^2) + 2ax^2 \cos(ax^2)) \end{aligned}$$

(b) Welchen Wert haben $g(0)$, $g'(0)$ und $g''(0)$?

$$\begin{aligned} g(0) &= \cos(0) = 1 \\ g'(0) &= 0 \\ g''(0) &= -2a(\sin(0) + 2a \cdot 0 \cdot \cos(0)) = 0 \end{aligned}$$

(c) Wie lautet die Taylor-Entwicklung von g um $x_0 = 0$ bis einschließlich des in x quadratischen Terms?

Taylorreihe um $x_0 = 0$:

$$g(x) = g(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g^k(0)}{k!} x^k$$

bis zum quadratischen Term:

$$g_{\text{Taylor}} = 1 + 0 \cdot x + \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot x^2 = 1$$

(d) Wie lautet die Tangentengleichung an g im Punkt $x_0 = 0$?

Tangentengleichung allgemein: $y(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$
Hier $y(x) = 1$ ist Tangente an $g(x)$ im Punkt $(0, 1)$
(horizontale/waagerechte Gerade; parallel zur x–Achse)

(e) Ist g gerade beziehungsweise ungerade?

g ist gerade, denn $g(-x) = \cos(a(-x)^2) = \cos(ax^2) = g(x)$.

(f) Hat g Nullstellen? Wenn ja, wo liegen diese?

$$\begin{aligned} & g(x) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \cos(ax^2) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & ax^2 = \frac{\pi}{2} + n\pi \qquad n \in \mathbf{N} \end{aligned}$$

Es werden nur die positiven Nullstellen des Cosinus benötigt, weil
$ax^2 \geq 0$ für alle $a \in \mathbf{R}^+$ und $x \in \mathbf{R}$ ist.

$$\Rightarrow \quad x_{\text{NS}} = \pm\sqrt{\frac{1}{a}\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)} \qquad n \in \mathbf{N}$$

(g) Wo liegen die Maxima und Minima von g?

Wir wissen, dass der Cosinus Maxima bei $2k\pi$ und Minima bei $(2k-1)\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ hat.

$\Rightarrow$ $g(x)$ hat Maxima bei $x_{\max} = \pm\sqrt{\frac{2n\pi}{a}}$, $n \in \mathbf{N}_0$

und Minima bei $x_{\min} = \pm\sqrt{\frac{(2n-1)\pi}{a}}$, $n \in \mathbf{N}$

Die Funktionswerte sind $g(x_{\max}) = 1$ und $g(x_{\min}) = -1$

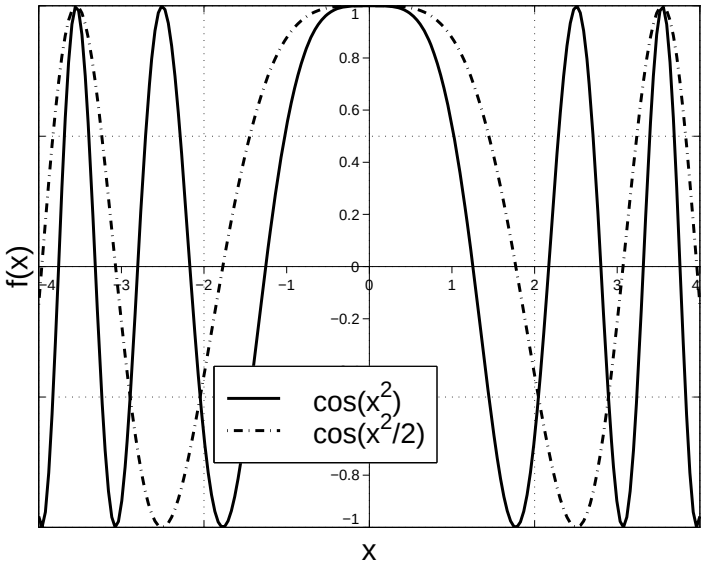


Abbildung A.31: Graph der Funktion $g(x) = \cos(ax^2)$ für $a = 1$ und $a = 1/2$

A.10 Aufgaben zu Kapitel 10

1. (Trigonometrische Funktionen)

(a) Leiten Sie die Funktionswerte von Sinus, Cosinus, Tangens und Cotangens für $x = \pi/6$, $\pi/4$ und $\pi/3$ her. Betrachten Sie dazu rechtwinklige Dreiecke mit den entsprechenden Winkeln und der Hypothenusenlänge Eins. Wenden Sie den Satz von Phytagoras an, um die Länge der Katheten zu berechnen. Hinweis: in welchem Verhältnis stehen die Seiten eines Dreiecks, in dem alle Winkel gleich 60° sind?

Lösung:

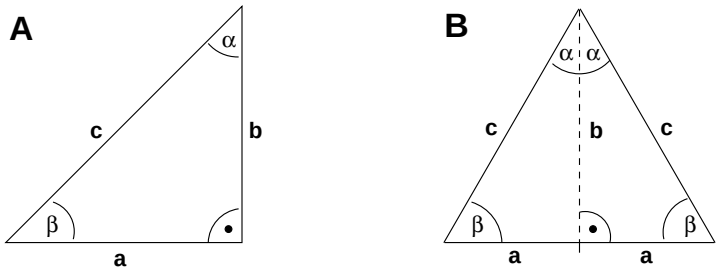


Abbildung A.32: (A) Gleichschenkliges Dreieck mit $\alpha = \beta = \pi/4$ entsprechend $a = b$. (B) Gleichseitiges Dreieck ($\beta = 2\alpha = \pi/3$) mit Seitenlänge $c = 1$. Die Höhe (gestrichelt) teilt die Basis in der Mitte, d.h. $a = c/2$.

Nach Pythagoras ist $a^2 + b^2 = c^2$ (1)
Winkelsumme im ebenen Dreieck: $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, hier: $\gamma = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ (2)
Für $c = 1$ ist $\sin(\alpha) = \cos(\beta) = a, \quad \sin(\beta) = \cos(\alpha) = b$ (3)
Außerdem ist $\tan(\alpha) = \frac{1}{\cot(\alpha)} = \frac{a}{b}$ und $\tan(\beta) = \frac{1}{\cot(\beta)} = \frac{b}{a}$ (4)

1. Fall (vgl. Abb. A.32 A): Sei

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{\pi}{4} \Rightarrow \quad \beta = \frac{\pi}{4} && \text{nach (2)} \\
\Rightarrow \quad a &= b && \text{da } \alpha = \beta \\
\Rightarrow \quad 2a^2 &= 1 && \text{mit (1) und } c = 1 \\
\Rightarrow \quad a &= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} && \text{(nur die positive Wurzel wird benötigt)} \\
\Rightarrow \quad \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} && \text{nach (3)} \\
\Rightarrow \quad \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \cot\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 && \text{nach (4)}
\end{aligned}$$

2. Fall (vgl. Abb. A.32 B): Sei

$$\beta = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \quad \alpha = \frac{\pi}{6} \qquad \text{nach (2)}$$

Wie aus der Skizze ersichtlich ist $a = c/2$, d.h. für $c = 1$ ist $a = 1/2$ und daher

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

Außerdem ist wegen (1)

$$\begin{aligned}
b^2 + \frac{1}{4} &= 1 \\
\Rightarrow \quad b &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\
\Rightarrow \quad \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} && \text{nach (3)} \\
\Rightarrow \quad \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{\cot\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)} &= \cot\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} && \text{siehe (4)}
\end{aligned}$$

(b) Fertigen Sie eine Skizze der Graphen der Funktionen Sinus, Cosinus, Tangens und Cotangens an und tragen Sie die Ergebnisse aus Aufgabenteil (a) ein!

---

2. (Additionstheoreme) Die Additionstheoreme für Sinus und Cosinus lauten

$$\begin{aligned}
\sin(x+y) &= \cos(x)\sin(y) + \sin(x)\cos(y) \\
\cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)
\end{aligned}$$

(a) Überprüfen Sie beispielhaft die Richtigkeit der Additionstheoreme, indem Sie dazu $\sin(\pi/2)$ und $\cos(\pi/2)$ berechnen und dabei einmal $\pi/2 = \pi/4 + \pi/4$ und einmal $\pi/2 = \pi/6 + \pi/3$ setzen. Verwenden Sie die bekannten Werte der Winkelfunktionen aus der vorherigen Aufgabe.

$$\begin{aligned}
\sin(x+y) &= \cos(x)\sin(y) + \sin(x)\cos(y) && (1) \\
\cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) && (2)
\end{aligned}$$

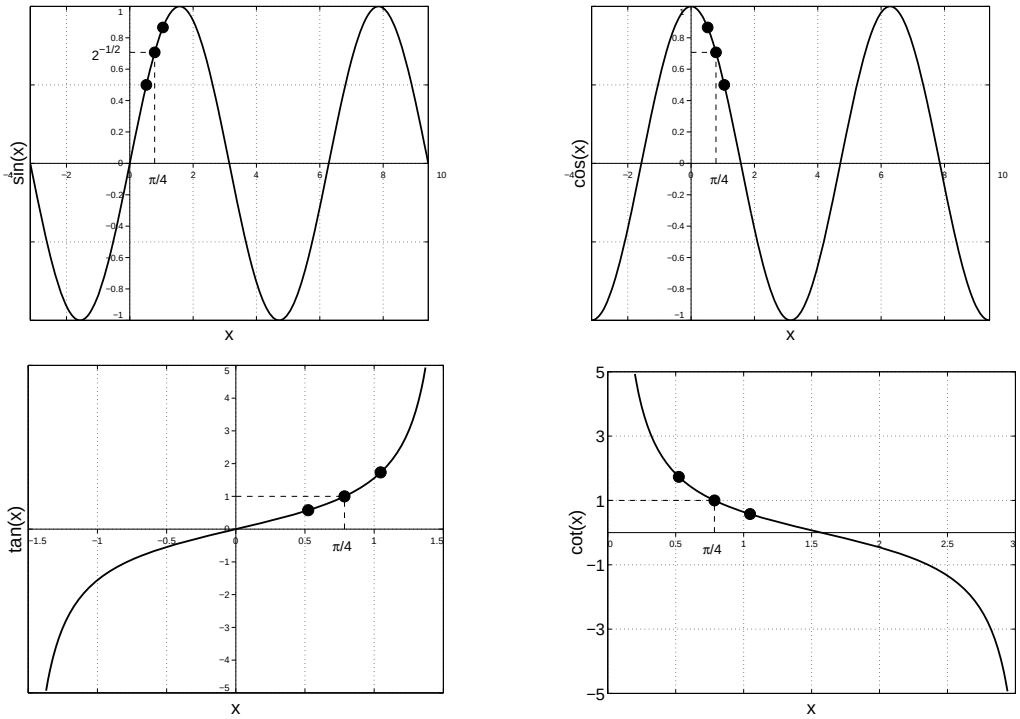


Abbildung A.33: Oben links: Graph der Funktion $\sin(x)$; oben rechts: $\cos(x)$; unten links: $\tan(x)$; unten rechts: $\cot(x)$

Für $\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}$

$$\begin{aligned}
\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} \\
&= \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \\
&= 1
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \\
&= 0
\end{aligned}$$

für $\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} \\
&= \frac{2}{4} + \frac{2}{4} \\
&= 1
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\\ &= 0\end{aligned}$$

(b) Leiten Sie die beiden Additionstheoreme jeweils einmal nach x und einmal nach y ab. Was fällt Ihnen auf? Warum sind die Ableitungen nach x und nach y identisch?

Ableitung der linken Seite von (1) nach x

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin(x+y) = \cos(x+y)$$

Ableitung der rechten Seite von (1) nach x

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cos(x)\sin(y)+\sin(x)\cos(y)) = -\sin(x)\sin(y)+\cos(x)\cos(y)$$

Zusammen ergibt sich Gleichung (2).

Ableitung der linken Seite von (1) nach y

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\sin(x+y) = \cos(x+y)$$

Ableitung der rechten Seite von (1) nach y

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}(\cos(x)\sin(y)+\sin(x)\cos(y)) = -\sin(x)\sin(y)+\cos(x)\cos(y)$$

ergibt erneut Gleichung (2).
Die Ableitungen nach x und y sind identisch auf Grund der Symmetrie von x und y in Gleichung (1) – bei Vertauschung von x und y ändert sich nichts.

Ableitung der linken Seite von (2) nach x

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos(x+y) = -\sin(x+y)$$

Ableitung der rechten Seite von (2) nach x

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cos(x)\cos(y)-\sin(x)\sin(y)) = -\sin(x)\cos(y)-\cos(x)\sin(y)$$

Zusammen ergibt sich diesmal Gleichung (1).
Bei Ableitung nach y ergibt sich das gleiche Resultat, weil Gleichung (2) wie Gleichung (1) symmetrisch in x und y ist.

---

3. (Tangens und Cotangens) Der Tangens und der Cotangens sind wie folgt definiert:

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \quad \text{und} \quad \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

(a) Wo haben die beiden Funktionen ihre Nullstellen?

Nullstellen: $\tan(x) = 0 \Leftrightarrow \sin(x) = 0$, weil $|\cos(x)| \leq 1$ für alle $x \in \mathbf{R}$ und weil $\cos(x) \neq 0$, falls $\sin(x) = 0 \Rightarrow x = n\pi,\ n \in \mathbf{Z}$

$\cot(x) = 0 \Leftrightarrow \cos(x) = 0$ vgl. oben $\Rightarrow\ x = \frac{\pi}{2} + n\pi,\ n \in \mathbf{Z}$

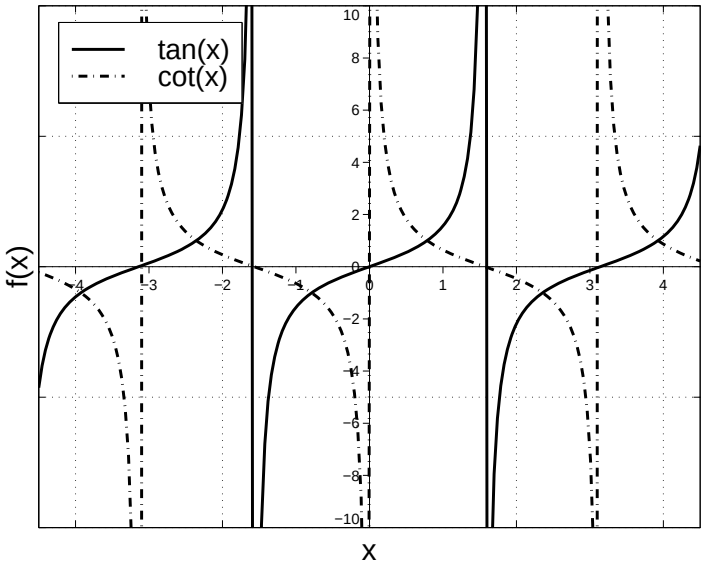


Abbildung A.34: Graph der Funktionen $\tan(x)$ und $\cot(x)$

(b) Wie verhält sich der Tangens bzw. der Cotangens an den Stellen, wo $\cos(x) = 0$ bzw. $\sin(x) = 0$ ist?

Wenn $\cos(x) = 0$ ist, divergiert der Tangens gegen $\pm\infty$, wobei sich das Vorzeichen aus dem Sinus ergibt, und $\cot(x) = 0$. Wenn $\sin(x) = 0$ ist, ergibt sich umgekehrt $\tan(x) = 0$ und $\cot(x) \to \pm\infty$, wobei sich das Vorzeichen aus dem Cosinus ergibt.

(c) Berechnen Sie die erste Ableitung von Tangens und Cotangens durch Anwendung der Quotientenregel. Welchen Wert haben die Ableitungen an den Nullstellen von Tangens und Cotangens?

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan(x) &= \frac{\cos(x)\cos(x) - \sin(x)(-\sin(x))}{[\cos(x)]^2} \\ &= \frac{1}{\cos^2(x)}\,,\end{aligned}$$

weil nach Pythagoras $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cot(x) &= \frac{-\sin(x)\sin(x) - \cos(x)\cos(x)}{[\sin(x)]^2} \\ &= -\frac{1}{\sin^2(x)}\end{aligned}$$

$\tan(x) = 0 \Leftrightarrow x = n\pi\ n \in \mathbf{N}\ \Rightarrow \tan'(n\pi) = \frac{1}{\cos^2(n\pi)} = 1,\ n \in \mathbf{N}$

$\cot(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + n\pi,\ n \in \mathbf{N}\ \Rightarrow\ \cot'(\frac{\pi}{2} + n\pi) = -\frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)} = -1,\ n \in \mathbf{N}$

(d) Skizzieren Sie die Graphen von Tangens und Cotangens. (siehe Abbildung A.34)

---

4. (Anwendung aus der Populationsökologie) In Oberbergen (Kaiserstuhl) wurde das Wanderverhalten der Zebraschnecke (*Zebrina detrita*) untersucht. Die Vermutung war,

dass sich die Schnecken in den Böschungen zwischen den Weinbergen hauptsächlich hangaufwärts bewegen, um Abdriftverluste, die durch starke Regenfälle oder Erosion entstehen, auszugleichen. Es mußte also die mittlere Ausbreitungsrichtungsrichtung der Schnecken festgestellt werden. Dazu wurden am ersten Tag etwa 100 Schnecken, die innerhalb eines Quadratmeters gefunden wurden, individuell markiert und ihre Position vermerkt. Die Position setzt sich aus einem x-Wert, der die Lage parallel zur Böschung festlegt, und einem y-Wert, der die Lage senkrecht zur Böschung festlegt, zusammen. Jede Schnecke hat also am ersten Tag ein Koordinatenpaar (x_1, y_1) zugeordnet bekommen. In den darauffolgenden drei Tagen wurden die Schnecken gesucht und ihre neue Position bestimmt: (x_2, y_2) am zweiten, (x_3, y_3) am dritten und (x_4, y_4) am vierten Tag.

(a) Wir betrachten eine einzelne Schnecke. Wie weit ist sie vom 1. auf den 2. Tag gekrochen? Betrachten Sie dazu das rechtwinklige Dreieck in der Abbildung. Wie lang sind die Katheten a und b, ausgedrückt in den Koordinaten der Schnecke am ersten und am zweiten Tag, (x_1, y_1) und (x_2, y_2)? Berechnen Sie damit die Distanz c!

$a = x_1 - x_2,\ b = y_1 - y_2 \ \Rightarrow\ c = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

(b) In welche Richtung ist Sie gekrochen? Berechnen Sie den Winkel α (siehe Abbildung), wiederum in Abhängigkeit der beiden Koordinatenpaare.

$$\begin{aligned} \sin\alpha &= \frac{b}{c} \\ \Rightarrow \quad \alpha &= \arcsin\left(\frac{b}{c}\right) = \arcsin\left(\frac{y_2 - y_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}\right) \end{aligned}$$

(c) In welche Richtung und wie weit ist die Schnecke vom 2. auf den 3., vom 3. auf den 4. und vom 1. auf den 4. Tag gekrochen?

Sei c_{32} die Strecke, die die Schnecke vom 2. auf den 3. Tag zurücklegt, dann ist

$$\begin{aligned} c_{32} &= \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2} \qquad \text{und allgemein} \\ c_{(i+1)i} &= \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2} \end{aligned}$$

von Tag i auf Tag $i + 1$ und die Richtung ergibt sich entsprechend aus

$$\alpha_{(i+1)i} = \arcsin\left(\frac{y_{i+1} - y_i}{\sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}}\right)$$

Insgesamt jedoch hat sich die Schnecke vom Ausgangspunkt nur um

$$c_{41} = \sqrt{(x_4 - x_1)^2 + (y_4 - y_1)^2}$$

in Richtung

$$\alpha_{41} = \arcsin\left(\frac{y_4 - y_1}{\sqrt{(x_4 - x_1)^2 + (y_4 - y_1)^2}}\right)$$

entfernt.

---

5. (Ableitung der Umkehrfunktion, Trigonometrische Funktionen) Berechnen Sie die ersten Ableitungen von Arcussinus und Arcustangens durch Anwendung der Regel zur Differentiation von Umkehrfunktionen. Berücksichtigen Sie auch die Beziehung $\sin^2(x) +$

$\cos^2(x) = 1$, so dass in Ihren Ergebnissen keine trigonometrische Funktionen mehr vorkommen!

$$\begin{aligned} f(x) &= \arcsin(x) \\ \Rightarrow \quad f^{-1}(x) &= \sin(x) \\ \Rightarrow \quad \left(f^{-1}(x)\right)' &= \cos(x) \\ \Rightarrow \quad f'(x) &= \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} \qquad \text{vgl. (9.17) im Skript} \end{aligned}$$

Aus $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ folgt $\cos(x) = \sqrt{1 - \sin^2(x)}$ und damit

$$\begin{aligned} \arcsin'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(x))}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad \text{für } x \in (-1, 1) \end{aligned}$$

Nun zu $g(x) = \arctan(x)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad f^{-1}(x) &= \tan(x) \\ \Rightarrow \quad \left(f^{-1}(x)\right)' &= \frac{1}{\cos^2(x)} \qquad \text{vgl. Aufg. 3} \\ \Rightarrow \quad g'(x) &= \cos^2(\arctan(x)) \end{aligned}$$

Es gilt auch

$$\begin{aligned} \cos^2(x) + \sin^2(x) &= 1 \\ \Leftrightarrow \quad 1 + \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)^2 &= \frac{1}{\cos^2(x)} \\ \Leftrightarrow \quad 1 + \tan^2(x) &= \frac{1}{\cos^2(x)} \\ \Rightarrow \quad \cos^2(x) &= \frac{1}{1 + \tan^2(x)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \arctan'(x) = \frac{1}{[1 + \tan(\arctan(x))]^2} = \frac{1}{1 + x^2}$$

---

6. (Kurvendiskussion) Diskutieren Sie das Verhalten der Funktion Arcustangens und der Funktion "Tangens Hyperbolicus", $\tanh(x) := \sinh(x)/\cosh(x)$. Vergleichen Sie anschließend das Verhalten dieser beiden Funktionen.

Anmerkung: Der Tangens Hyperbolicus tritt bei vielen Betrachtungen zur Kinetik chemischer Reaktionen auf und wird auch gerne als phänomenologische Beschreibung monotoner Abhängigkeiten mit Sättigung (zum Beispiel: Aktivität eines Neurons als Funktion der Stimulierung) verwendet. Beide Funktionen gehören damit zum Basisrepertoire der mathematischen Biologie.

$f(x) = \arctan(x)$	$g(x) = \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$
$\mathbf{D} = \mathbf{R}$	$\mathbf{D} = \mathbf{R}$
$\mathbf{W} = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \subset \mathbf{R}$	$\mathbf{W} = (-1, 1) \subset \mathbf{R}$
$\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$	$\lim_{x\to\infty} g(x) = 1$
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2}$	$\lim_{x\to-\infty} g(x) = -1$
$f(0) = 0$, einzige Nullstelle	$g(0) = 0$, einzige Nullstelle
$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad > 0 \; \forall \; x \in \mathbf{D}$	$g'(x) = \frac{\cosh^2(x)-\sinh^2(x)}{\cosh^2(x)}$
	$= \frac{1}{\cosh^2(x)} \quad > 0 \; \forall \; x \in \mathbf{D}$
keine lokalen Extrema	keine lokalen Extrema
$f''(x) = -2x(1+x^2)^{-2}$	$g''(x) = \frac{-2\sinh(x)}{\cosh^2(x)}$
Wendepunkt bei $(0, 0)$	Wendepunkt bei $(0, 0)$
punktsymmetrisch	punktsymmetrisch

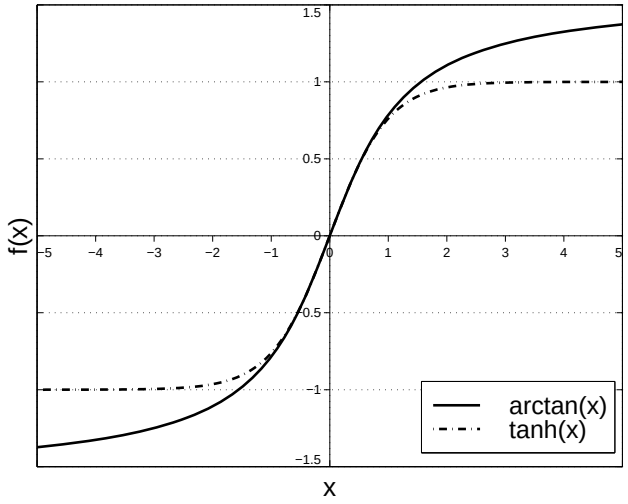


Abbildung A.35: Graph der Funktionen $\arctan(x)$ und $\tanh(x)$

A.11 Aufgaben zu Kapitel 11

1. (Komplexe Zahlen: Addition) Berechnen Sie jeweils die Summe und Differenz der komplexen Zahlen z_1 und z_2. Tragen Sie anschließend jeweils beide Zahlen und das Ergebnis in die Gaußsche Zahlenebene ein. Berechnen Sie außerdem Betrag und Argument des Ergebnisses und die zu Ihrem Ergebnis konjugiert komplexe Zahl. Sie können alles auch durch Messen in der Zeichnung überprüfen!

(a) $z_1 = 1 + 3\mathrm{i}$, $z_2 = 2 + \mathrm{i}$

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= 1 + 3\mathrm{i} + 2 + \mathrm{i} \\ &= 3 + 4\mathrm{i} \\ \Rightarrow \quad |z_1 + z_2| &= \sqrt{3^2 + 4^2} \\ &= 5 \\ \Rightarrow \quad \arg(z_1 + z_2) &= \arccos\left(\frac{3}{5}\right) = \arctan\left(\frac{4}{3}\right) \\ &= 53.13^\circ \\ \overline{z_1 + z_2} &= 3 - 4\mathrm{i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_1 - z_2 &= 1 + 3\mathrm{i} - (2 + \mathrm{i}) \\ &= -1 + 2\mathrm{i} \\ \Rightarrow \quad |z_1 - z_2| &= \sqrt{(-1)^2 + 2^2} \\ &= \sqrt{5} \\ \Rightarrow \quad \arg(z_1 - z_2) &= \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \pi + \arctan\left(\frac{2}{-1}\right) \\ &= 116.6^\circ \\ \overline{z_1 - z_2} &= -1 - 2\mathrm{i} \end{aligned}$$

(b) $z_1 = \mathrm{i}$, $z_2 = -2$

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= -2 + \mathrm{i} \\ \Rightarrow \quad |z_1 + z_2| &= \sqrt{(-1)^2 + 2^2} \\ &= \sqrt{5} \\ \Rightarrow \quad \arg(z_1 + z_2) &= \arccos\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \pi + \arctan\left(\frac{1}{-2}\right) \\ &= 153.4^\circ \\ \overline{z_1 + z_2} &= -2 - \mathrm{i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_1 - z_2 &= 2 + \mathrm{i} \\ \Rightarrow \quad |z_1 - z_2| &= \sqrt{2^2 + 1^2} \\ &= \sqrt{5} \\ \Rightarrow \quad \arg(z_1 - z_2) &= \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= 26.6^\circ \\ \overline{z_1 - z_2} &= 2 - \mathrm{i} \end{aligned}$$

---

2. (Komplexe Zahlen: Multiplikation) Berechnen Sie das Produkt von $-\mathrm{i}$ mit

(a) i

$$\begin{aligned} \mathrm{i} \cdot (-\mathrm{i}) &= (-1) \cdot \mathrm{i}^2 \\ &= (-1) \cdot (-1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

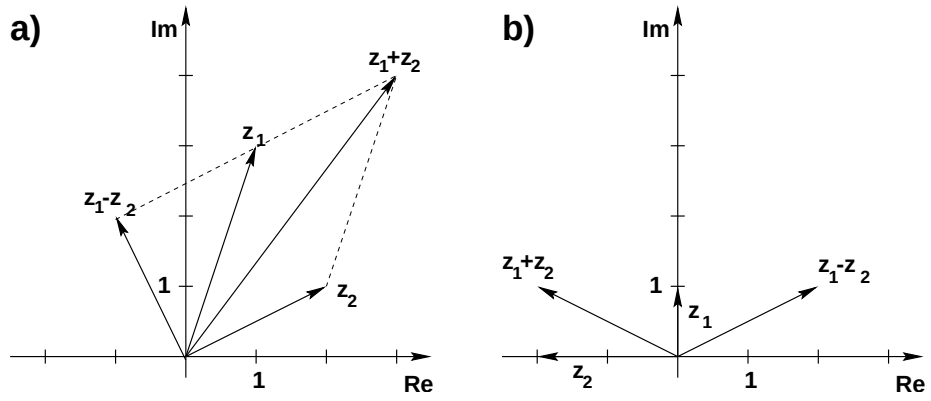


Abbildung A.36: Links: zu Aufgabe 1a; rechts: zu Aufgabe 1b

(b) $(-\mathrm{i})$

$$\begin{aligned}(-\mathrm{i})\cdot(-\mathrm{i}) &= (-1)^2\cdot \mathrm{i}^2\\ &= 1\cdot(-1)\\ &= -1\end{aligned}$$

(c) (-3)

$$\begin{aligned}(-3)\cdot(-\mathrm{i}) &= (-1)^2\cdot 3\cdot \mathrm{i}\\ &= 3\mathrm{i}\end{aligned}$$

(d) $(2\mathrm{i}+1)$

$$\begin{aligned}(2\mathrm{i}+1)\cdot(-\mathrm{i}) &= 2\mathrm{i}\cdot(-\mathrm{i})+1\cdot(-\mathrm{i})\\ &= 2-\mathrm{i} \qquad \text{vgl. (a)}\end{aligned}$$

in cartesischen Koordinaten. Führen Sie in (a) und (c) die Rechnung auch in Polarkoordinaten durch.

In Polarkoordinaten ist $r(-\mathrm{i}) = |-\mathrm{i}| = 1$ und $\arg(-\mathrm{i}) = -\frac{\pi}{2}$ oder $\frac{3\pi}{2}$
sowie $r(\mathrm{i}) = |\mathrm{i}| = 1$ und $\arg(\mathrm{i}) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \mathrm{r}(\mathrm{i}\cdot(-\mathrm{i})) = \mathrm{r}(\mathrm{i})\cdot\mathrm{r}(-\mathrm{i}) = 1$ und $\arg(\mathrm{i}\cdot(-\mathrm{i})) = \arg(\mathrm{i}) + \arg(-\mathrm{i}) = 0$, zusammen also 1.

Wegen $r(-3) = |-3| = 3$ und $\arg(-3) = \pi \Rightarrow \mathrm{r}((-3)\cdot(-\mathrm{i})) = 3$
und $\arg((-3)\cdot(-\mathrm{i})) = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$, zusammen also $3\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$

---

3. (Komplexe Zahlen: Potenzen) Berechnen Sie mit Hilfe der Moivreschen Formel folgende Potenzen der komplexen Zahl z. Dazu müssen Sie zuerst den Betrag und das Argument von z bestimmen. Tragen Sie jeweils z und die berechnete Potenz von z in die Gaußsche Zahlenebene ein.

Formel von Moivre:

$$z^n = r^n(\cos(n\phi) + \mathrm{i}\sin(n\phi)) \text{ für } z = r(\cos(\phi) + \mathrm{i}\sin(\phi)) = x + \mathrm{i}y$$

(a) z^2 , für $z = 1 + \mathrm{i}$

$$\begin{aligned} z &= 1+\mathrm{i} \\ \Rightarrow \quad r(z) &= \sqrt{1^2+1^2} \\ &= \sqrt{2} \\ \Rightarrow \quad \arg(z) &= \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ &= \frac{\pi}{4} \\ \Rightarrow \quad z^2 &= \sqrt{2}^2\left(\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\right)\right) \\ &= 2(0+\mathrm{i}\cdot 1) \\ &= 2\,\mathrm{i} \end{aligned}$$

(b) z^3 , für $z = 2\mathrm{i}$

$$\begin{aligned} z &= 2\mathrm{i} \\ \Rightarrow \quad r(z) &= 2 \\ \Rightarrow \quad \arg(\mathrm{z}) &= \arccos\left(\frac{0}{2}\right) = \arcsin\left(\frac{2}{2}\right) \\ &= \frac{\pi}{2} \\ \Rightarrow \quad z^3 &= 2^3\left(\cos\left(3\cdot\frac{\pi}{2}\right)+\mathrm{i}\sin\left(3\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right) \\ &= 8(0+\mathrm{i}\cdot(-1)) \\ &= -8\,\mathrm{i} \end{aligned}$$

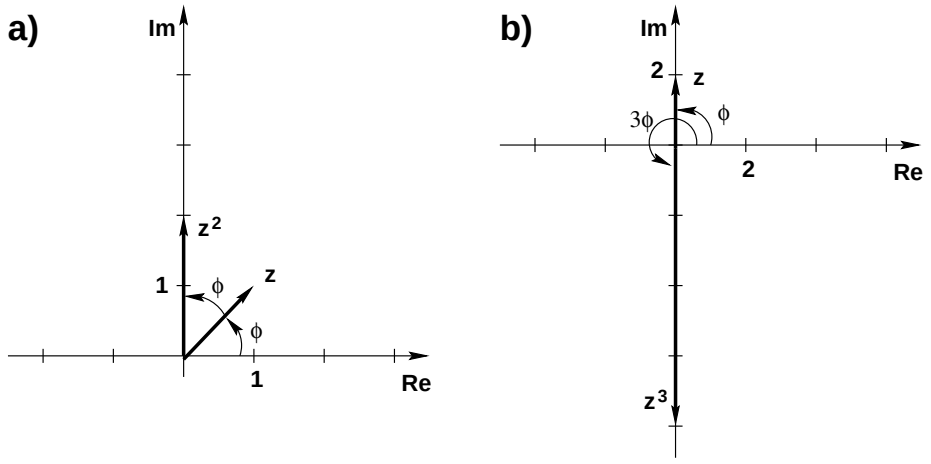


Abbildung A.37: Links: zu Aufgabe 3a; rechts: zu Aufgabe 3b

---

4. (Komplexe Zahlen, trigonometrische Funktionen) Wir wollen mit Hilfe der Moivreschen Formel zeigen, dass gilt: $\sin(3\phi) = 3\cos^2(\phi)\sin(\phi) - \sin^3(\phi)$. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(a) Berechnen Sie z^3 mit der Formel von Moivre für $z = \cos(\phi) + \mathrm{i}\sin(\phi)$.

Für

$$\begin{aligned} z &= \cos(\phi) + \mathrm{i}\sin(\phi) \\ &= 1 \cdot (\cos(\phi) + \mathrm{i}\sin(\phi)) \end{aligned}$$

ist

$$\begin{aligned} z^3 &= 1^3(\cos(3\phi) + \mathrm{i}\sin(3\phi)) \\ &= \underbrace{\cos(3\phi)}_{\text{Realteil}} + \mathrm{i} \quad \underbrace{\sin(3\phi)}_{\text{Imaginärteil}} \end{aligned}$$

(b) Berechnen Sie mit dem binomischen Satz $z^3 = [\cos(\phi) + \mathrm{i}\sin(\phi)]^3$ und trennen Sie das Ergebnis in Real- und Imaginärteil.

$$\begin{aligned} (\cos(\phi) &+ \mathrm{i}\sin(\phi))^3 \\ &= \cos^3(\phi) + 3\mathrm{i}\cos^2(\phi)\sin(\phi) + 3 \cdot (\mathrm{i})^2 \cdot \cos(\phi)\sin^2(\phi) + (\mathrm{i})^3\sin^3(\phi) \\ &= \underbrace{\cos^3(\phi) - 3\cos(\phi)\sin^2(\phi)}_{\text{Realteil}} + \mathrm{i}\ \underbrace{(3\cos^2(\phi)\sin(\phi) - \sin^3(\phi))}_{\text{Imaginärteil}} \end{aligned}$$

(c) Vergleichen Sie nun jeweils Real- und Imaginärteil aus den Ergebnissen von (a) und (b). Welche Gleichung für $\sin(3\phi)$ erhalten Sie?

Realteil: $\cos(3\phi) = \cos^3(\phi) - 3\cos(\phi)\sin^2(\phi)$
Imaginärteil: $\sin(3\phi) = 3\cos^2(\phi)\sin(\phi) - \sin^3(\phi)$ q.e.d.

(d) Testen Sie Ihr Resultat für $\phi = 0$, $\phi = \pi/4$, $\phi = \pi/3$ und $\phi = \pi/2$.

$\phi = 0$

$$\begin{aligned} \sin(3\phi) &= \sin(0) = 0 \\ 3\cos^2(0)\sin(0) - \sin^3(0) &= 0 \end{aligned}$$

$\phi = \frac{\pi}{4}$

$$\begin{aligned} \sin\left(3 \cdot \frac{\pi}{4}\right) &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 3\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin^3\left(\frac{\pi}{4}\right) &= 3 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 \\ &= 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

$\phi = \frac{\pi}{3}$

$$\begin{aligned} \sin\left(3 \cdot \frac{\pi}{3}\right) &= \sin(\pi) \\ &= 0 \\ 3\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin^3\left(\frac{\pi}{3}\right) &= 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{8} - \frac{3\sqrt{3}}{8} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\phi = \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned} \sin\left(3 \cdot \frac{\pi}{2}\right) &= -1 \\ 3\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin^3\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 3 \cdot 0 \cdot 1 - 1^3 \\ &= -1 \end{aligned}$$

---

5. (Imaginäre Exponentialfunktion) Sie kennen bereits die Taylorreihe der Exponentialfunktion

$$\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

(a) Geben Sie die Taylorreihe von $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$ an, indem Sie in die Taylorreihe der Exponentialfunktion $\mathrm{i}\phi$ statt x einsetzen.

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}\phi)^k}{k!}$$

(b) Schreiben Sie die ersten sechs Glieder dieser Reihe aus, verwenden Sie dabei $\mathrm{i}^2 = -1$ und trennen Sie nach Real- und Imaginärteil.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{5} \frac{(\mathrm{i}\phi)^k}{k!} &= 1 + \mathrm{i}\phi + \frac{1}{2}(\mathrm{i}\phi)^2 + \frac{1}{6}(\mathrm{i}\phi)^3 + \frac{1}{24}(\mathrm{i}\phi)^4 + \frac{1}{120}(\mathrm{i}\phi)^5 \\ &= 1 + \mathrm{i}\phi - \frac{1}{2}\phi^2 - \mathrm{i}\frac{1}{6}\phi^3 + \frac{1}{24}\phi^4 + \mathrm{i}\frac{1}{120}\phi^5 \\ &= \underbrace{\left(1 - \frac{1}{2}\phi^2 + \frac{1}{24}\phi^4\right)}_{\text{Realteil}} + \mathrm{i}\ \underbrace{\left(\phi - \frac{1}{6}\phi^3 + \frac{1}{120}\phi^5\right)}_{\text{Imaginärteil}} \end{aligned}$$

(c) Sie kennen auch schon die Taylorreihen von $\sin(\phi)$ und $\cos(\phi)$

$$\sin(\phi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\phi^{2k+1} \qquad \text{und} \qquad \cos(\phi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\phi^{2k}$$

Erkennen Sie diese im Real- und Imaginärteil aus Teilaufgabe (b) wieder? Ist also die Beziehung

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} = \cos(\phi) + \mathrm{i}\sin(\phi)$$

richtig?

Der Realteil entspricht den ersten drei Termen der Cosinusreihe, der Imaginärteil stellt die ersten drei Terme der Sinusreihe dar.

(d) Die Polarkoordinatendarstellung einer beliebigen komplexen Zahl z lautet

$$z = r[\cos(\phi) + \mathrm{i}\sin(\phi)]$$

Ersetzen Sie darin $\cos(\phi) + \mathrm{i}\sin(\phi)$ durch das Ergebnis aus (c).

$$\begin{aligned} z &= r(\cos(\phi) + \mathrm{i}\sin(\phi)) \\ &= r \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} \end{aligned}$$

(e) Berechnen Sie Betrag und Argument der komplexen Zahl $z = 1+\mathrm{i}$. Stellen Sie z in der im Aufgabenteil (d) gefundenen kompakten Form der Polarkoordinatendarstellung dar.

$$\begin{aligned} & z &=& 1+\mathrm{i} \\ \Rightarrow \quad & r(z) &=& \sqrt{2},\ \arg(z) = \frac{\pi}{4} \\ & z &=& r(z)\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg(z)} = \sqrt{2}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} \end{aligned}$$

---

6. (Komplexe Zahlen: Division) Berechnen Sie Real- und Imaginärteil des Quotienten $q = z_1/z_2$ für folgende Zahlen z_1 und z_2. Erweitern Sie dazu den Bruch mit der komplex konjugierten Zahl $\bar{z}_2$ des Nenners z_2 und wenden Sie die dritte binomische Formel an, um den Nenner reell zu machen.

(a) $z_1 = 1-\mathrm{i},\ z_2 = 1+\mathrm{i}$

$$\begin{aligned} q &= \frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = \frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\cdot\frac{1-\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} \\ &= \frac{1-2\mathrm{i}-1}{2} = -\mathrm{i} \end{aligned}$$

d.h. $\mathrm{Re}(q) = 0$ und $\mathrm{Im}(q) = -1$

(b) $z_1 = 3\mathrm{i}-2,\ z_2 = 2-4\mathrm{i}$

$$\begin{aligned} q &= \frac{-2+3\mathrm{i}}{2+(-4)\mathrm{i}} = \frac{-4+6\mathrm{i}-8\mathrm{i}+(-12)}{4+16} \\ &= -\frac{16}{20} + \mathrm{i}\left(-\frac{2}{20}\right) \end{aligned}$$

$\rightarrow \quad \mathrm{Re}(q) = -\frac{4}{5},\ \mathrm{Im}(q) = -\frac{1}{10}$

(c) $z_1 = a+\mathrm{i}b,\ z_2 = c+\mathrm{i}d$

$$\begin{aligned} q &= \frac{a+\mathrm{i}b}{c+\mathrm{i}d}\cdot\frac{c-\mathrm{i}d}{c-\mathrm{i}d} \\ &= \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \mathrm{i}\frac{cb-ad}{c^2+d^2} \end{aligned}$$

also $\mathrm{Re}(q) = \frac{ac+bd}{c^2+d^2}$ und $\mathrm{Im}(q) = \frac{cb-ad}{c^2+d^2}$

---

7. (Moivresche Formel) In Aufgabe 5 wurde gezeigt, dass eine komplexe Zahl z auch in folgender kompakter Form (Polarkoordinatendarstellung) dargestellt werden kann:

$$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \quad , \quad r = |z| \quad \text{und} \quad \varphi = \arg(z)$$

(a) Berechnen Sie z^3 für $z = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6}$ und geben Sie das Ergebnis in der arithmetischen Darstellung ($z = x+\mathrm{i}y$) an. Verwenden Sie dabei

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = \cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi)$$

und die Tabelle im Skript Seite 138 der Werte von Sinus und Cosinus für spezielle Argumente.

Allgemein ist

$$z^n = [r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}]^n = r^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\phi} \qquad \text{Rechenregeln für Potenzen}$$

$$\begin{aligned} z &= 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} \\ \Rightarrow \quad z^3 &= 2^3 \mathrm{e}^{\mathrm{i}3\frac{\pi}{6}} \\ &= 8 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi 2} \\ &= 8\big(\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0} + \mathrm{i}\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=1}\big) \\ &= 8\,\mathrm{i} \end{aligned}$$

d.h. $z^3 = 0 + 8\mathrm{i}$ oder $\mathrm{Re}(z^3)$=0 und $\mathrm{Im}(z^3)$=8 .

(b) Berechnen Sie allgemein z^n für $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ und geben Sie das Ergebnis wie in Teilaufgabe (a) in der arithmetischen Darstellung an. Sie erhalten so die Moivresche Formel.

$$\begin{aligned} z^n &= \left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\right)^n \\ &= r^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\phi} \\ &= r^n(\cos(n\phi) + \mathrm{i}\sin(n\phi)) \end{aligned}$$

oder $\mathrm{Re}(z^n) = r^n \cos(n\phi)$ und $\mathrm{Im}(z^n) = r^n \sin(n\phi)$

---

8. (Komplexe Zahlen: Wurzeln) Mit Hilfe der Darstellung $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ können wir sehr einfach Wurzeln von beliebigen komplexen Zahlen z berechnen. Dazu aber erst eine Vorüberlegung:

(a) Schreiben Sie die komplexe Zahl $z_0 = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$ in der arithmetischen Darstellung.

$$\begin{aligned} z_0 &= \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} \\ &= \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \\ &= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) \\ &= 1 + \mathrm{i} \end{aligned}$$

(b) Was erhalten Sie für die arithmetische Darstellung der Zahlen $z_1 = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi/4+2\pi)}$, $z_0 = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi/4+4\pi)}$ und allgemein $z_0 = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi/4+2k\pi)}$, $(k \in \mathbf{Z})$?

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{4}+2\pi\right)} \\ &= \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+2\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}+2\pi\right)\right) \\ &= 1 + \mathrm{i} \end{aligned}$$

weil cos und sin 2π-periodisch.
Allgemein:

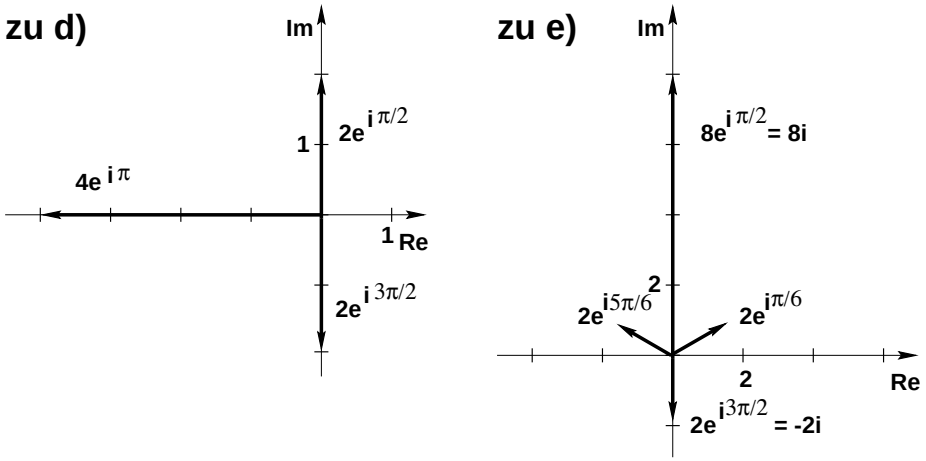


Abbildung A.38: Zu Aufgabe 8d (links) und 8e (rechts)

Addition eines ganzzahligen Vielfachen von 2π zum Argument einer komplexen Zahl ändert diese nicht.

$$\begin{aligned} z_0 &= \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)} \\ &= \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right) \\ &= 1+\mathrm{i} \qquad k\in\mathbf{N} \end{aligned}$$

(c) Zeigen Sie für beliebige Zahlen z, dass gilt

$$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi+2k\pi)}\ ,\quad k\ \in\ \mathbf{Z}$$

Jede komplexe Zahl kann also auf unendlich viele verschiedene Weisen dargestellt werden (für jedes k eine).

$$\begin{aligned} z &= r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} \\ &= r\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\phi+2k\pi)} \\ &= r(\cos(\phi+2k\pi)+\mathrm{i}\sin(\phi+2k\pi)) \qquad k\in\mathbf{Z} \\ &= r(\cos(\phi)+\mathrm{i}\sin(\phi)) \end{aligned}$$

(d) Ziehen Sie nun aus $z = 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi+2k\pi)}\ ,\quad k\ \in\ \mathbf{Z}$ die Wurzel, berechnen Sie also $z^{1/2}$. Welchen Betrag hat $z^{1/2}$? Was erhalten Sie als Argument von $z^{1/2}$ für $k = 0, 1, 2, 3, 4$? Wieviele tatsächlich verschiedene Zahlen erhalten Sie also? Zeichnen Sie diese und z in die Gaußsche Zahlenebene ein. Haben Sie gemerkt, dass Sie gerade die Wurzel aus einer negativen Zahl gezogen haben?

$$\begin{aligned} & z &&= 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi+2k\pi)} \\ \Rightarrow\quad & \sqrt{z} &&= z^{\frac{1}{2}} \\ & &&= \sqrt{4}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}(\pi+2k\pi)}{2}} \\ \Rightarrow\quad & |z| &&= 2 \text{ und } \arg(\mathrm{z}) = \frac{\pi}{2}+\mathrm{k}\pi, \quad \mathrm{k}\in\mathbf{N} \end{aligned}$$

und somit $\arg(\mathrm{z}) = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}$ für $k = 0, 1, 2, 3, 4$
Tatsächlich verschieden (weil zwischen 0 und 2π) sind die Zahlen zum Argument $\frac{\pi}{2}$ und $\frac{3\pi}{2}$.

(e) Berechnen Sie genauso wie in (d) die dritte Wurzel aus $z = 8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}$. Vergessen Sie nicht den Term $2k\pi$ im Argument von z. Wieviele verschiedene Lösungen erhalten Sie diesmal? Skizzieren Sie das Ergebnis und z in der Gaußschen Zahlenebene.

$$\begin{aligned} z &= 8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} \\ &= 8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)} \\ \Rightarrow \quad \sqrt[3]{z} &= z^{\frac{1}{3}} \\ &= \sqrt[3]{8}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}{3}} \\ &= 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}\right)} \\ \Rightarrow \quad \text{für } k &= 0,1,2,3,\ldots \text{ ist} \\ \arg\left(\sqrt[3]{z}\right) &= \frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6},\frac{9\pi}{6},\frac{13\pi}{6}\left(=2\pi+\frac{\pi}{6} \text{ entspricht } k=0\right),\ldots \end{aligned}$$

Es gibt drei verschiedene dritte Wurzeln von z

$$2\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}, 2\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}, 2\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{2}}$$

(f) Wir wollen die Gleichung $x^2 = 9$ nach x auflösen. Dazu müssen wir aus 9 die Wurzel ziehen. Gehen Sie dabei so vor wie in Teilaufgabe (d) (welchen Betrag und welches Argument hat die reelle Zahl 9 ?). Wieviele Lösungen erhalten Sie? Kommt Ihnen das bekannt vor?

$$\begin{aligned} z &= 9 \\ &= 9\mathrm{e}^{\mathrm{i}(0+2k\pi)} \\ \Rightarrow \quad x &= \sqrt{z} \\ &= z^{\frac{1}{2}} \\ &= +\sqrt{9}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}(0+2k\pi)}{2}} \\ &= 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}(0+k\pi)} \\ \Rightarrow \quad |z^{\frac{1}{2}}| &= 3 \text{ und } \arg\left(\mathrm{z}^{\frac{1}{2}}\right) = 0+\mathrm{k}\pi,\ \mathrm{k}\in\mathbf{N} \\ \Rightarrow \quad \arg\left(\mathrm{z}^{\frac{1}{2}}\right) &= 0,\pi,2\pi(\text{ entspricht } 0\ ),3\pi(\text{ entspricht } \pi\ ),\ldots \end{aligned}$$

die Lösungen sind also $x_1 = 3\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}0} = 3$ und $x_2 = 3\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -3$.

A.12 Aufgaben zu Kapitel 12

1. (Integration) Berechnen Sie folgende elementare Integrale

(a)
$$\int_1^2 x^2 \,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^2 = \frac{1}{3}\cdot 2^3 - \frac{1}{3}\cdot 1^3 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

(b)
$$\int_1^2 6x^2 \,\mathrm{d}x = \left[\frac{6}{3}x^3\right]_1^2 = 2\cdot 2^3 - 2\cdot 1^3 = 16 - 2 = 14$$

oder einfacher mit (a)
$$6\int_1^2 x^2 \,\mathrm{d}x = 6\frac{7}{3} = 14$$

(c)
$$\int_1^2 4x^3 \,\mathrm{d}x = \left[\frac{4}{4}x^4\right]_1^2 = 2^4 - 1^4 = 16 - 1 = 15$$

(d)
$$\int_1^2 6x^2 + 4x^3 \,\mathrm{d}x = \int_1^2 6x^2 \,\mathrm{d}x + \int_1^2 4x^3 \,\mathrm{d}x = 14 + 15 = 29$$

(e) Da $\mathrm{e}^{-\infty} = \lim_{a\to\infty} \mathrm{e}^{-a} = 0$, ist
$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x} \,\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_0^\infty = -\mathrm{e}^{-\infty} - \left(-\mathrm{e}^{-0}\right) = 0 + 1 = 1\,,$$

(f) Genauso ist
$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-2x} \,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}\right]_0^\infty = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2\infty} - \left(-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2\cdot 0}\right) = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

(g)
$$\begin{aligned}\int_0^\pi \sin(x) \,\mathrm{d}x &= [-\cos(x)]_0^\pi = -\cos(\pi) - (-\cos(0)) \\ &= -(-1) + 1 = 2 \qquad \text{(Integral über halbe Periode)}\end{aligned}$$

(h)
$$\begin{aligned}\int_0^{4\pi} \cos\left(x/2\right) \,\mathrm{d}x &= \left[2\sin\left(x/2\right)\right]_0^{4\pi} = 2\sin\left(2\pi\right) - 2\sin(0) \\ &= 2\cdot 0 - 2\cdot 0 = 0 \qquad \text{(Integral über ganze Periode)}\end{aligned}$$

(i)
$$\begin{aligned}\int_{\pi/2}^{\pi} \sin(2x) \,\mathrm{d}x &= \left[-\frac{1}{2}\cos(2x)\right]_{\pi/2}^{\pi} = -\frac{1}{2}\cos\left(2\pi\right) + \frac{1}{2}\cos(\pi) \\ &= -\frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}(-1) \\ &= -1 \qquad \text{(2. Hälfte der um 2 gestauchten Periode)}\end{aligned}$$

(j)

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{4}{x}\,\mathrm{d}x &= [4\ln|x|]_1^2 = 4\ln 2 - 4\ln 1 = 4\ln 2 - 0\\ &= 4\ln 2 = \ln 2^4 = \ln 16\end{aligned}$$

(k) Für $b \in \mathbf{R}$ ist

$$\int_0^b 9x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{9}{3}x^3\right]_0^b = 3\cdot b^3 - 3\cdot 0^3 = 3b^3$$

(l) Mit $\cosh(-x) = \cosh(x)$ ist

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 \sinh(x/2)\;\mathrm{d}x &= [2\cosh(x/2)]_{-1}^1 = 2\cosh\left(\frac{1}{2}\right) - 2\cosh\left(-\frac{1}{2}\right)\\ &= 2\cosh\left(\frac{1}{2}\right) - 2\cosh\left(\frac{1}{2}\right) = 0\,.\end{aligned}$$

---

2. (Partielle Integration und Substitution) Berechnen Sie mit Hilfe der partiellen Integration oder geeigneten Substitutionen folgende Integrale mit $a, b \in \mathbf{R}$ und $0 < a < b$:

(a) $\displaystyle\int_0^1 4x\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$:

Wähle $f'(x) = \mathrm{e}^{2x}$ und $g(x) = 4x$, dann ist $f(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}$ und $g'(x) = 4$

$\Rightarrow$ partielle Integration

$$\begin{aligned}\int_0^1 4x\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x &= \left[4x\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\right]_0^1 - \int_0^1 4\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = \left[2x\mathrm{e}^{2x}\right]_0^1 - \left[2\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\right]_0^1\\ &= 2\mathrm{e}^2 - 0 - \left(\mathrm{e}^2 - 1\right) = \mathrm{e}^2 + 1\end{aligned}$$

(b) $\displaystyle\int_0^1 x^2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$:

Wähle $f'(x) = \mathrm{e}^x$ und $g(x) = x^2 \;\Rightarrow\; f(x) = \mathrm{e}^x$ und $g'(x) = 2x$ und somit

$$\int_0^1 x^2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \left[x^2\mathrm{e}^x\right]_0^1 - \int_0^1 2x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$$

Nochmals partiell Integrieren mit $f'(x) = \mathrm{e}^x$ und $g(x) = 2x \;\Rightarrow\; f(x) = \mathrm{e}^x$ und $g'(x) = 2$ liefert

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x &= \left[x^2\mathrm{e}^x\right]_0^1 - \int_0^1 2x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\\ &= 1\cdot\mathrm{e}^1 - 0\cdot 1 - \left([2x\mathrm{e}^x]_0^1 - \int_0^1 2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\right)\\ &= \mathrm{e} - \left(2\mathrm{e} - [2\mathrm{e}^x]_0^1\right)\\ &= \mathrm{e} - 2\mathrm{e} + 2\mathrm{e} - 2\\ &= \mathrm{e} - 2\end{aligned}$$

(c) $\displaystyle\int_1^4 3x^2 \ln(x)\,\mathrm{d}x$

Wähle $f'(x) = 3x^2$ und $g(x) = \ln(x) \;\Rightarrow\; f(x) = x^3$ und $g'(x) = \frac{1}{x}$ und somit

$$\begin{aligned}\int_1^4 3x^2 \ln(x)\,\mathrm{d}x &= \left[x^3 \ln(x)\right]_1^4 - \int_1^4 x^3 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= 4^3 \ln 4 - 1 \cdot 0 - \left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^4 \\ &= 64 \ln 4 - \left(\frac{1}{3}4^3 - \frac{1}{3}\right) \\ &= 64 \ln 4 - \frac{63}{3} \\ &= 128 \ln 2 - 21\end{aligned}$$

(d) $\displaystyle\int_0^1 -2x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$

Mit der Substitution $u(x) = -x^2 \;\Rightarrow\; du = -2x\,\mathrm{d}x$ und $u(0) = 0$ sowie $u(1) = -1$. Zusammen also

$$\begin{aligned}\int_0^1 -2x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{-1} \mathrm{e}^u\,du \\ &= \left[\mathrm{e}^u\right]_0^{-1} = \mathrm{e}^{-1} - 1\end{aligned}$$

(e) $\displaystyle\int_a^b 6x^2 \sin(2x^3)\,\mathrm{d}x$

Mit der Substitution $u(x) = 2x^3 \;\Rightarrow\; du = 6x^2\,\mathrm{d}x$, $u(a) = 2a^3$ und $u(b) = 2b^3$ ergibt sich

$$\begin{aligned}\int_a^b 6x^2 \sin(2x^3)\,\mathrm{d}x &= \int_{2a^3}^{2b^3} \sin(u)\,du \\ &= \left[-\cos(u)\right]_{2a^3}^{2b^3} \\ &= -\cos(2b^3) + \cos(2a^3)\end{aligned}$$

(f) $\displaystyle\int_0^\pi \cos(2x + \pi)\,\mathrm{d}x$

Substituiere $u(x) = 2x + \pi \;\Rightarrow\; du = 2\,\mathrm{d}x$, $u(0) = \pi$ und $u(\pi) = 3\pi \;\Rightarrow$

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \cos(2x + \pi)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_0^\pi 2\cos(2x + \pi)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int_{2\cdot 0+\pi}^{2\pi+\pi} \cos(u)\,du \\ &= \frac{1}{2}\left[\sin(u)\right]_\pi^{3\pi} \\ &= \frac{1}{2}(0 - 0) \\ &= 0\end{aligned}$$

---

3. (Partielle Integration und Substitution) Berechnen Sie mit Hilfe der partiellen Integration oder geeigneten Substitutionen folgende Integrale:

(a) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}/2} x\sin(4x^2)\,\mathrm{d}x$

Substituiere $u(x) = 4x^2 \;\Rightarrow\; du = 8x\,\mathrm{d}x\,,\; u(0) = 0$ und $u(\sqrt{\pi}/2 = \pi \;\Rightarrow$

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{\pi}/2} \frac{1}{8}\cdot 8x\sin(4x^2)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{8}\int_0^{\pi}\sin(u)\,du = \frac{1}{8}\left[-\cos(u)\right]_0^{\pi}\\ &= \frac{1}{8}(-(-1)+1) = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

(b) $\displaystyle\int_0^{\infty} x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ partiell integrieren:

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x &= \left[-x\mathrm{e}^{-x}\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} 1\cdot\left(-\mathrm{e}^{-x}\right)\,\mathrm{d}x\\ &= \lim_{x\to\infty}\left(-x\mathrm{e}^{-x}\right) + \int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x\\ &= 0 + \left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_0^{\infty}\\ &= \lim_{x\to\infty}\left(-\mathrm{e}^{-x}\right) + \mathrm{e}^0\\ &= 1\end{aligned}$$

(c) $\displaystyle\int_0^{\infty} k^2 x\mathrm{e}^{-kx}\,\mathrm{d}x\,,\;\; k\in\mathbf{R}^+$

$$\begin{aligned}k^2\int_0^{\infty} x\mathrm{e}^{-kx}\,\mathrm{d}x &= k^2\left[-\frac{1}{k}x\mathrm{e}^{-kx}\right]_0^{\infty}\\ &\quad +k^2\left[\frac{1}{k}\int_0^{\infty}1\cdot\mathrm{e}^{-kx}\,\mathrm{d}x\right]\\ &= k^2\cdot 0 + \frac{1}{k}\left[-\frac{1}{k}\mathrm{e}^{-kx}\right]_0^{\infty}\\ &= k^2\cdot\frac{1}{k^2}\\ &= 1\end{aligned}$$

Alternativ kann man auch $y = kx$ substituieren

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} k^2 x\mathrm{e}^{-kx}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\infty}(kx)\mathrm{e}^{-kx}\,\underbrace{k\,dx}_{dy}\\ &= \int_{y(0)=0}^{y(\infty)=\infty} y\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y \qquad \text{wie bei Aufg. (b)}\end{aligned}$$

(d) $\displaystyle\int_0^{\pi} x^2\sin\left(\frac{x^3}{\pi^2}\right)\,dx$

Substituiere $u(x) = x^3/\pi^2 \;\Rightarrow\; du = 3x^2/\pi^2\,,\; u(0) = 0$ und $u(\pi) = \pi \;\Rightarrow$

$$\begin{aligned}\frac{\pi^2}{3}\int_0^{\pi}\frac{3}{\pi^2}\sin\left(\frac{x^3}{\pi^2}\right)\,\mathrm{d}x &= \frac{\pi^2}{3}\int_{u(0)=0}^{u(\pi)=\pi}\sin(u)\,du\\ &= \frac{2}{3}\pi^2 \qquad \text{vgl. (a)}\end{aligned}$$

(e) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\cos(x)\cos(\sin(x))\,\mathrm{d}x$

Substituiere $u(x) = \sin(x) \Rightarrow du = \cos(x)\,\mathrm{d}x\,, u(0) = 0$ und $u(\pi/2) = 1 \Rightarrow$

$$\int_0^{\pi/2} \cos(x)\cos(\sin(x))\,\mathrm{d}x \;=\; \int_0^1 \cos(u)\,du \;=\; [\sin(u)]_0^1 \;=\; \sin(1)$$

(f) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln(x^2)}{2x^2}\,\mathrm{d}x$ kann wegen $\ln(x^2) = 2\ln(x)$ umgeformt werden zu

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{\ln(x^2)}{2x^2}\,\mathrm{d}x &= \int_1^\infty \frac{\cancel{2}\ln(x)}{\cancel{2}x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\cdot\ln(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Nun partiell integrieren mit $u' = \frac{1}{x^2} \Rightarrow u = -\frac{1}{x}$ und $v = \ln(x) \Rightarrow v' = \frac{1}{x}$

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\cdot\ln(x)\,\mathrm{d}x &= \left[-\frac{1}{x}\cdot\ln(x)\right]_1^\infty - \int_1^\infty \left(-\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= \underbrace{\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{\ln(x)}{x}\right)}_{=0\ *} + \frac{1}{1}\cdot 0 + \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2} \\ &= \left[-\frac{1}{x}\right]_1^\infty \\ &= \lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right) + 1 \\ &= 1\end{aligned}$$

$*$ Der Logarithmus divergiert für $x \to \infty$ langsamer, als $\frac{1}{x}$ gegen Null geht. Merkhilfe: So wie die Exponentialfunktion schneller als jede Potenzfunktion gegen Unendlich strebt, wächst ihre Umkehrfunktion, der Logarithmus, langsamer als alle Potenzen.

---

4. (Integration) Werten Sie die folgenden Integrale aus:

(a) $\displaystyle\int_1^2 x^5\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{6}x^6\right]_1^2 = \frac{64}{6} - \frac{1}{6} = \frac{21}{2} = 10.5$

(b) $\displaystyle\int_a^b cx^n\,\mathrm{d}x = c\int_a^b x^n\mathrm{d}x = c\left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_a^b = \frac{c}{n+1}(b^{n+1} - a^{n+1})$ für $n > 0$.

(c) $\displaystyle\int_a^b (cx)^n\,\mathrm{d}x = c^n\left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_a^b = \frac{c^n}{n+1}(b^{n+1} - a^{n+1})$ für $n > 0$.

(d) $\displaystyle\int_0^1 (x^3 + \frac{1}{2}\sqrt{x})\mathrm{d}x = \int_0^1 x^3\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^1 + \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12}$

(e) $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int_1^3 x^{-2}\mathrm{d}x = [-x^{-1}]_1^3 = -\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}$

(f) $\displaystyle\int_0^1 (x-1)^4\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{5}(x-1)^5\right]_0^1 = 0 - (-\frac{1}{5}) = \frac{1}{5}$

(g) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \exp(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty}[\exp(x)]_a^0 = \exp(0) - \lim_{a\to-\infty}\exp(a) = 1 - 0 = 1$

(h) $\int_{-1}^{1}(x^4-x^2)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{5}-\frac{1}{3}-(-\frac{1}{5}+\frac{1}{3}) = -\frac{4}{15}$

(i) $\int_{-1}^{1}(x^3-x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{4}-\frac{1}{2}-(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}) = 0$

(j) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin(x)\,\mathrm{d}x = [-\cos(x)]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 0$

(k) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos(\omega t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{\omega}\sin(\omega t)\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{1}{\omega}[\sin(\omega\frac{\pi}{2})-\sin(-\omega\frac{\pi}{2})]$
$= \frac{1}{\omega}[\sin(\omega\frac{\pi}{2})+\sin(\omega\frac{\pi}{2})] = \frac{2}{\omega}[\sin(\omega\frac{\pi}{2})]$

(l) $\int_a^b \mathrm{sgn}(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{x}{|x|}\mathrm{d}x$

Fallunterscheidung wegen der Betragsfunktion:

(1) $a,b>0$, dann ist $|x|=x \Rightarrow \int_a^b \frac{x}{|x|}\mathrm{d}x = \int_a^b 1\,\mathrm{d}x = [x]_a^b = b-a$

(2) $a,b<0$, dann ist $|x|=-x \Rightarrow \int_a^b \frac{x}{|x|}\mathrm{d}x = \int_a^b -1\,\mathrm{d}x = [-x]_a^b = -b+a$

(3) $a<0,\ b>0$: $\int_a^b \frac{x}{|x|}\mathrm{d}x = \lim_{y\to 0}\int_a^y \frac{x}{|x|}\mathrm{d}x + \lim_{y\to 0}\int_y^b \frac{x}{|x|}\mathrm{d}x = \lim_{y\to 0}[-x]_a^y + \lim_{y\to 0}[x]_y^b =$
$-0-(-a)+b-0 = a+b$

---

5. (Integration) Sei $f(x)$ eine gerade und $g(x)$ eine ungerade Funktion. Zeigen Sie:

(a) $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$ für alle reellen a.

(b) $\int_{-a}^{a} g(x)\,\mathrm{d}x = 0$ für alle reellen a.

(c) Was folgern Sie daraus für $\int_{-a}^{a} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$

Lösung:

(a) $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x + \int_0^a f(x)\mathrm{d}x$

Wegen $f(x)=f(-x)$ ist $\int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-a}^{0} f(-x)\mathrm{d}x = -\int_a^0 f(y)\mathrm{d}y = \int_0^a f(y)\mathrm{d}y\,.$

Dabei wurde $y=-x \Rightarrow \mathrm{d}y = -\mathrm{d}x$ substituiert und es wurden die Integrationsgrenzen vertauscht, was zu einer Vorzeichenänderung des Integrals führt. Weil nun aber der Name der Integrationsvariable beliebig ist („Dummy Variable“), folgt

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^a f(y)\mathrm{d}y + \int_0^a f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$$

(q.e.d.)

(b) Sei $g(x) = -g(-x)$. Wieder wird $y = -x \Rightarrow \mathrm{d}y = -\mathrm{d}x$ substituiert $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} g(x)\mathrm{d}x &= \int_{-a}^{0} g(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} g(x)\mathrm{d}x = -\int_{-a}^{0} g(-x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} g(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_{a}^{0} g(y)\mathrm{d}y + \int_{0}^{a} g(x)\mathrm{d}x = -\int_{0}^{a} g(y)\mathrm{d}y + \int_{0}^{a} g(x)\mathrm{d}x = 0\end{aligned}$$

(q.e.d.)

(c) Da das Produkt einer geraden mit einer ungeraden Funktion ungerade ist ($h(x) := f(x) \cdot g(x) \Rightarrow h(-x) = f(-x) \cdot g(-x) = f(x) \cdot (-g(x)) = -f(x) \cdot g(x) = -h(x)$) gilt

$$\int_{-a}^{a} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = 0\ .$$

---

6. (Mittelwert) Berechnen Sie den Mittelwert der Funktion $f(x) = 2x - x^3$

(a) auf dem Intervall $[1, 4]$,
(b) auf dem Intervall $[-5, 5]$,
(c) über alle reellen Zahlen. Hinweis: Berechnen Sie zunächst den Mittelwert auf einem Intervall $[-c, c]$ und lassen Sie dann c gegen unendlich gehen.

Lösung:

Der Mittelwert einer Funktion $f(x)$ über das Intervall $I = [a; b]$ ist per Definition

$$\boxed{\langle f\rangle_{a;b} = \frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x\,.}$$

(a) $\langle f\rangle_{1;4} = \dfrac{1}{4-1}\displaystyle\int_{1}^{4} 2x - x^3\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\left[x^2 - \frac{1}{4}x^4\right]_{1}^{4} = \frac{-48 - 3/4}{3} = -16\frac{1}{4}$

(b) $\langle f\rangle_{-5;5} = \dfrac{1}{10}\displaystyle\int_{-5}^{5} 2x - x^3\mathrm{d}x = \frac{1}{10}\left[x^2 - \frac{1}{4}x^4\right]_{-5}^{5} = 0$

Diese Lösung folgt auch unmittelbar aus 5b!

(c) $\langle f\rangle_{-c;c} = \dfrac{1}{2c}\displaystyle\int_{-c}^{c} 2x - x^3\mathrm{d}x = \frac{1}{2c}\left[x^2 - \frac{1}{4}x^4\right]_{-c}^{c} = \frac{c^2 - \frac{1}{4}c^4 - (c^2 - \frac{1}{4}c^4)}{2c} = 0$

Für $c \to \infty$ gilt: $\lim\limits_{c\to\infty}\langle f\rangle_{-c;c} = \lim\limits_{c\to\infty} 0 = 0$

---

7. (Integration) Berechnen Sie das Volumen einer Kugel mit Radius R. Gehen Sie dazu wie in Beispiel 4 von Kapitel 12.5 skizziert vor und veranschaulichen Sie sich die Methode, indem Sie einige der Schnittflächen, über die integriert wird, in eine Kugel zeichnen.

Lösung:

Integration von Kreisflächen (Tipp: Apfel durchschneiden!)

Hauptbedingung: $\displaystyle\int_{-R}^{R} \pi a^2 da$

Nebenbedingung: $a^2 = R^2 - x^2$ (aus Satz des Pythagoras)

$$\begin{aligned}\int_{-R}^{R} \pi(R^2 - x^2)\mathrm{d}x &= \pi \int_{-R}^{R} R^2 - x^2 \mathrm{d}x = \pi \left[R^2 x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-R}^{R} \\ &= \pi[R^3 - \frac{1}{3}R^3 - (-R^3 + \frac{1}{3}R^3)] = \pi(2R^3 - \frac{2}{3}R^3) \\ &= \frac{4}{3}\pi R^3\end{aligned}$$

---

8. (Substitution) Werten Sie folgende Integrale aus:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$ (Tipp: $x = \sin(y)$ setzen)

(b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos(x)\sin^2(x)\,\mathrm{d}x$ (Tipp: $u = \sin(x)$ setzen)

(c) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\exp(-\frac{x}{1+x})}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x$

Lösung:

(a) Substitution: $x = \sin(y)$; $y = \arcsin(x)$; $y_0 = \arcsin(0) = 0$; $y_1 = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$; $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \cos(y)$; $\mathrm{d}x = \cos(y)\ \mathrm{d}y$;

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x &= \int_{\arcsin(0)}^{\arcsin(1)} \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(y)}}\cos(y)\ \mathrm{d}y \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos(y)}\cos(y)\ \mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,\mathrm{d}y = [y]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

(b) Mit $u(x) = \sin(x) \Rightarrow \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \cos(x) \Rightarrow du = \cos(x)\,\mathrm{d}x \Rightarrow$

$$\int_0^{\pi/2} \underbrace{\sin^2(x)}_{u^2}\underbrace{\cos(x)\,\mathrm{d}x}_{\mathrm{d}u} = \int_{\sin(0)}^{\sin(\pi/2)} u^2\,du = \left[\frac{1}{3}u^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

(c) Sei $u(x) = \dfrac{x}{1+x} \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1\cdot(1+x) - x\cdot 1}{(1+x)^2} = \dfrac{1}{(1+x)^2}$. Weiter ist $u(1) = 1/2$ und $\lim\limits_{x\to\infty} u(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{1+x} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x}\cdot\dfrac{1}{1+1/x}\right) = 1 \Rightarrow$

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty} \exp(-\underbrace{\frac{x}{1+x}}_{u(x)})\underbrace{\frac{\mathrm{d}x}{(1+x)^2}}_{\mathrm{d}u} &= \int_{1/2}^{1} \exp(-u)\,du = [-\exp(-u)]_{1/2}^1 \\ &= -\exp(-1) + \exp(1/2) = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}} - \frac{1}{\mathrm{e}} \approx 0.2386\end{aligned}$$

Zusammenfassung: Die Variable x wird durch eine neue Variable $u(x)$ ersetzt; $\mathrm{d}x$ wird aus $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = u'(x)$ berechnet zu $\dfrac{\mathrm{d}u}{u'(x)} = \mathrm{d}x \Leftrightarrow \mathrm{d}u = u'(x)\,\mathrm{d}x$ und eingesetzt.

9. (Partielle Integration) Berechnen sie das Integral $\int_a^b [\sin(x)]^2 \, \mathrm{d}x$

(a) mit Hilfe der partiellen Integration,

(b) indem sie zuerst aus der Moivreschen Formel und dem Satz des Pythagoras die Beziehung $\sin^2(x) = \frac{1}{2}[1 - \cos(2x)]$ herleiten und damit den Integranden vereinfachen.

Aus ihrem Ergebnis folgt insbesondere

$$\int_0^{k\frac{\pi}{2}} [\sin(x)]^2 \, \mathrm{d}x = \int_0^{k\frac{\pi}{2}} [\cos(x)]^2 \, \mathrm{d}x = k\frac{\pi}{4} \; .$$

Veranschaulichen sie sich dieses Resultat graphisch.

Lösung:

(a) $\int_a^b \sin^2(x) \; \mathrm{d}x = \int_a^b \sin(x) \cdot \sin(x) \; \mathrm{d}x$ partiell integrieren:

Mit $f'(x) = \sin(x)$ und $g(x) = \sin(x)$ folgt $f(x) = -\cos(x)$ sowie $g'(x) = \cos(x)$ und damit:

$$\begin{aligned} \int_a^b \sin(x) \cdot \sin(x) \mathrm{d}x &= [-\cos(x) \cdot \sin(x)]_a^b - \int_a^b [-\cos(x)] \cdot \cos(x) \; \mathrm{d}x \\ &= [-\cos(x) \cdot \sin(x)]_a^b + \int_a^b \cos^2(x) \; \mathrm{d}x \\ &= [-\cos(x) \cdot \sin(x)]_a^b + \int_a^b [1 - \sin^2(x)] \; \mathrm{d}x \end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde $1 = \cos^2(x) + \sin^2(x) \Leftrightarrow \cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$ (Pythagoras) verwendet. Damit hat man erreicht, dass auf der rechten Seite ebenfalls das gesuchte Integral steht $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \int_a^b \sin^2(x) \; \mathrm{d}x &= [-\cos(x) \cdot \sin(x)]_a^b + \int_a^b 1 \mathrm{d}x - \int_a^b \sin^2(x) \; \mathrm{d}x \qquad \Leftrightarrow \\ 2\int_a^b \sin^2(x) \; \mathrm{d}x &= [-\cos(x) \cdot \sin(x)]_a^b + \int_a^b 1 \mathrm{d}x \qquad \Leftrightarrow \\ \int_a^b \sin^2(x) \; \mathrm{d}x &= \frac{1}{2} \left[-\cos(x) \cdot \sin(x) + x\right]_a^b \\ &= \frac{1}{2}[b - a - \cos(b)\sin(b) + \cos(a)\sin(a)] \end{aligned}$$

(b) Behauptung: $\sin^2(x) = \dfrac{1}{2}[1 - \cos(2x)]$

Beweis: Nach Moivre und Binomischem Satz ist

$$\cos(nx) + \mathrm{i}\sin(nx) = [\cos(x) + \mathrm{i}\sin(x)]^n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{i}^k \binom{n}{k} \cos^{n-k}(x) \sin^k(x) \; .$$

Für $n = 2$ also,

$$\begin{aligned}
\cos(2x) + \mathrm{i}\sin(2x) &= \sum_{k=0}^{2} \mathrm{i}^k \binom{2}{k} \cos^{2-k}(x)\sin^k(x) \\
&= \mathrm{i}^0\binom{2}{0}\cos^2(x)\sin^0(x) + \mathrm{i}^1\binom{2}{1}\cos(x)\sin(x) \\
&\quad +\mathrm{i}^2\binom{2}{2}\cos^0(x)\sin^2(x) \\
&= \cos^2(x) + \mathrm{i}\,2\cos(x)\sin(x) - \sin^2(x)
\end{aligned}$$

Der Vergleich der Realteile liefert

$$\begin{aligned}
\cos(2x) &= \cos^2(x) - \sin^2(x) \\
&= 1 - 2\sin^2(x) \qquad \text{(nach Pythagoras)} \\
\Leftrightarrow \sin^2(x) &= \frac{1}{2}[1 - \cos(2x)] \qquad \text{(q.e.d.)}
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich das gesuchte Integral zu

$$\begin{aligned}
\int_a^b \sin^2(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^b \frac{1}{2}\left[1 - \cos(2x)\right]\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{2}\sin(2x)\right]_a^b \\
&= \frac{1}{2}\left[x - \cos(x)\sin(x)\right]_a^b \\
&= \frac{1}{2}[b - a - \cos(b)\sin(b) + \cos(a)\sin(a)]
\end{aligned}$$

wie zuvor, weil $\sin(2x) = 2\cos(x)\sin(x)$, wie aus dem Vergleich der Imaginärteile oben folgt.

---

10. (Partielle Integration) Zeigen Sie durch partielle Integration, dass die **Gammafunktion**

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1}\exp(-x)\,\mathrm{d}x\ ,\ t > 0$$

der Gleichung $\Gamma(t+1) = t\,\Gamma(t)\ ,\ t > 0$ genügt und somit eine Verallgemeinerung des Fakultätsbegriffes auf reelle Zahlen $t > 0$ ermöglicht. Berechnen Sie $\Gamma(n)$ für $n \in \{1, 2, 3\}$ explizit.

Lösung:

$$\begin{aligned}
\Gamma(t+1) &= \int_0^\infty x^t \exp(-x)\,\mathrm{d}x \\
&= [-x^t\exp(-x)]_0^\infty - \int_0^\infty t x^{t-1}[-\exp(-x)]\,\mathrm{d}x \\
&= \underbrace{\lim_{x\to\infty}(-x^t\exp(-x))}_{=0} + \underbrace{0^t\exp(-0)}_{=0} + t\int_0^\infty x^{t-1}\exp(-x)\,\mathrm{d}x \\
&= t\,\Gamma(t) \qquad \text{(q.e.d.)}\ ,
\end{aligned}$$

weil $\exp(-x)$ für $x \to \infty$ schneller gegen Null geht, als x^t für festes t divergiert (man denke an die Potenzreihe der Exponentialfunktion).

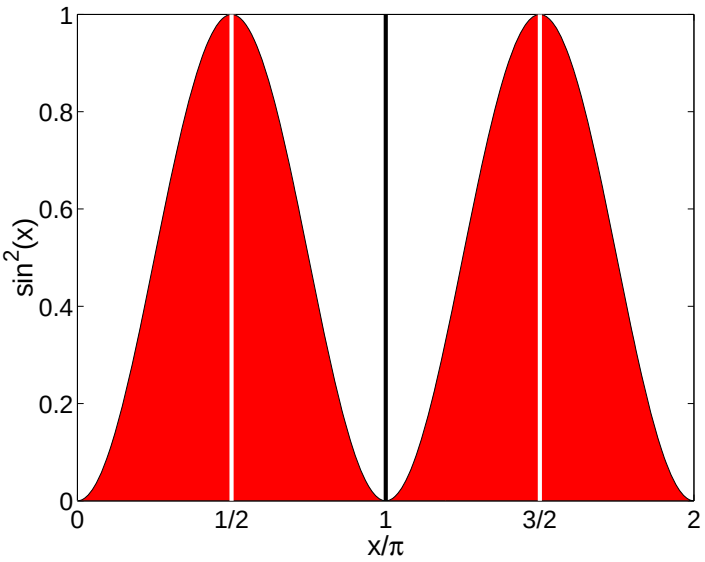


Abbildung A.39: Jedes der oben angedeuteten Rechtecke hat den Flächeninhalt $\pi/2$ (beachte das x in Einheiten von π gegeben ist) und wird vom Graphen der Funktion in zwei gleichgroße Stücke ($=\pi/4$) unterteilt, weil $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$.

Es ist

$$\begin{aligned}
\Gamma(1) &= \int_0^\infty x^0 \exp(-x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \exp(-x)\,\mathrm{d}x = [-\exp(-x)]_0^\infty = 1 = 0! \\
\Gamma(2) &= \int_0^\infty x^1 \exp(-x)\,\mathrm{d}x = [-x\exp(-x)]_0^\infty - \int_0^\infty 1x^0[-\exp(-x)]\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^\infty \exp(-x)\,\mathrm{d}x = 1 \\
&= 1\cdot\Gamma(1) = 1\cdot 1 = 1 = 1! \\
\Gamma(3) &= \int_0^\infty x^2 \exp(-x)\,\mathrm{d}x = [-x^2\exp(-x)]_0^\infty - \int_0^\infty 2x^1[-\exp(-x)]\,\mathrm{d}x \\
&= 2\int_0^\infty x\exp(-x)\,\mathrm{d}x = 2 \\
&= 2\cdot\Gamma(2) = 2\cdot 1 = 2 = 2!
\end{aligned}$$

A.13 Aufgaben zu Kapitel 13

1. (Differentialgleichung) Wir betrachten die Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = -x^3 + 4x$$

(a) Machen Sie sich ein Bild von der Funktion $f(x) = -x^3 + 4x$. Führen Sie dazu eine kurze Kurvendiskussion durch: Verhalten für $x \to \pm\infty$, Symmetrie, Nullstellen, 1. Ableitung und Extremstellen, Skizze.

$f(x) = -x^3 + 4x = x\cdot(4 - x^2) = x(2-x)(2+x)$ dritte binomische Formel

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \mp\infty$ $\quad\Rightarrow$ höchste Potenz ist ungerade mit negativem VZ

Die Funktion ist ungerade (es kommen nur ungerade Potenzen von x vor)
$f(-x) = -(-x)^3 + 4(-x) = x^3 - 4x = -(-x^3 + 4x) = -f(x)$.

Nullstellen bei 0, ± 2 (aus der faktorisierten Darstellung oben sofort ablesbar)

$f'(x) = -3x^2 + 4$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad f'(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 &= \frac{4}{3} \\ \Leftrightarrow x &= \pm\frac{2}{\sqrt{3}} \\ &= \pm\frac{2}{3}\sqrt{3} \end{aligned}$$

$f''(x) = -6x \Rightarrow$ WP bei $(0,0)$ und lokale Minima bei $-\frac{2}{\sqrt{3}}$ und Maxima bei $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

(b) Wie lauten die stationären Lösungen der Differentialgleichung?

Bedingung für stationäre Lösung:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad f(x) &= 0 \end{aligned}$$

$x_1(t) = -2,\ x_2(t) = 0,\ x_3(t) = 2$ jeweils für alle Zeiten konstant

(c) Überlegen Sie sich mit Hilfe der Skizze von $f(x)$, wie die Lösungen $x(t)$ der Differentialgleichung qualitativ aussehen werden. Sind die stationären Lösungen stabil oder instabil? Skizzieren Sie die Lösungen $x(t)$ mit den Anfangswerten $x_0 = -4, -1, 1, 4$.

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) > 0 \Leftrightarrow$ x nimmt zu $\Leftrightarrow f(x) > 0 \Leftrightarrow x < -2$ oder $0 < x < 2$

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) < 0 \Leftrightarrow$ x nimmt ab $\Leftrightarrow f(x) < 0 \Leftrightarrow x > 2$ oder $-2 < x < 0$

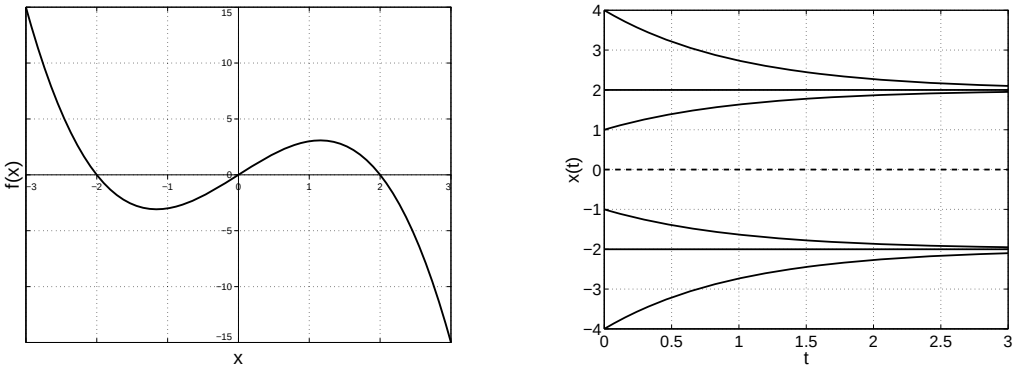


Abbildung A.40: Links: Graph der Funktion $f(x) = -x^3 + 4x$; rechts: Lösungen zu verschiedenen Anfangswerten

(d) Wiederholen Sie die Aufgabenteile (a) bis (c) für die Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = x^3 - 4x \quad \text{und} \quad f(x) = x^3 - 4x\,.$$

Asymptotik: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$

Nullstellen wie zuvor $(0, \pm 2)$;

$f(-x) = -f(x) \quad \rightarrow$ Symmetrie wie zuvor;

Extremstellen gleich, aber Maximum und Minimum vertauscht

stationäre Lösungen sind wie zuvor $x_1(t) = -2,\ x_2(t) = 0,\ x_3(t) = 2$,
aber nun sind $x_1(t)$ und $x_3(t)$ instabil und $x_2(t)$ stabil.

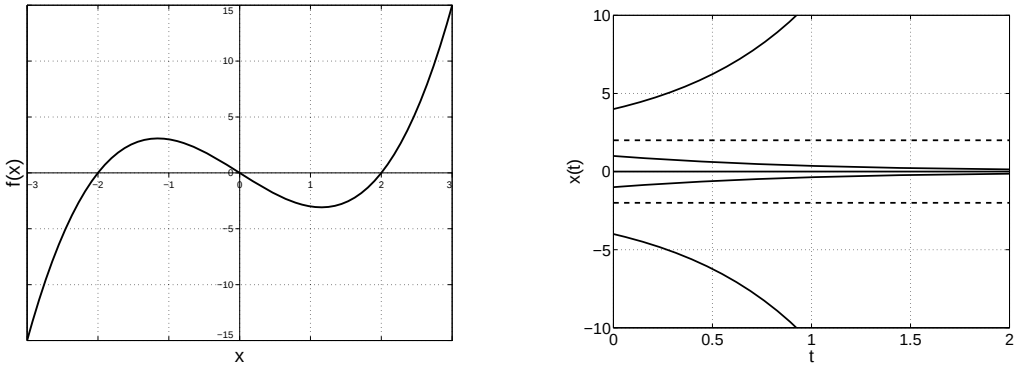


Abbildung A.41: Links: Graph der Funktion $f(x) = x^3 - 4x$; rechts: Lösungen zu verschiedenen Anfangswerten

---

2. (Differentialgleichungen) Gegeben ist folgende Differentialgleichung:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = -2t \cdot x$$

(a) Wie unterscheidet sie sich prinzipiell von denen aus der vorherigen Aufgabe?

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x = -2t \cdot x = g(t) \cdot f(x) \qquad \text{mit } x = x(t)$$

Zuvor war die rechte Seite nicht explizit von t abhängig, sondern nur implizit durch die t-Abhängigkeit von x.

(b) Geben Sie die stationäre Lösung der Differentialgleichung an, falls eine existiert.

Bedingung für stationäre Lösung:

$$\begin{aligned} & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x &&= 0 && \text{für alle } t \\ \Rightarrow\quad & -2t \cdot x &&= 0 && \text{für alle } t \\ & \Rightarrow\quad x &&= x(t) = 0 && \text{für alle } t \end{aligned}$$

(c) Wie heißt das Verfahren um eine solche Differentialgleichung zu lösen?

Diese DGL kann durch Trennung oder Separation der Variablen gelöst werden.

(d) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung!

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x &= -2t \cdot x \\ \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}x}{x} &= -2t\ \mathrm{d}t \\ \Rightarrow \quad \int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{\mathrm{d}x}{x} &= -2\int_{t_0}^{t} \tilde{t}\ d\tilde{t} \\ \Leftrightarrow \quad [\ln(|x|)]_{x(t_0)}^{x(t)} &= -[\tilde{t}^2]_{t_0}^{t} \\ \Leftrightarrow \quad \ln\left(\frac{x(t)}{x(t_0)}\right) &= -t^2 + t_0^2 \\ \Rightarrow \quad x(t) &= x(t_0)\mathrm{e}^{t_0^2 - t^2} \end{aligned}$$

Der Betrag fällt weg, da $\frac{x(t)}{x(t_0}$ immer größer Null ist, weil $x = 0$ stationäre Lösung ist und damit $x(t)$ nie das Vorzeichen wechselt.

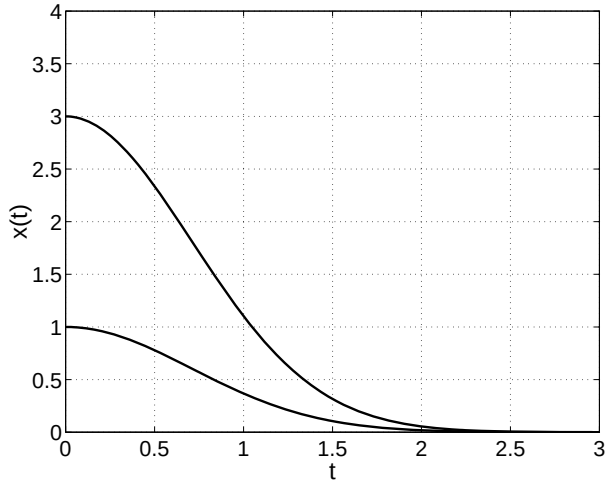


Abbildung A.42: Die Lösung für $t \geq 0$ einmal für $x_0 = 1$ sowie für $x_0 = 3$.

---

3. (Differentialgleichungen) Die **logistische Differentialgleichung**

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = ax - bx^2 \tag{1.19}$$

mit $a, b > 0$ kann als Modell für eine Population mit begrenztem Wachstum dienen. Lösen Sie Gleichung (1.19) für beliebige Anfangspopulationen, d.h. zur Zeit t_0 sei $x(t_0) = x_0$. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(a) Formen Sie die Gleichung durch Trennung der Variablen in einen Integralausdruck um.

(b) Berechnen Sie das Integral über x mit Hilfe der Substitution $y = 1/x$. Was erhalten Sie damit letztendlich für $x(t)$?

(c) Diskutieren Sie die Funktion

$$x(t) = \frac{a}{b - \left(b - \frac{a}{x_0}\right)\exp[-a(t - t_0)]} \tag{1.20}$$

für Zeiten $t \geq t_0$. Was ergibt sich im Grenzfall $b = 0$?

Lösung:

(a) Aus $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = ax - bx^2$ folgt $\dfrac{\mathrm{d}x}{ax - bx^2} = \mathrm{d}t$ und daher

$$\int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{\mathrm{d}x}{ax - bx^2} = \int_{t_0}^{t} d\tilde{t} = t - t_0 \ .$$

(b) Mit der Substitution $y(x) = \dfrac{1}{x} \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{1}{x^2}$ und $y_0 = 1/x_0$ sowie $y(t) = 1/x(t)$ ergibt sich

$$\int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{1}{b - \underbrace{a/x}_{ay}} \cdot \underbrace{\left(-\frac{1}{x^2}\right) \mathrm{d}x}_{\mathrm{d}y} = \int_{y_0}^{y(t)} \frac{1}{b - ay} \ \mathrm{d}y$$

Um dieses Integral zu lösen subtituiert man ein zweites Mal folgendermaßen $u(x) = b - ay \Rightarrow u' = -a \Rightarrow -a\mathrm{d}x = du$ und erhält

$$\begin{aligned} -\frac{1}{a} \int_{y_0}^{y(t)} \underbrace{\frac{1}{b - ay}}_{u^{-1}} \cdot \underbrace{(-a)\,\mathrm{d}y}_{\mathrm{d}u} &= -\frac{1}{a} \int_{b-ay_0}^{b-ay(t)} u^{-1} du = -\frac{1}{a} [\ln|u|]_{b-ay_0}^{b-ay(t)} \\ &= -\frac{1}{a} [\ln|b - ay(t)| - \ln|b - ay_0|] \\ &= -\frac{1}{a} [\ln \frac{b - ay(t)}{b - ay_0}] \ . \end{aligned}$$

Der Betrag fällt hier weg, da $\frac{b-ay(t)}{b-ay_0}$ immer positiv ist.

$$\begin{aligned} -\frac{1}{a} [\ln \frac{b - ay(t)}{b - ay_0}] = t - t_0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{b - ay(t)}{b - ay_0} = \mathrm{e}^{-a(t-t_0)} \quad \Leftrightarrow \\ y(t) = -\frac{1}{a}(b - ay_0)\mathrm{e}^{-a(t-t_0)} + \frac{b}{a} \quad &= \quad \frac{b}{a}[1 - (1 - \frac{a}{b}y_0)\mathrm{e}^{-a(t-t_0)}] \ . \end{aligned}$$

Für die endgültige Lösung muss nun noch rücksubstituiert werden, man erhält

$$x(t) = \frac{a}{b} \frac{1}{1 - (1 - \frac{a}{bx_0}) \exp[-a(t - t_0)]} \ .$$

(c) Die zu diskutierende Funktion ist gerade die eben gefundene Lösung.

(1.) Nullstellen: Für $t \geq t_0$ und $a, b, x_0 > 0$ ist $x(t)$ offensichtlich immer größer als Null $\Rightarrow$ keine Nullstellen für $t \geq t_0$.

(2.) Extremwerte: Notwendige Bedingung: $\dot{x} = 0$. Da $x(t)$ der Differentialgleichung (**??**) genügt, ist $\dot{x} = ax - bx^2 = (a - bx)x$. Da $x(t)$ keine Nullstellen hat (siehe (1.)), ist die Forderung $\dot{x} = 0$ äquvalent zu $a - bx(t) = 0 \Leftrightarrow x(t) = a/b \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} &= \frac{a}{b} \frac{1}{1 - (1 - \frac{a}{bx_0}) \exp[-a(t - t_0)]} \quad \Leftrightarrow \\ 1 &= \frac{1}{1 - (1 - \frac{a}{bx_0}) \exp[-a(t - t_0)]} \quad \Leftrightarrow \\ 1 &= 1 - (1 - \frac{a}{bx_0}) \exp[-a(t - t_0)] \quad \Leftrightarrow \\ 0 &= (1 - \frac{a}{bx_0}) \exp[-a(t - t_0)] \ . \end{aligned}$$

Die Exponentialfunktion wird niemals Null, daher muss $1 - \frac{a}{bx_0} = 0$ sein, $\Rightarrow x_0 = a/b$. Dies ist aber genau der Fixpunkt der Differentialgleichung (**??**) $\Rightarrow$ für $x_0 = a/b$ ist die Lösung konstant $\Rightarrow x(t)$ hat keine Extremwerte.

(3.) Wendepunkte: Notwendige Bedingung: $\ddot{x} = 0$. Wieder folgt aus der Differentialgleichung und der Kettenregel

$$\ddot{x} = a\dot{x} - 2bx\dot{x} = (a - 2bx)\dot{x} \ .$$

Dieses Produkt ist Null, wenn entweder $x(t) = \frac{a}{2b}$ oder $\dot{x} = 0$. Der letzte Fall führt wieder auf die Fixpunktlösung, die sicher keinen Wendepunkt hat (aber deren zweite Ableitung identisch verschwindet), weil sie konstant ist. Der erste Fall führt auf

$$\begin{aligned}
\frac{a}{2b} &= \frac{a}{b}\frac{1}{1-(1-\frac{a}{bx_0})\exp[-a(t-t_0)]} \qquad \Leftrightarrow \\
\frac{1}{2} &= \frac{1}{1-(1-\frac{a}{bx_0})\exp[-a(t-t_0)]} \qquad \Leftrightarrow \\
2 &= 1-\left(1-\frac{a}{bx_0}\right)\exp[-a(t-t_0)] \qquad \Leftrightarrow \\
1 &= \left(\frac{a}{bx_0}-1\right)\exp[-a(t-t_0)] \qquad \Leftrightarrow \\
\exp[a(t-t_0)] &= \frac{a}{bx_0}-1 \qquad \Leftrightarrow \\
t &= t_0 + \frac{1}{a}\ln\left(\frac{a}{bx_0}-1\right)
\end{aligned}$$

Diese Zeit t ist nur dann größer als t_0, falls $\ln\left(\frac{a}{bx_0}-1\right) > 0 \Leftrightarrow \frac{a}{bx_0}-1 > 1 \Leftrightarrow \frac{a}{bx_0} > 2 \Leftrightarrow x_0 < \frac{a}{2b} \Rightarrow$ Für $x_0 < \frac{a}{2b}$ hat $x(t)$ einen Wendepunkt zur Zeit $t_{\mathrm{WP}} = t_0 + \frac{1}{a}\ln\left(\frac{a}{bx_0}-1\right)$ mit $x(t_{\mathrm{WP}}) = \frac{a}{2b}$.

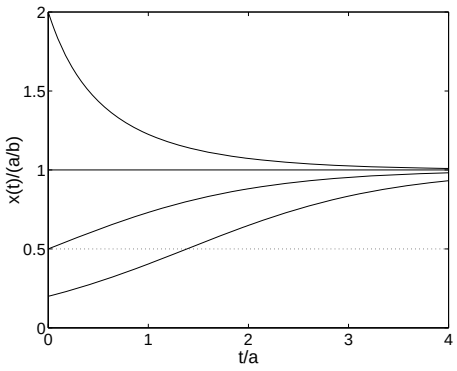


Abbildung A.43: Skizze der Lösung zu verschiedenen Anfangswerten

Für $b = 0$ ist $\dot{x} = ax \Rightarrow x(t) = x_0 \mathrm{e}^{a(t-t_0)} \Rightarrow$ unbegrenztes exponentielles Wachstum.

A.14 Aufgaben zu Kapitel 14

1. (Lineare Differentialgleichungen) Ein Medikament wird einem Patienten mit konstanter Rate r (in Gramm/Sekunde) über eine Infusion zugeführt. Gleichzeitig wird es vom Körper proportional der vorhandenen Menge $x(t)$ mit Proportionalitätskonstante α abgebaut.

(a) Stellen sie eine Differentialgleichung $\dot{x} = f[x(t)]$ für $x(t)$ auf.

(b) Skizzieren sie $f(x)$.

(c) Welche Fixpunkte hat die Differentialgleichung?

(d) Diskutieren sie ihre Stabilität (lineare Stabilitätsanalyse).

(e) Lösen sie die Differentialgleichung zunächst für beliebige Anfangswerte $x(t_0) = x_0$ mit $t_0 = 0$ durch Trennung der Variablen und zeichnen sie dann $x(t)$ für die speziellen Anfangswerte (i) $x_0 = 0$, (ii) $x_0 = \frac{r}{\alpha}$, (iii) $x_0 = 2\frac{r}{\alpha}$.

(f) Vergleichen sie Ihre Ergebnisse mit denen von der Medikamentenaufgabe in Kapitel 6. Was war dort anders, was war gleich?

Lösung:

(a) $\dot{x} =$ (Zufuhr) - (Abnahme) $= r - \alpha x$, also $f(x) = r - \alpha x$.

$-\alpha x$: Abbau der Medikamentenmenge, daher negativ; r: Medikamentenmenge, die ständig hinzukommt

(b) Skizze: siehe Abbildung A.44 (links)

(c) Fixpunktbedingung: $f(x^*) = 0 \Leftrightarrow r - \alpha x^* = 0 \Leftrightarrow x^* = \frac{r}{\alpha}$

(d) Lineare Stabilitätsanalyse des Fixpunktes

Ansatz: Starte in der Nähe des Fixpunktes, d.h. $x(t) = \dfrac{r}{\alpha} + y(t)$

Frage: Wird die Störung $y(t)$ nun kleiner oder größer? In der Vorlesung wurde gezeigt (mittels Taylorentwicklung um den Fixpunkt bis zur linearen Ordnung), dass $y(t)$ die Differentialgleichung $\dot{y} = f(x^*) \cdot y$ erfüllt, $\Rightarrow$ wenn $f'(x^*) < 0$ wird $x(t)$ zum Fixpunkt zurückkehren. Hier ist $f'(x^*) = -\alpha < 0 \;\Rightarrow$ Der Fixpunkt ist stabil.

(e) Die Differentialgleichung $\frac{\mathrm{d}x}{dt} = r - \alpha x$ kann separiert werden, d.h. man kann die von x und die von t abhängigen Größen auf verschiedene Seiten des Gleichheitszeichens bringen.

$$\frac{1}{r - \alpha x}\,\mathrm{d}x = dt \Rightarrow \int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{1}{r - \alpha x}\mathrm{d}x = \int_{t_0}^{t} dt = t - t_0 = t$$

Das verbleibende Integral ist von der gleichen Form wie in Aufgabe 3b von Kapitel 13 auf Seite 364 und kann mit der Substitution $u(x) = r - \alpha x \Rightarrow u' = -\alpha \Rightarrow -\alpha \mathrm{d}x = du$ gelöst werden. Man erhält

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\alpha}\int_{x_0}^{x(t)} \underbrace{\frac{1}{r - \alpha x}}_{u^{-1}} \cdot \underbrace{(-\alpha)\,\mathrm{d}x}_{\mathrm{d}u} &= -\frac{1}{\alpha}\int_{r-\alpha x_0}^{r-\alpha x(t)} u^{-1} du = -\frac{1}{\alpha}[\ln|u|]_{r-\alpha x_0}^{r-\alpha x(t)} \\ &= -\frac{1}{\alpha}[\ln|r - \alpha x(t)| - \ln|r - \alpha x_0|] \\ &= -\frac{1}{\alpha}[\ln\frac{r - \alpha x(t)}{r - \alpha x_0}] = t\ . \end{aligned}$$

Der Betrag fällt hier wieder weg, da $\frac{r-\alpha x(t)}{r-\alpha x_0}$ immer positiv ist (warum muss das wohl so sein?) $\Rightarrow$

$$\frac{r-\alpha x(t)}{r-\alpha x_0} = \exp(-\alpha t) \Leftrightarrow$$

$$\boxed{x(t) = -\frac{\exp(-\alpha t)(r-\alpha x_0)}{\alpha} + \frac{r}{\alpha} = \frac{r}{\alpha}[1-(1-\frac{\alpha}{r}x_0)\exp(-\alpha t)]}$$

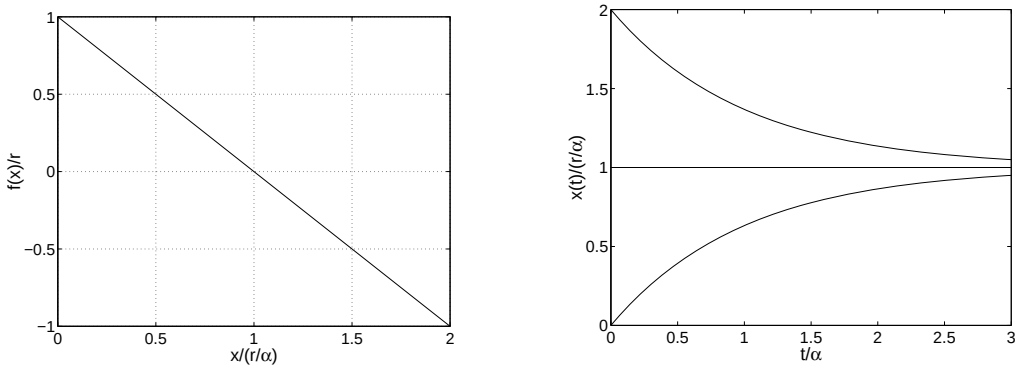


Abbildung A.44: Links: Graph der Funktion $f(x) = r-\alpha x$ für $r = 1$ und $\alpha = 1$; rechts: Lösungen für $x_0 = 1$, $x_0 = 0$ und $x_0 = -1$

(f) Damals wurde das Medikament einmal täglich, nun wird es kontinuierlich verabreicht $\Rightarrow$ damals iterierte Abbildung, nun Differentialgleichung; sonst weitgehend vergleichbar.

A.15 Aufgaben zu Kapitel 15

1. (Geraden) Im $\mathbf{R}^2$ seien die Geraden $g_1: \ -x_1 + 2x_2 = 2$ und $g_2: \ x_1 + 2x_2 = 6$ in Normalform (auch Standardform genannt) gegeben.

(a) Zeichnen sie die beiden Geraden. (Falls sie nicht wissen, wie sie anfangen sollen: Suchen sie sich zwei Punkte auf der Geraden, z.B. die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen oder identifizieren sie x_1 mit x und x_2 mit y und bringen sie die Gleichungen dann auf die ihnen bekannte Form $y = mx + c$.)

(b) Schneiden sich die beiden Geraden? Falls ja, in welchem Punkt?

(c) In welchen Punkten schneidet die Gerade $g_3: \ x_1 - 2x_2 = 2$ die Geraden g_1 und g_2 ?

(d) Betrachten sie nun noch die Geradenschar $g_4(b): \ 2x_1 - x_2 = b$ für beliebige $b \in \mathbf{R}$. Ist es möglich, b so zu wählen, dass sich die drei Geraden g_1, g_2 und $g_4(b)$ in genau einem Punkt schneiden? Falls ja: Welchen Wert müssen sie für b wählen?

Lösung:

(a) Entweder über

$$g_1: 2x_2 = 2 + x_1 \ \Leftrightarrow \ x_2 = \frac{1}{2}x_1 + 1$$

$$g_2: 2x_2 = -x_1 + 6 \ \Leftrightarrow \ x_2 = -\frac{1}{2}x_1 + 3$$

oder über die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen:

g_1: 1. Schnittpunkt mit x_1-Achse: $x_2 = 0 \Rightarrow -x_1 = 2 \Rightarrow x_1 = -2 \Rightarrow P_{11}(-2, 0)$

2. Schnittpunkt mit x_2-Achse: $x_1 = 0 \Rightarrow 2x_2 = 2 \Rightarrow x_2 = 1 \Rightarrow P_{12}(0,1)$;

g_2: 1. Schnittpunkt mit der x_1-Achse: $x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 6 \Rightarrow P_{21}(6,0)$;

2. Schnittpunkt mit x_2-Achse: $x_1 = 0 \Rightarrow 2x_2 = 6 \Rightarrow x_2 = 3 \Rightarrow P_{22}(0,3)$

(b) rechnerische Ermittlung des Schnittpunktes:

$g_1 : -x_1 + 2x_2 = 2$ und $g_2 : x_1 + 2x_2 = 6 \overset{g_1+g_2}{\Longrightarrow} 4x_2 = 8 \Rightarrow x_2 = 2 \Rightarrow S(2,2)$

(c) $g_3 : x_1 - 2x_2 = 2$

Gerade g_1 und g_3 haben die gleiche Steigung. Haben Geraden die gleiche Steigung, sind sie entweder parallel oder identisch.

Einschub: Aus der Schule kennen sie vielleicht die Normalform einer Gerade in $\mathbf{R}^2$ in der Form $\vec{n} \cdot \vec{x} = b$ mit dem Normalenvektor $\vec{n}$. Hier also

$$g_1 : (-1,2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 2 \text{ und } g_3 : (1,-2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow \vec{n}_1 = -\vec{n}_3\,.$$

Die Normalenvektoren $\vec{n}_1$ und $\vec{n}_3$ sind somit kolinear. Damit sind die Geraden parallel oder identisch.

Berechnung des Schnittpunktes von g_1 mit g_3:

Mit $g_1 : -x_1 + 2x_2 = 2$ und $g_3 : x_1 - 2x_2 = 2$ folgt aus $g_1 + g_3$, dass $0 = 4$ sein müsste $\Rightarrow$ Es gibt keinen Schnittpunkt $\Rightarrow$ g_1 und g_3 sind parallel.

Berechnung des Schnittpunktes von g_2 mit g_3:

$g_2 : x_1 + 2x_2 = 6$ und $g_3 : x_1 - 2x_2 = 2 \Rightarrow (g_2 + g_3) : 2x_1 = 8 \Rightarrow x_1 = 4 \Rightarrow 4 + 2x_2 = 6 \Rightarrow 2x_2 = 2 \Rightarrow x_2 = 1 \Rightarrow S(4,1)$.

(d) $g_4(b) : 2x_1 - x_2 = b$

Da g_1 und g_2 den Schnittpunkt $(2,2)$ haben, muss $g_4(b)$ durch diesen Punkt gehen. Setzt man $x_1 = 2$ und $x_2 = 2$ in $g_4(b)$ ein, so erhält man für b den Wert 2.

---

2. (Geraden) Im $\mathbf{R}^2$ seien die Punkte $P_1 = (-1,2)$ und $P_2 = (2,0)$ gegeben.

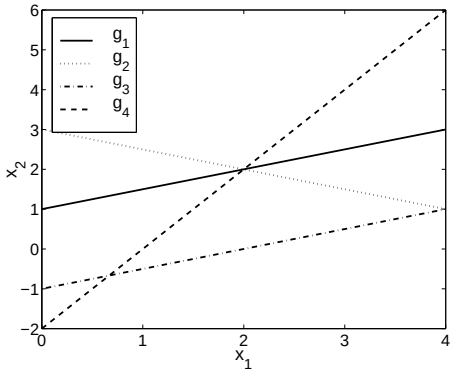


Abbildung A.45: Skizze zu Kapitel 15, Aufgabe 1

(a) Geben sie die Gleichung einer Geraden g_1 in Normalform ($a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$) an, die durch P_1 und P_2 verläuft.

(b) Wie lautet die Gleichung der Geraden $g_2: \; a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$, die parallel zu g_1 durch den Ursprung $(0,0)$ verläuft.

(c) Finden sie nun die Gleichung einer Geraden $g_3: \; a_{31}x_1 + a_{32}x_2 = b_3$, die senkrecht zu g_2 ebenfalls durch den Ursprung verläuft. Überlegen sie sich dazu, warum für die Koeffizienten a_{ij} der beiden Geraden $a_{21}a_{31} + a_{22}a_{32} = 0$ gelten muss.

(d) In welchem Punkt schneiden sich die Geraden g_1 und g_3? Sie haben nun von allen Punkten auf der Gerade g_1 denjenigen gefunden, der bezüglich der Euklidischen Norm $|\vec{x}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{2} x_i^2}$ den kürzesten Abstand zum Ursprung hat. Dies definiert auch den Abstand der Geraden g_1 vom Ursprung. Welchen Abstand hat also g_1 vom Ursprung?

Lösung:

(a) P_1 in g_1 eingesetzt, liefert $-a_{11} + 2a_{12} = b_1$ (1), und P_2 eingesetzt, ergibt $2a_{11} = b_1$ (2). Dies sind zwei Gleichungen für drei Unbekannte, also ein unterbestimmtes Gleichungssystem. Daher kann eine Variable frei gewählt werden, z.B. $a_{11} = 2$. Dann folgt aus (2) $b_1 = 4$ und aus (1) $a_{12} = 3$, zusammen also $g_1 : 2x_1 + 3x_2 = 4$.

Bemerkung: a_{11} wurde hier so gewählt, dass sich die kleinstmöglichen ganzzahligen Koeffizienten ergeben. Jede andere Wahl wäre aber genauso zulässig. Oft nutzt man diese Freiheit auch, um den Normalenvektor $\vec{n}_1 = (a_{11}, a_{12})$ in $\vec{n}_1 \cdot \vec{x} = b_1$ zu normieren, weil dann b_1 den Abstand der Geraden g_1 vom Ursprung angibt (s.u.).

(b) Den Punkt $(0,0)$ in g_2 eingesetzt, ergibt $b_2 = 0$. Damit g_2 parallel zu g_1 ist, müssen beide Geraden die gleiche Steigung bzw. parallele Normalenvektoren haben $\Rightarrow$ g_2 zu $2x_1 + 3x_2 = 0$.

(c) Wenn g_2 und g_3 senkrecht aufeinander stehen, dann auch ihre Normalenvektoren $\vec{n}_2 = (a_{21}, a_{22})$ und $\vec{n}_3 = (a_{31}, a_{32})$, d.h. dass das Skalarprodukt $\vec{n}_2 \cdot \vec{n}_3$ verschwinden muss $\Rightarrow$ $a_{21}a_{31} + a_{22}a_{32} = 0$. Da $\vec{n}_2 = (2,3) \Rightarrow 2a_{31} + 3a_{32} = 0$. Dies wird (z.B.) von $\vec{n}_3 = (-3,2)$ erfüllt (natürlich auch von allen skalaren Vielfachen davon) $\Rightarrow$ g_3 zu $-3x_1+2x_2 = b_3$. Da g_3 ebenfalls durch $(0,0)$ gehen soll, ist $b_3 = 0 \Rightarrow g_3$ zu $-3x_1+2x_2 = 0$

(d) Der Schnittpunkt von $g_1 : 2x_1 + 3x_2 = 4$ und $g_3 : -3x_1 + 2x_2 = 0$ ergibt sich über $(3 \cdot g_1 + 2 \cdot g_2) \Rightarrow 13x_2 = 12 \Rightarrow x_2 = \frac{12}{13} \Rightarrow x_1 = \frac{8}{13}$ zu $S(\frac{8}{13}, \frac{12}{13})$. Dieser Punkt hat vom Ursprung den Abstand

$$s = \sqrt{\left(\frac{8}{13}\right)^2 + \left(\frac{12}{13}\right)^2} = \frac{1}{13}\sqrt{8^2 + 12^2} = \frac{1}{13}[(2 \cdot 4)^2 + (3 \cdot 4)^2]^{\frac{1}{2}} = \frac{4}{13}\sqrt{13}.$$

Bemerkung: Alternativ kann man den Abstand einer Gerade vom Ursprung auch durch Normierung des Normalenvektors bestimmen. Für $g_1 : \vec{n}_1 \cdot \vec{x} = (2,3) \cdot \vec{x} = 4$ ist $|\vec{n}| = \sqrt{13} \Rightarrow$ der Abstand zu $s = 4/|\vec{n}| = 4/\sqrt{13} = \frac{4}{13}\sqrt{13}$ wie zuvor.

---

3. (Ebenen) Gegeben sei die Ebene e_1 in $\mathbf{R}^3$, die die von der x_1–Achse und der x_2–Achse aufgespannte Ebene in der Geraden $x_1 + x_2 = 2$, die von der x_1–Achse und der x_3–Achse aufgespannte Ebene in der Geraden $x_1 + x_3 = 2$ und die von der x_2–Achse und der x_3–Achse aufgespannte Ebene in der Geraden $x_2 + x_3 = 2$ schneidet.

(a) Finden sie eine Gleichung in Normalform für e_1.

Weiter seien die Ebenen $e_2: \ -2x_1 + x_2 - x_3 = 4$ und $e_3: \ x_1 - x_3 = 1$ gegeben.

(b) Bestimmen sie den Schnittpunkt der drei Ebenen mittels Gaußelimination. Sollten sie in (a) keine Lösung gefunden haben, so verwenden sie für $e_1: \ x_1 + x_2 + x_3 = 2$.

Lösung:

(a) Die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen ergeben sich aus

$x_1 + x_2 = 2 \overset{x_2=0}{\Longrightarrow} x_1 = 2$ sowie $\overset{x_1=0}{\Longrightarrow} x_2 = 2$ und aus $x_1 + x_3 = 2 \overset{x_1=0}{\Longrightarrow} x_3 = 2$

zu $P_1(2,0,0)$, $P_2(0,2,0)$ und $P_3(0,0,2)$.

Diese Punkte kann man nun in $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b$ einsetzen $\Rightarrow$

$P_1: 2a_1 = b \ \Rightarrow \ a_1 = b/2$

$P_2: 2a_2 = b \ \Rightarrow \ a_2 = b/2$

$P_3: 2a_3 = b \ \Rightarrow \ a_3 = b/2 \Rightarrow$

zusammen also $\frac{b}{2}(x_1 + x_2 + x_3) = b \overset{\cdot 2/b}{\Longrightarrow} e_1: \quad x_1 + x_2 + x_3 = 2$.

(b) Zu lösen ist das lineare Gleichungssystem

$$
\begin{array}{lrcrcrcl}
\text{(I)} & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\
\text{(II)} & -2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 4 \\
\text{(III)} & x_1 & & & - & x_3 & = & 1
\end{array}
$$

Dies ist äquivalent zu

$$
\begin{array}{lrcrcrcll}
\text{(I}') & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 2 & \\
\text{(II}') & & & 3x_2 & + & x_3 & = & 8 & \qquad (\text{II}' \ = \ 2 \cdot \text{I} + \text{II}) \\
\text{(III}') & & & x_2 & + & 2x_3 & = & 1 & \qquad (\text{III}' \ = \ \text{I} - \text{III})
\end{array}
$$

Dies ist wiederum äquivalent zu

$$
\begin{array}{lrcrcrcll}
\text{(I}'') & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 2 & \\
\text{(II}'') & & & 3x_2 & + & x_3 & = & 8 & \\
\text{(III}'') & & & & & 5x_3 & = & -5 & \qquad (\text{III}'' \ = \ 3 \cdot \text{III}' - \text{II}')
\end{array}
$$

Aus (III") folgt $x_3 = -1$, damit in (II") folgt $x_2 = 3$ und damit aus (I) letztlich $x_1 = 0$. Zusammen ergibt sich der Schnittpunkt zu $S(0,3,-1)$.

---

4. (Lineare Gleichungen) Gegeben sei das homogene lineare Gleichungssystem

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \ , \\
4x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 0 \ , \\
7x_1 + 8x_2 + 9x_3 &= 0 \ .
\end{aligned}
$$

(a) Zeigen sie, dass dieses System keine Punktlösung, sondern eine Punktmenge als Lösung hat.

(b) Bestimmen sie die Lösungsmenge.

Lösung:

(a) Das Gleichungssystem

$$\begin{array}{lrcrcrcl} \text{(I)} & x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \\ \text{(II)} & 4x_1 & + & 5x_2 & + & 6x_3 & = & 0 \\ \text{(III)} & 7x_1 & + & 8x_2 & + & 9x_3 & = & 0 \end{array}$$

ist äquivalent zu

$$\begin{array}{lrcrcrcl} \text{(I}') & x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \\ \text{(II}') & & & 3x_2 & + & 6x_3 & = & 0 \qquad (\text{II}' = 4\cdot\text{I} - \text{II}) \\ \text{(III}') & & & 6x_2 & + & 12x_3 & = & 0 \qquad (\text{III}' = 7\cdot\text{I} - \text{III}) \end{array}$$

Die letzten beiden Gleichungen sind redundant, denn

$$\text{(III}'') \qquad 0 = 0 \qquad (\text{III}'' = 2\cdot\text{II}' - \text{III}')$$

daher hat das Gleichungssystem keine Punktlösung, sondern eine Punktmenge (hier eine Gerade) als Lösung.

(b) Eine der Variablen kann als freier Parameter gewählt werden, z.B.

$$x_3 =: t \overset{\text{aus II'}}{\Longrightarrow} x_2 = -2t \overset{\text{aus I}}{\Longrightarrow} x_1 = t \Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} t\,.$$

A.16 Aufgaben zu Kapitel 16

1. (Rechenregeln für Matrizen) Gegeben seien die Matrizen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Berechnen sie (falls definiert):

(a) $\mathbf{A}^T$, $\mathbf{B}^T$, $\mathbf{C}^T$, $\mathbf{D}^T$. Welche der Matrizen sind symmetrisch?

(b) $\mathbf{A}+\mathbf{B}$, $\mathbf{B}-2\mathbf{A}$, $\mathbf{A}+\mathbf{C}$, $\mathbf{C}+\mathbf{D}$, $3\mathbf{C}^T+\mathbf{D}$.

(c) $\mathbf{AB}-\mathbf{BA}$, $\mathbf{AC}$, $\mathbf{CA}$, $\mathbf{C}^T\mathbf{A}$, $\mathbf{CD}$, $\mathbf{DC}$, $\mathbf{CD}-\mathbf{DC}$.

Lösung:

(a) $\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \neq \mathbf{A}$ $\qquad$ $\mathbf{B}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -7 \end{pmatrix} = \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{B}$ ist symmetrisch

$$\mathbf{C}^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \mathbf{C} \qquad \mathbf{D}^T = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \neq \mathbf{D}$$

(b) $\mathbf{A}+\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2+1 & 3+3 \\ 1+3 & -2-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & -9 \end{pmatrix}$

$\mathbf{B}-2\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1-2\cdot 2 & 3-2\cdot 3 \\ 3-2\cdot 1 & -7-2\cdot(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

$\mathbf{A}+\mathbf{C}$ ist nicht definiert, da $\mathbf{A}$ eine 2×2 und $\mathbf{C}$ eine 2×3 Matrix ist.

$\mathbf{C}+\mathbf{D}$ ist ebenfalls nicht definiert.

$$3\mathbf{C}^T+\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ -3 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 10 \\ -5 & 5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$$

(c)

$$\begin{aligned} \mathbf{AB} &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1+3\cdot 3 & 2\cdot 3+3\cdot(-7) \\ 1\cdot 1+(-2)\cdot 3 & 1\cdot 3+(-2)\cdot -7 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 11 & -15 \\ -5 & 17 \end{pmatrix} \\ \mathbf{BA} &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -1 & 23 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \mathbf{AB}-\mathbf{BA} &= \begin{pmatrix} 11 & -15 \\ -5 & 17 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -1 & 23 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -12 \\ -4 & -6 \end{pmatrix} \\ \mathbf{AC} &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 1 & 3 \\ -4 & -3 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\mathbf{C}\cdot\mathbf{A}$ ist nicht definiert, da die Zahl der Spalten von $\mathbf{C}$ mit der Zahl der Zeilen von $\mathbf{A}$ nicht übereinstimmt.

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^T\mathbf{A} &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -1 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \\ \mathbf{CD} &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 11 & 8 \end{pmatrix} \\ \mathbf{DC} &= \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -3 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 11 & 2 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\mathbf{CD}-\mathbf{DC}$ ist nicht definiert, da $\mathbf{CD}$ eine 2×2 und $\mathbf{DC}$ eine 3×3 Matrix ist.

---

2. (Matrizen) Eine Matrix $\mathbf{P}$, die die Gleichung $\mathbf{P}=\mathbf{P}\cdot\mathbf{P}=\mathbf{P}^2$ erfüllt, wird Projektionsmatrix genannt. (Können sie sich vorstellen, warum man Matrizen mit dieser Eigenschaft so nennt?)

(a) Welche der folgenden Matrizen sind Projektionsmatrizen?

(i) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (ii) $2\mathbf{A}$, (iii) $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, (iv) $\mathbf{0}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, (v) $\mathbf{E}_n$.

(b) Für welche λ, μ aus $\mathbf{R}$ ist $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ eine Projektionsmatrix?

(c) Für welches a aus $\mathbf{R}$ ist $\begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}$ eine Projektionsmatrix?

(d) Veranschaulichen sie sich die Wirkung der in (b) und (c) gefundenen Matrizen, indem sie sie mit dem Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ multiplizieren.

Lösung:

(a) $\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{A}$ $\Rightarrow \mathbf{A}$ ist Projektionsmatrix

$(2\mathbf{A})^2 = 4\mathbf{A}^2 = 4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2\mathbf{A}$ $\Rightarrow 2\mathbf{A}$ ist keine Projektionsmatrix

$\mathbf{B}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \neq \mathbf{B}$ $\Rightarrow \mathbf{B}$ ist keine Projektionsmatrix

$\mathbf{0}_3^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}_3$ $\Rightarrow \mathbf{0}_3$ ist Projektionsmatix

$\mathbf{E}_n^2 = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{E}_n$ $\Rightarrow$ $\mathbf{E}_n$ ist für alle $n \in \mathbf{N}$ Projektionsmatrix

(b) $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 \\ 0 & \mu^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ (I) $\lambda^2 = \lambda \Rightarrow \lambda = 0$ oder 1 (II) $\mu^2 = \mu \Rightarrow \mu = 0$ oder $1 \Rightarrow$

Es gibt vier Lösungen: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(c) $\begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\left[a \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right]^2 = 2a^2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow 2a^2 = a \Rightarrow$

Für $a = 0$ und für $a = 1/2$ hat man Projektionsmatrizen.

(d) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ Projektion auf Ursprung

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ Identität

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ Projektion auf x_1–Achse

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix}$ Projektion auf x_2–Achse

$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$ Projektion auf die Winkelhalbierende

---

3. (Matrizen) In Kapitel 11 haben Sie gelernt, dass man sich die Multiplikation einer komplexen Zahl mit einer weiteren komplexen Zahl als Drehstreckung veranschaulichen kann (siehe Abbildung 11.2).

Versuchen sie nun eine Matrix zu finden, die die Multiplikation mit einer komplexen Zahl $z_1 = |z_1| \exp[\mathrm{i}\arg(z_1)]$ in der Gaußschen Zahlenebene beschreibt.

Genauer: Mit welcher Matrix $\mathbf{Z}_1$ müssen sie die komplexe Zahl $z_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ multiplizieren, um $z_3 = z_1 z_2 = \mathbf{Z}_1 z_2 = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix}$ zu erhalten? Dabei bezeichnen x_i und y_i jeweils den Real- und Imaginärteil der komplexen Zahl z_i.

1. Lösung: In kartesischen Koordinaten ist

$$z_3 = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = z_1 \cdot z_2 = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}[(x_1 + \mathrm{i}y_1)(x_2 + \mathrm{i}y_2)] \\ \mathrm{Im}[(x_1 + \mathrm{i}y_1)(x_2 + \mathrm{i}y_2)] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1x_2 - y_1y_2 \\ y_1x_2 + x_1y_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}_{=:\mathbf{Z}_1} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_2 + by_2 \\ cx_2 + \mathrm{d}y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1x_2 - y_1y_2 \\ y_1x_2 + x_1y_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{Z}_1 = \begin{pmatrix} x_1 & -y_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix}$$

2. Lösung: In Polarkoordinaten ist $z_1 = r_1 \cdot \exp(\mathrm{i}\varphi_1)$ mit $r_1 = |z_1|$ und $\varphi_1 = \arg(z_1)$. Eine Multuiplikation mit z_1 entspricht einer Drehung um φ_1 mit anschließender Streckung/ Stauchung um den Faktor $r_1 \Rightarrow \mathbf{Z}_1 = r_1 \begin{pmatrix} \cos(\varphi_1) & -\sin(\varphi_1) \\ \sin(\varphi_1) & \cos(\varphi_1) \end{pmatrix}$.

---

4. (Matrizen) **Funktionen von Matrizen:** Funktionen, die als Potenzreihe dargestellt werden können ($f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$), lassen sich auch für quadratische Matrizen als Argument definieren, indem man einfach die Matrix anstelle von x in die Potenzreihe einsetzt. (Die Beziehung $x^0 = 1$ verallgemeinert sich zu $\mathbf{A}^0 = \mathbf{E}_n$ für $n \times n$ Matrizen $\mathbf{A}$.)

Gegeben seien die Matrizen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, mit $\lambda_{1,2} \in \mathbf{R}$ und $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & \pi/3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Berechnen sie $f(\mathbf{A})$, $f(\mathbf{B})$ und $f(\mathbf{C})$ für (i) $f(x) = x^2$ und (ii) $f(x) = x - x^3$.

(b) Berechnen sie für $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ und $\mathbf{C}$ die Exponentialfunktion, den Sinus und den Cosinus.

(c) Berechnen sie $\exp \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}$.

Lösung:

(a) Es ist $\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 1^2 & 0 \\ 0 & 2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B}^2 = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{C}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$\Rightarrow \mathbf{A} - \mathbf{A}^3 = \mathbf{A}(\mathbf{E}_2 - \mathbf{A}^2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$, $\quad \mathbf{B} - \mathbf{B}^3 = \begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda_1^3 & 0 \\ 0 & \lambda_2 - \lambda_2^3 \end{pmatrix}$

und $\mathbf{C} - \mathbf{C}^3 = \mathbf{C}$.

(b) Mit $\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$ und $\mathbf{A}^k = \begin{pmatrix} 1^k & 0 \\ 0 & 2^k \end{pmatrix}$ (da $\mathbf{A}$ Diagonalform hat) folgt

$$\exp(\mathbf{A}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \begin{pmatrix} 1^k & 0 \\ 0 & 2^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1^k}{k!} & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp(1) & 0 \\ 0 & \exp(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^2 \end{pmatrix}.$$

Genauso erhält man aus $\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)} x^{2k+1}$

$$\begin{aligned} \sin(\mathbf{A}) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \mathbf{A}^{(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \begin{pmatrix} 1^{2k+1} & 0 \\ 0 & 2^{2k+1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} 1^{2k+1} & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} 2^{2k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(1) & 0 \\ 0 & \sin(2) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Analog folgt $\cos(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} \cos(1) & 0 \\ 0 & \cos(2) \end{pmatrix}$.

Und genauso:

$$\exp(\mathbf{B}) = \begin{pmatrix} \exp(\lambda_1) & 0 \\ 0 & \exp(\lambda_2) \end{pmatrix}, \quad \sin(\mathbf{B}) = \begin{pmatrix} \sin(\lambda_1) & 0 \\ 0 & \sin(\lambda_2) \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$\cos(\mathbf{B}) = \begin{pmatrix} \cos(\lambda_1) & 0 \\ 0 & \cos(\lambda_2) \end{pmatrix}.$$

Anders ist die Situation bei $\mathbf{C}$, denn hier ist $\mathbf{C}^k = \mathbf{0}$ ab $k \geq 2 \Rightarrow$ in der Potenzreihe sind nur die Konstanten und die linearen Terme von 0 verschieden $\Rightarrow$

$$\exp(\mathbf{C}) = \mathbf{E}_2 + \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\pi}{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sin(\mathbf{C}) = \mathbf{C} \text{ und } \cos(\mathbf{C}) = \mathbf{E}_2 .$$

(c) Sei $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\mathbf{M}^2 = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{i}^2 & 0 \\ 0 & \mathrm{i}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Weiter ist $\mathbf{M}^3 = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (-1) = -\mathbf{M}$ und $\mathbf{M}^4 = (\mathbf{M}^2)^2 = \mathbf{E}_2 \Rightarrow \mathbf{M}^5 = \mathbf{M} \cdot \mathbf{M}^4 = \mathbf{M}$ und $\mathbf{M}^6 = \mathbf{M}^2$ und $\mathbf{M}^7 = \mathbf{M}^3$ etc.

Zusammen:

$(\mathbf{M}, \mathbf{M}^2, \mathbf{M}^3, \mathbf{M}^4, \mathbf{M}^5, \mathbf{M}^6, \mathbf{M}^7, \mathbf{M}^8, \ldots) = (\mathbf{M}, -\mathbf{E}_2, -\mathbf{M}, \mathbf{E}_2, \mathbf{M}, -\mathbf{E}2, -\mathbf{M}, \mathbf{E}_2, \ldots)$

$\Rightarrow$ die Potenzen von $\mathbf{M}$ durchlaufen einen Viererzyklus:

$\mathbf{M} \to -\mathbf{E}_2 \to -\mathbf{M} \to \mathbf{E}_2 \to \mathbf{M} \to \ldots \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \exp(\mathbf{M}) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{M}^k}{k!} \\ &= \mathbf{E}_2 + \mathbf{M} + \frac{1}{2!}\mathbf{M}^2 + \frac{1}{3!}\mathbf{M}^3 + \frac{1}{4!}\mathbf{M}^4 + \frac{1}{5!}\mathbf{M}^5 + \frac{1}{6!}\mathbf{M}^6 \ldots \\ &= \mathbf{E}_2 + \mathbf{M} - \frac{1}{2!}\mathbf{E}_2 - \frac{1}{3!}\mathbf{M} + \frac{1}{4!}\mathbf{E}_2 + \frac{1}{5!}\mathbf{M} - \frac{1}{6!}\mathbf{E}_2 - \frac{1}{7!}\mathbf{M} + \frac{1}{8!}\mathbf{E}_2 \\ &= \mathbf{E}_2 \cdot (1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{6!} + \frac{1}{8!} \mp \ldots) + \mathbf{M}(1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \frac{1}{9!} \mp \ldots) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\exp \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{E}_2 \cdot \cos(1) + \mathbf{M} \cdot \sin(1) = \begin{pmatrix} \cos(1) & i\sin(1) \\ i\sin(1) & \cos(1) \end{pmatrix} .$$

---

5. (Matrizen) **Drehungen:** Aus der Vorlesung kennen sie die Drehmatrizen

$$\mathbf{D}_1(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{D}_2(\beta) = \begin{pmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{pmatrix}$$

für Drehungen um die x_1 beziehungsweise x_2 Achse.

(a) Berechnen sie $\mathbf{D}_{21}(\beta, \alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{D}_2(\beta) \cdot \mathbf{D}_1(\alpha)$ und $\mathbf{D}_{12}(\alpha, \beta) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{D}_1(\alpha) \cdot \mathbf{D}_2(\beta)$ für $\alpha = \pi$ und $\beta = \pi/2$. Sie bestimmen somit die Matrizen der Abbildungen, die sie erhalten, wenn sie zum einen zuerst um die x_1 Achse um den Winkel π und dann um die x_2 Achse um den Winkel $\pi/2$ drehen ($\mathbf{D}_{21}$) und zum anderen wenn Sie die Reihenfolge der Drehungen vertauschen ($\mathbf{D}_{12}$).

(b) Berechnen sie $\mathbf{D}_{12}(\alpha, \beta)$ und $\mathbf{D}_{21}(\beta, \alpha)$ für $\alpha = \pi/3$ und $\beta = \pi/6$.

(c) Berechnen sie $\mathbf{D}_{12}(\alpha, \beta)$ und $\mathbf{D}_{21}(\beta, \alpha)$ für beliebige α und β. Für welche α, β sind die beiden Matrizen gleich? Beschränken Sie sich zur Beantwortung der zweiten Frage der Einfachheit halber auf das Interval $\alpha, \beta \in \{0, \pi\}$.

Lösung:

(a) Für $\alpha = \pi$ und $\beta = \frac{\pi}{2}$ ist $\mathbf{D}_1(\pi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{D}_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\mathbf{D}_{21}\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) = \mathbf{D}_2\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \mathbf{D}_1(\pi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D}_{12}\left(\pi, \frac{\pi}{2}\right) = \mathbf{D}_1(\pi) \cdot \mathbf{D}_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \mathbf{D}_{12} \neq \mathbf{D}_{21}$ Reihenfolge der Drehungen vertauscht $\Rightarrow$ Abbildungen nicht identisch.

(b) Es ist $\sin(\frac{\pi}{3}) = \cos(\frac{\pi}{6}) = \sqrt{3}/2$, sowie $\sin(\frac{\pi}{6}) = \cos(\frac{\pi}{3}) = 1/2 \Rightarrow$

$$\mathbf{D}_{12}(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \\ \sqrt{3}/4 & 1/2 & -3/4 \\ -1/4 & \sqrt{3}/2 & \sqrt{3}/4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D}_{21}(\beta, \alpha) = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & \sqrt{3}/4 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ -1/2 & 3/4 & \sqrt{3}/4 \end{pmatrix}$$

(c) $\mathbf{D}_{12} = \mathbf{D}_1(\alpha) \cdot \mathbf{D}_2(\beta) = \begin{pmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ \sin(\alpha)\sin(\beta) & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha)\cos(\beta) \\ -\cos(\alpha)\sin(\beta) & \sin(\alpha) & \cos(\alpha)\cos(\beta) \end{pmatrix}$

$$\mathbf{D}_{21} = \mathbf{D}_2(\beta) \cdot \mathbf{D}_1(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\beta) & \sin(\beta)\sin(\alpha) & \sin(\beta)\cos(\alpha) \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ -\sin(\beta) & \cos(\beta)\sin(\alpha) & \cos(\alpha)\cos(\beta) \end{pmatrix}$$

Beide Matrizen sind gleich, wenn sie komponentenweise übereinstimmen $\Rightarrow$

(I) $\sin(\beta) \cdot \sin(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha \ \vee \ \beta \in \{0, \pi\}$

(II) $\sin(\beta)\cos(\alpha) = \sin(\beta) \Rightarrow$ für $\sin(\beta) \neq 0 \Rightarrow \cos(\alpha) = 1 \Rightarrow \alpha = 0$

und für $\sin(\beta) = 0 \Rightarrow \alpha$ beliebig

(III) $\sin(\alpha)\cos(\beta) = \sin(\alpha) \Rightarrow$ für $\sin(\alpha) \neq 0 \Rightarrow \beta = 0$

und für $\sin(\alpha) = 0, \Rightarrow \beta$ beliebig

Zusammen also:
1. $\alpha = 0$, β beliebig 2. $\beta = 0$, α beliebig; In diesen beiden Fällen ist ein Winkel Null $\Rightarrow$ eigentlich wird nur einmal gedreht.

3. $\alpha = \beta = \pi$ (für $\alpha = \beta = \pi$ werden $\mathbf{D}_1$ und $\mathbf{D}_2$ Diagonalmatrizen. Diagonalmatrizen sind bei der Multiplikation kommukativ).

6. (Matrizen) **Skalarprodukt:** Gegeben seien die Vektoren

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \ , \ \vec{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \ \vec{z} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{k} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \\ 1-\mathrm{i} \end{pmatrix} .$$

(a) Berechnen sie die Länge aller vier Vektoren.

(b) Welchen Winkel schließen jeweils $\vec{x}$ und $\vec{y}$, $\vec{y}$ und $\vec{z}$ sowie $\vec{x}$ und $\vec{z}$ ein?

(c) Es gilt $< \vec{x}, \vec{y} >= |\vec{x}||\vec{y}| \cos(\theta(\vec{x}, \vec{y}))$. Dabei bezeichnet $\theta(\vec{x}, \vec{y})$ den von $\vec{x}$ und $\vec{y}$ eingeschlossenen Winkel. Es bezeichne weiterhin $\vec{a}_{\vec{b}}$ die Projektion von $\vec{a}$ auf $\vec{b}$ mit der Länge $|\vec{a}_{\vec{b}}| = |\vec{a}| \cos(\alpha)$.
Wie groß ist die Komponente von $\vec{x}$ in Richtung von $\vec{y}$ und in Richtung von $\vec{z}$?

Lösung:

(a) Die Länge eines Vektors mit reellen Koeffizienten in m Dimensionen ist:

$$|\vec{x}| = (< \vec{x}, \vec{x} >)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} x_i^2} \qquad x_i \in \mathbf{R}$$

$|\vec{x}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14} \approx 3.75$

$|\vec{y}| = \sqrt{4 + 1 + 0} = \sqrt{5}$

$|\vec{z}| = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$

doch bei komplexen Komponenten muss der erste Faktor noch komplex konjugiert werden:

$$|\vec{x}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \bar{x}_i x_i} \qquad x_i \in \mathbf{C}$$

$$|\vec{k}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} \bar{k}_i k_i} = \sqrt{1 \cdot 1 + (-\mathrm{i}) \cdot \mathrm{i} + (1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})} = \sqrt{1+1+2} = \sqrt{4} = 2;$$

(b) Winkel zwischen Vektoren: $< \vec{y}, \vec{x} >= |\vec{y}||\vec{x}| \cos(\alpha) \Rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{< \vec{y}, \vec{x} >}{|\vec{y}||\vec{x}|}\right)$

Winkel zwischen $\vec{x}$ und $\vec{y}$: $\alpha = \arccos\left(\frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 0}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{5}}\right) = \arccos\left(\frac{4}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{5}}\right) \approx 61.4^\circ$

Winkel zwischen $\vec{y}$ und $\vec{z}$: $\beta = \arccos\left(\frac{2 \cdot 4 + 0 + 0}{5 \cdot \sqrt{5}}\right) = \arccos\left(\frac{2 \cdot 4}{5 \cdot \sqrt{5}}\right) \approx 44.3^\circ$

Winkel zwischen $\vec{x}$ und $\vec{z}$: $\gamma = \arccos\left(\frac{1 \cdot 4 - 3 \cdot 3}{5\sqrt{14}}\right) = \arccos\left(\frac{-1}{\sqrt{14}}\right) \approx 105.5^\circ$

(c) $|\vec{x}_{\vec{y}}| = |\vec{x}| \cdot \cos(\alpha) = \sqrt{14} \cdot \cos\left[\arccos\left(\frac{4}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{5}}\right)\right] = 4/\sqrt{5}$

$$|\vec{x}_{\vec{z}}| = |\vec{x}| \cdot \cos(\gamma) = \sqrt{14} \cdot \cos\left[\arccos\left(\frac{-1}{\sqrt{14}}\right)\right] = -1$$

---

7. (Matrizen) **Adjungierte Matrix**

(a) Einleitendes Beispiel: Berechnen sie für

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \ \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

die Skalarprodukte $< \vec{x}, \mathbf{A}\vec{y} >$, $< \vec{x}, \mathbf{A}^T\vec{y} >$, $< \mathbf{A}\vec{x}, \vec{y} >$, $< \mathbf{A}^T\vec{x}, \vec{y} >$, $< \vec{y}, \mathbf{A}\vec{x} >$, $< \vec{y}, \mathbf{A}^T\vec{x} >$, $< \mathbf{A}\vec{y}, \vec{x} >$ und $< \mathbf{A}^T\vec{y}, \vec{x} >$. Welche dieser Ausdrücke sind jeweils gleich?

Eine $n \times n$ Matrix $\mathbf{A}^\dagger$ heißt zu $\mathbf{A}$ **adjungiert**, falls $< \mathbf{A}^\dagger\vec{x}, \vec{y} >=< \vec{x}, \mathbf{A}\vec{y} >$ für alle $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{R}^n$ gilt. Sind die beiden Matrizen gleich, also $\mathbf{A} = \mathbf{A}^\dagger$, so nennt man $\mathbf{A}$ selbstadjungiert.

(b) Zeigen sie, dass für reelle $\mathbf{A}$ gilt: $\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{A}^T$.

(c) Wie erhält man $\mathbf{A}^\dagger$ aus $\mathbf{A}$, falls $\mathbf{A}$ komplexe Komponenten enthält?

Lösung:

(a) Für $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ist $\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Außerdem ist das Skalarprodukt im Reellen symmetrisch (siehe Vorlesung) $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
< \mathbf{A}\vec{y}, \vec{x} > &= < \vec{x}, \mathbf{A}\vec{y} >= \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 10 \end{pmatrix} = -7 + 20 = 13 \\
< \mathbf{A}^T\vec{y}, \vec{x} > &= < \vec{x}, \mathbf{A}^T\vec{y} >= \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 11 \\ 7 \end{pmatrix} = -11 + 14 = 3 \\
< \vec{y}, \mathbf{A}\vec{x} > &= < \mathbf{A}\vec{x}, \vec{y} >= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 3 \\
< \vec{y}, \mathbf{A}^T\vec{x} > &= < \mathbf{A}^T\vec{x}, \vec{y} >= \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 9 + 4 = 13
\end{aligned}$$

Man erkennt, dass außer der bereits bekannten Symmetrie des Skalarprodukts noch $< \vec{x}, \mathbf{A}\vec{y} >=< \mathbf{A}^T\vec{x}, \vec{y} >$ und $< \vec{x}, \mathbf{A}^T\vec{y} >=< \mathbf{A}\vec{x}, \vec{y} >$ gilt. Das dies kein Zufall ist, soll nun gezeigt werden.

(b) Zunächst noch eine neue Notation, um den Unterschied zwischen Zeilen- und Spaltenvektoren besser zum Ausdruck bringen zu können:

Es seien $|\vec{x} >= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ und $|\vec{y} >= \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ Spaltenvektoren, dann sollen mit $< \vec{x}| = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ und $< \vec{y}| = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ die zugehörigen Zeilenvektoren bezeichnet werden. Es gilt also $< \vec{x}| = (|\vec{x} >)^T$, d.h. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}^T = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Damit kann das

Skalarprodukt wie eine ganz normale Matrixmultiplikation angesehen werden, denn es gilt

$$\begin{aligned} < \vec{x}, \vec{y} > &= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = (\text{Zeilenvektor } \vec{x}) \cdot (\text{Spaltenvektor } \vec{y}) \\ &= (1 \times n \text{ Matrix } \mathbf{X}) \cdot (n \times 1 \text{ Matrix } \mathbf{Y}) = (\text{Skalar}) \,. \end{aligned}$$

Nun ist aber wegen $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T$ auch

$$< \mathbf{A} \cdot \vec{x}| = (|\mathbf{A} \cdot \vec{x} >)^T = |\vec{x} >^T \cdot \mathbf{A}^T =< \vec{x}| \cdot \mathbf{A}^T$$

und somit wegen der Assoziativität der Matrixmultiplikation

$$< \mathbf{A} \cdot \vec{x}, \vec{y} >=< \vec{x}| \cdot \mathbf{A}^T \cdot |\vec{y} >=< \vec{x}, \mathbf{A}^T \vec{y} >$$

$\Rightarrow \mathbf{A}^T$ und $\mathbf{A}$ sind adjungiert zueinander (q.e.d.).

(c) Was ändert sich nun, falls die Vektoren und Matrizen keine reellen sondern komplexe Komponenten haben? Dann gilt $< \vec{x}, \vec{y} >= \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i y_i = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} =$ $\bar{x}_1 y_1 + \bar{x}_2 y_2 + \ldots + \bar{x}_n y_n$. Man muss nun also $< \vec{x}|$ aus $|\vec{x} >$ durch Transponieren und komplex Konjugieren bilden, d.h. $< \vec{x}| = \overline{|\vec{x} >^T}$ um das Skalarprodukt wieder als Matrixprodukt interpretieren zu können. Dann folgt wie in (b) und wegen $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

$$< \mathbf{A}\vec{x}, \vec{y} >= \overline{|\mathbf{A}\vec{x} >^T} \cdot |\vec{y} >= \overline{|\vec{x} >^T \cdot \mathbf{A}^T} \cdot |\vec{y} >= \overline{|\vec{x} >^T} \cdot \overline{\mathbf{A}^T} \cdot |\vec{y} >=< \vec{x}, \mathbf{A}^* \vec{y} > ,$$

wobei $\mathbf{A}^* := \overline{\mathbf{A}^T}$ eingeführt wurde. Im Komplexen ist also $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^\dagger$ die zu $\mathbf{A}$ adjungierte Matrix.

Bemerkung: Eine Matrix, für die $\mathbf{A} = \mathbf{A}^*$ gilt, heißt auch hermitisch.

A.17 Aufgaben zu Kapitel 17

1. (Determinanten) Gegeben seien die Matrizen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Berechnen sie (falls definiert) die Determinaten der Matrizen $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{A}^T$, $\frac{\mathbf{B}}{4}$, $\mathbf{AB}$, $\mathbf{C}^T\mathbf{D}$, $\mathbf{CD}$, $(\mathbf{DC})^2$.

Lösung:

$\det(\mathbf{A}) = 2 \cdot (-2) - 3 \cdot 1 = -7$

$\det(\mathbf{B}) = 1 \cdot (-7) - 3 \cdot 3 = -16$

$\det(\mathbf{C})$ und $\det(\mathbf{D})$ nicht definiert, da keine $n \times n$ Matrizen.

$\det(\mathbf{A}^T) = \det(\mathbf{A}) = -7$ siehe Rechenregeln, Gleichung (17.12) auf Seite 237.

$$\det\left(\frac{\mathbf{B}}{4}\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \det(\mathbf{B}) = \frac{1}{16} \cdot (-16) = -1 \tag{15.11}$$

$$\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{B}) = -7 \cdot (-16) = 112 \tag{15.13}$$

$\mathbf{C}^T \cdot \mathbf{D}$: Produkt nicht definiert

$\mathbf{C} \cdot \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 11 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(\mathbf{CD}) = 80$ (Multiplikationssatz hier nicht anwendbar, da $\det(\mathbf{C})$ und $\det(\mathbf{D})$ nicht definiert.)

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 11 & -3 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 11 & 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\det[(\mathbf{DC})^2] = \det[(\mathbf{DC}) \cdot (\mathbf{DC})] = [\det(\mathbf{DC})]^2 = \left[\det\begin{pmatrix} 11 & -3 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 11 & 2 & 3 \end{pmatrix}\right]^2$$

$$= [11 \cdot 4 \cdot 3 + (-3) \cdot 2 \cdot 11 + 1 \cdot 2 \cdot 2 - 11 \cdot 4 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot 11 - 3 \cdot 2 \cdot (-3)]^2 = 0$$

---

2. (Determinanten) **Kreuz- und Spatprodukt**

Wie Sie aus der Schule wissen, kann man in drei Dimensionen ein Kreuzprodukt (auch Vektorprodukt oder äußeres Produkt genannt) $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ als Vektor, der senkrecht auf der durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Ebene steht, und dessen Länge $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin(\theta(\vec{a}, \vec{b}))$ die Fläche des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gebildeten Parallelogramms angibt, definieren. Eine Regel, nach der man das Kreuzprodukt berechnen kann, ist

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \det\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \\ &= \det\begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix} \vec{e}_1 - \det\begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{pmatrix} \vec{e}_2 + \det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \vec{e}_3 \ . \end{aligned}$$

Dabei bezeichnen die $\vec{e}_i$ die Einheitsvektoren im kartesischen System, d.h.

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

(a) Berechnen sie $\vec{x} \times \vec{y}$, $\vec{y} \times \vec{x}$ und $\vec{x} \times \vec{z}$ für die Vektoren $\vec{x}, \vec{y}$ und $\vec{z}$ aus Aufgabe 2.

Durch die Kombination von Vektor- und Skalarprodukt erhält man das sogenannte **Spatprodukt** $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$, welches das Volumen eines durch die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ gebildeten Parallelepipeds angibt. (Ein Parallelepiped ist ein in eine oder mehrere Richtungen schiefer Quader.)

(b) Zeigen sie, dass man das Spatprodukt wie folgt berechnen kann:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} . \tag{1.21}$$

(c) Berechnen sie $\vec{x} \cdot (\vec{y} \times \vec{z})$ für die Vektoren $\vec{x}, \vec{y}$ und $\vec{z}$ aus Aufgabe 6 im Kapitel 16.

Lösung:

(a) Für $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{z} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ ist

$$\begin{aligned} \vec{x} \times \vec{y} &= \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= -3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 6 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Außerdem ist $\vec{x} \times \vec{y} = \det \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} = -\vec{y} \times \vec{x}$

(zwei Zeilen vertauscht ⇒ Determinante ändert Vorzeichen (siehe "Satz (Eigenschaften von Determinanten)" auf Seite 237))

$$\vec{y} \times \vec{x} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \vec{x} \times \vec{z} &= \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= -6 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 15 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 8 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 15 \\ -8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(b) Es ist einerseits

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3$$

und andererseits

$$\begin{aligned}\vec{b}\times\vec{c} &= \det\begin{pmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{pmatrix} = \vec{e}_1 b_2c_3 + \vec{e}_2 b_3c_1 + \vec{e}_3 b_1c_2 - \vec{e}_3 b_2c_3 - \vec{e}_2 b_1c_3 - \vec{e}_1 b_3c_2\\ &= \vec{e}_1(b_2c_3 - b_3c_2) + \vec{e}_2(b_3c_1 - b_1c_3) + \vec{e}_3(b_1c_2 - b_2c_1)\end{aligned}$$

beziehungsweise als Vektor dargestellt: $\vec{b}\times\vec{c} = \begin{pmatrix} b_2c_3 - b_3c_2\\ b_3c_1 - b_1c_3\\ b_1c_2 - b_2c_1\end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) &= \begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_2c_3 - b_3c_2\\ b_3c_1 - b_1c_3\\ b_1c_2 - b_2c_1\end{pmatrix}\\ &= a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1\\ &= \det\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{pmatrix} \qquad \text{(q.e.d.)}\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}\vec{x}\cdot(\vec{y}\times\vec{z}) &= \det\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\\ z_1 & z_2 & z_3\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 0\\ 4 & 0 & -3\end{pmatrix}\\ &= 1\cdot1\cdot(-3) + 0 + 0 - 4\cdot1\cdot3 - 0 + 3\cdot2\cdot2 = -3\end{aligned}$$

---

3. (Determinanten) **Matrixinversion**

Für reguläre Matrizen $\mathbf{A}$ existiert eine inverse Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ und eine Möglichkeit, diese zu berechnen, kennen sie aus der Vorlesung:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}[\mathbf{C}(\mathbf{A})]^T \text{ , d.h. } (\mathbf{A}^{-1})_{ij} = \frac{[\mathbf{C}(\mathbf{A})]_{ji}}{\det(\mathbf{A})} \ . \tag{1.22}$$

Dabei bezeichnet $\mathbf{C}(\mathbf{A})$ die Matrix der Kofaktoren von $\mathbf{A}$. Für deren Komponenten gilt $[\mathbf{C}(\mathbf{A})]_{ij} = (-1)^{i+j}[M(\mathbf{A})]_{ij}$ mit den Minoren $[M(\mathbf{A})]_{ij}$ von $\mathbf{A}$. Der Minor $[M(\mathbf{A})_{ij}]$ bezeichnet die Determinate derjenigen Untermatrix von $\mathbf{A}$, die man durch Streichen der i–ten Zeile und j–ten Spalte aus $\mathbf{A}$ erhält.

(a) Berechnen sie mit Hilfe der Regel (1.22) die inversen Matrizen von $\mathbf{A} = \begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 1\end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ und $\mathbf{D} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 3\end{pmatrix}$. Berechnen sie zur Probe $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}$, $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{B}$ und $\mathbf{D}\mathbf{D}^{-1}$.

(b) Lösen sie $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{p}$ und $\mathbf{D}\vec{x} = \vec{q}$ für $\vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{q} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Lösung:

zu $\mathbf{A}^{-1}$: $\det(\mathbf{A}) = -10$ und die Kofaktoren sind $c_{11} = 1;\ c_{12} = -4;\ c_{21} = -3;\ c_{22} = 2$ zusammen also

$$\mathbf{C}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{C}^T(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{A}^{-1} = -\frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

Probe: $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{4}{10} & -\frac{2}{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{10} + \frac{12}{10} & \frac{6}{10} - \frac{6}{10} \\ -\frac{4}{10} + \frac{4}{10} & \frac{12}{10} - \frac{2}{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2$.

Für $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ist $\det(\mathbf{B}) = ad - bc$ und $c_{11} = d,\ c_{12} = -c,\ c_{21} = -b,\ c_{22} = a$.

$$\Rightarrow \mathbf{C}(\mathbf{B}) = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{C}^T(\mathbf{B}) = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{B}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix}$$

Probe: $\mathbf{B}^{-1}\cdot\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{da}{ad-bc} - \frac{bc}{ad-bc} & \frac{db}{ad-bc} - \frac{bd}{ad-bc} \\ -\frac{ca}{ad-bc} + \frac{ac}{ad-bc} & -\frac{cb}{ad-bc} + \frac{ad}{ad-bc} \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \frac{da-bc}{da-bc} & 0 \\ 0 & \frac{-cb+ad}{da-bc} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Für $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ sind die Kofaktoren

$c_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \cdot (-1)^2 = 3,\ c_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \cdot (-1)^3 = 0,\ c_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \cdot (-1)^4 = 0$

$c_{21} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \cdot (-1)^3 = -2,\ c_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \cdot (-1)^4 = 3,\ c_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \cdot (-1)^5 = 1,$

$c_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot (-1)^4 = -2,\ c_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot (-1)^5 = 0,\ c_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot (-1)^6 = 1.$

$$\mathbf{C}(\mathbf{D}) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{C}^T(\mathbf{D}) = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(\mathbf{D}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 0 + 0 - 0 + 0 + 0 = 3$$

$$\mathbf{D}^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Probe: $\mathbf{D}\mathbf{D}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

zu (b): $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{p} \Leftrightarrow \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\vec{x} = \mathbf{A}^{-1}\vec{p} \Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{4}{10} & -\frac{2}{10} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{10} \\ -\frac{4}{10} \end{pmatrix}$

$$\mathbf{D}\vec{x} = \vec{q} \Leftrightarrow \vec{x} = \mathbf{D}^{-1}q \Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

---

4. (Cramersche Regel)

(a) Bestimmen sie den Schnittpunkt der beiden Geraden $g_1 : \ -x_1 + 2x_2 = 2$ und $g_2 : \ x_1 + 2x_2 = 6$.

(b) Lösen sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 3y + 2x &= z + 1 \\ 3x + 2z &= 8 - 5y \\ -1 + 3z &= x - 2y \end{aligned}$$

mit Hilfe der Cramerschen Regel.

Lösung:

(a) $g_1 : \ -x_1 + 2x_2 = 2$ und $g_2 : \ x_1 + 2x_2 = 6$ sind zusammen von der Form $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$, nämlich

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Nun ist $\det(\mathbf{A}) = -4$, $\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$ und somit $\det(\mathbf{A}_1) = -8 \Rightarrow x_1 = \frac{-8}{-4} = 2$ und aus $\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(\mathbf{A}_2) = -8 \Rightarrow x_2 = \dfrac{-8}{-4} = 2$

Zusammen ergibt sich der Schnittpunkt der beiden Geraden zu $S(2, 2)$.

(b) Zunächst muss das Gleichungssystem auf die Form $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$ gebracht werden:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dann ist $\det(\mathbf{A}) = \det \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 30 - 6 - 6 - 5 - 8 - 27 = -22$ und außerdem

$$\det(\mathbf{A}_1) = \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 8 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 15 + 6 - 16 + 5 - 4 - 72 = -66 \;\Rightarrow\; x = \frac{-66}{-22} = 3\,,$$

$$\det(\mathbf{A}_2) = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 8 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = 48 - 2 - 3 - 8 - 4 - 9 = 22 \;\Rightarrow\; y = \frac{22}{-22} = -1$$

$$\det(\mathbf{A}_3) = \det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 8 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 10 - 24 + 6 + 5 - 32 - 9 = -44 \;\Rightarrow\; z = \frac{-44}{-22} = 2$$

---

5. (Eigenwertproblem) **Eigensysteme**

Gegeben seien die Matrizen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & -4/3 & -4/3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix}$.

(a) Berechnen sie Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ (Normierung nicht vergessen).

(b) Berechnen sie für alle Eigenvektoren $\vec{v}_\lambda$ von $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ das Produkt $\mathbf{A}\vec{v}_\lambda$ bzw. $\mathbf{B}\vec{v}_\lambda$.

Lösung:

Aus der Eigenwertbedingung $\mathbf{A}\vec{v} = \lambda\vec{v}$ folgt $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}_2)\vec{v} = \vec{0}$. Diese Gleichung wird trivialerweise von $\vec{v} = \vec{0}$ erfüllt, dennoch ist der Nullvektor kein Eigenvektor, weil diese nach Voraussetzung verschieden $\vec{0}$ sein müssen. Daraus ergibt sich dann die Bedingung $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}_2) = 0$.

Hier also

$$\begin{aligned} \det\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] &= \det\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right] \\ &= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (1-\lambda)(2-\lambda) - 6 = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 2-2\lambda-\lambda+\lambda^2-6=0 \Leftrightarrow \lambda^2-3\lambda-4=0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda_{1/2}=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+4}=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{3}{2}\pm\frac{5}{2}\ \Rightarrow \lambda_1=-1\ \text{ und } \lambda_2=4\,.$$

Die Eigenvektoren folgen nun aus $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}_2)\vec{x}=\vec{0}$

$$\text{für } \lambda_1: \left[\begin{pmatrix}1&2\\3&2\end{pmatrix}-(-1)\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right]\vec{x}=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}2&2\\3&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x_1=-x_2$$

Normierungsbedingung: $1=\sqrt{x_1^2+x_2^2}=\sqrt{2x_2^2}=\sqrt{2}\,x_2\Rightarrow\vec{v}_{\lambda_1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\+1\end{pmatrix}.$

$$\text{für } \lambda_2: \left[\begin{pmatrix}1&2\\3&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4&0\\0&4\end{pmatrix}\right]\vec{x}=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}-3&2\\3&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x_1=\tfrac{2}{3}x_2$$

Normierung: $1=\sqrt{x_1^2+x_2^2}=\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2x_2^2+x_2^2}=\sqrt{\frac{4}{9}\,x_2^2+x_2^2}=\sqrt{\frac{13}{9}}\,x_2;$

$$\Rightarrow x_2=\left(\frac{13}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}=\frac{3}{\sqrt{13}};\quad x_1=\frac{2}{3}\left(\frac{13}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}=\frac{2}{\sqrt{13}}\Rightarrow\vec{v}_{\lambda_2}=\frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$$

Nun zu $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}0&-\frac{4}{3}&-\frac{4}{3}\\0&2&0\\0&-4&-2\end{pmatrix}$

$$\det(\mathbf{B}-\lambda\mathbf{E}_3)=0\Leftrightarrow\det\left[\begin{pmatrix}0&-\frac{4}{3}&-\frac{4}{3}\\0&2&0\\0&-4&-2\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right]=0\Leftrightarrow$$

$$\det\left[\begin{pmatrix}-\lambda&-\frac{4}{3}&-\frac{4}{3}\\0&2-\lambda&0\\0&-4&-2-\lambda\end{pmatrix}\right]=-\lambda(2-\lambda)(-2-\lambda)=\lambda(2-\lambda)(2+\lambda)$$

$$\Rightarrow \lambda_1=0\,,\ \lambda_2=2 \text{ und } \lambda_3=-2\,.$$

Die Eigenvektoren ergeben sich aus $(\mathbf{B}-\lambda\mathbf{E}_3)\vec{x}=\vec{0}$

$$\text{für } \lambda_1: \begin{pmatrix}0&-\frac{4}{3}&-\frac{4}{3}\\0&2&0\\0&-4&-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Da die erste Spalte der Matrix $\mathbf{B}$ Null ist, wird x_1 bei Multiplikation immer Null; durch Normierung erhält man:

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\vec{v}_{\lambda_1}$$

für λ_2: $\left[\begin{pmatrix} 0 & -\frac{4}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\right] \vec{x} = \vec{0}$

$$\begin{pmatrix} -2 & -\frac{4}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Erste Zeile (I): $-2x_1 - \frac{4}{3}x_2 - \frac{4}{3}x_3 = 0$;

Dritte Zeile (III): $-4x_2 - 4x_3 = 0 \quad | \cdot (-\frac{1}{3})$

III': $\frac{4}{3}x_2 + \frac{4}{3}x_3 = 0$

I+III':$-2x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = -x_3$;

Normierung: $1 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$. Wegen $x_1 = 0 \Rightarrow$

$1 = \sqrt{x_2^2 + x_3^2} = \sqrt{2x_2^2} = \sqrt{2}\, x_2 \Rightarrow x_2 = +\frac{1}{\sqrt{2}}$ und $x_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow$

$$\vec{v}_{\lambda_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

für λ_3: $\left[\begin{pmatrix} 0 & -\frac{4}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\right] \vec{x} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -\frac{4}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow x_2 = 0$ (aus Zeile 2 oder 3 offensichtlich) $\Rightarrow 2x_1 - \frac{4}{3}x_3 = 0 \Leftrightarrow 2x_1 = \frac{4}{3}x_3 \Leftrightarrow x_1 = \frac{4}{6}x_3 = \frac{2}{3}x_3$ (vgl. Aufgabe 3)

$$\Rightarrow x_3 = \left(\frac{13}{9}\right)^{-\frac{1}{2}} \quad x_1 = \frac{2}{3}\left(\frac{13}{9}\right)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow \vec{v}_{\lambda_3} = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(b)

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A}\vec{v}_{\lambda_1} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = (-1) \cdot \vec{v}_{\lambda_1} \\
\mathbf{A}\vec{v}_{\lambda_2} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix} = 4 \cdot \vec{v}_{\lambda_2} \\
\mathbf{B}\vec{v}_{\lambda_1} &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{4}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \vec{v}_{\lambda_1} \\
\mathbf{B}\vec{v}_{\lambda_2} &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{4}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{\sqrt{2}} \\ -\frac{2}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = 2 \cdot \vec{v}_{\lambda_2} \\
\mathbf{B}\vec{v}_{\lambda_3} &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{4}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} = (-2) \cdot \vec{v}_{\lambda_3}
\end{aligned}
$$

---

6. (Determinanten) **Ähnlichkeitstransformationen**

Berechnen sie die Matrizen $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ und $\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{Q}$ mit $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ für die Matizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ aus Aufgabe 3.

Fällt Ihnen etwas auf?

Bemerkung: Zwei Matrizen $\mathbf{A}$ und $\tilde{\mathbf{A}}$ heißen **ähnlich**, falls eine Matrix $\mathbf{P}$ existiert, mit der man $\tilde{\mathbf{A}}$ aus $\mathbf{A}$ via $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ berechnen kann. Anschaulich bedeutet diese Transformation einen Basiswechsel und sie wird als Ähnlichkeitstransformation bezeichnet. Damit sind $\mathbf{A}$ und $\tilde{\mathbf{A}}$ Darstellungen derselben linearen Abbildung – nur bezüglich verschiedener Basen.

Lösung:

Für $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ ist $\mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ und somit $\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 12 & 1 \end{pmatrix}$ und $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\tilde{\mathbf{A}}$ ist also eine Diagonalmatrix, wobei ein Vergleich mit Aufgabe 3 zeigt, dass die Diagonalelemente gleich den Eigenwerten von $\mathbf{A}$ sind, während die Matrix $\mathbf{P}$ aus den dazugehörigen Eigenvektoren besteht.

$$
\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{Q}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow
$$

$$\mathbf{BQ} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{BQ} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Wieder ist $\tilde{\mathbf{B}}$ eine Diagonalmatrix mit den Eigenwerten von $\mathbf{B}$ und $\mathbf{Q}$ die Matrix, deren Spalten aus den zugehörigen Eigenvektoren besteht. Dabei können die Eigenvektoren beliebig skaliert sein.

Bemerkung: Da $\det(\tilde{\mathbf{A}}) = \det(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}) = \det(\mathbf{P}^{-1})\det(\mathbf{A})\det(\mathbf{P})$
$= \det(\mathbf{P}^{-1})\det(\mathbf{P})\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P})\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{E}_2)\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A})$ ändert sich die Determinante unter Ähnlichkeitsformationen nicht.

---

7. (Eigenwertproblem) **Eigenwerte und Eigenvektoren reeller symmetrischer Matrizen**

Beweisen sie, dass reelle symmetrische Matrizen nur reelle Eigenwerte haben können und dass ihre Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal zueinander sind.

Lösung:

Sei also $\mathbf{A}$ reell und symmetrisch, d.h. $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$ und $a_{ij} \in \mathbf{R}$.

Beweis der ersten Behauptung:

Betrachte das Skalarprodukt zweier Vektoren mit beliebigen komplexen Komponenten. Dafür gilt

$$\begin{aligned} < \vec{x}, c\vec{y} > &= \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i(cy_i) = c\sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i, y_i = c < \vec{x}, \vec{y} > \quad \text{und} \\ < c\vec{x}, \vec{y} > &= \sum_{i=1}^{n} (\overline{cx_i})y_i = \sum_{i=1}^{n} (\bar{c}\bar{x}_i)y_i = \bar{c}\sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i y_i = \bar{c} < \vec{x}, \vec{y} > \end{aligned}$$

Sei nun: $\mathbf{A}\vec{x} = \lambda\vec{x} \Rightarrow < \vec{x}, A\vec{x} > = < \vec{x}, \lambda\vec{x} > = \lambda < \vec{x}, \vec{x} > = \lambda\,|\vec{x}|^2$ (Bedingung 1)

Nach Aufgabe 8 von Kapitel 16 sind reelle symmetrische Matrizen selbstadjungiert, d.h. es gilt $< \vec{x}, A\vec{y} > = < A\vec{x}, \vec{y} >$ und deshalb

$< \vec{x}, A\vec{x} > = < A\vec{x}, \vec{x} > = < \lambda\vec{x}, \vec{x} > = \bar{\lambda} < \vec{x}, \vec{x} > = \bar{\lambda}\,|\vec{x}|^2$ (Bedingung 2)

Beide Bedingungen zusammen genommen ergeben $\lambda \cdot |\vec{x}|^2 = \bar{\lambda} \cdot |\vec{x}|^2$. Da $\vec{x}$ Eigenvektor ist, ist $\vec{x} \neq \vec{0} \Rightarrow |\vec{x}| \neq 0 \Rightarrow \lambda = \bar{\lambda} \Rightarrow \lambda \in \mathbf{R}$ (q.e.d.).

Beweis der zweiten Behauptung:

Sei $\mathbf{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}$ und $\mathbf{A}\vec{y} = \mu\vec{y}$ mit $\lambda \neq \mu$.

Dann ist wegen $< \vec{x}, \mathbf{A}\vec{y} > = < \mathbf{A}\vec{x}, \vec{y} >$ (weil $\mathbf{A}$ selbstadjungiert) und

$$\begin{aligned} < \vec{x}, \mathbf{A}\vec{y} > &= < \vec{x}, \mu\vec{y} > = \mu < \vec{x}, \vec{y} > \quad \text{sowie} \\ < \mathbf{A}\vec{x}, \vec{y} > &= < \lambda\vec{x}, \vec{y} > = \lambda < \vec{x}, \vec{y} > \quad \text{(siehe oben)} \end{aligned}$$

also $\lambda < \vec{x}, \vec{y} > = \mu < \vec{x}, \vec{y} >$ und somit $(\lambda - \mu) < \vec{x}, \vec{y} > = 0$. Da aber λ und μ nach Voraussetzung verschieden sind, folgt daraus $< \vec{x}, \vec{y} > = 0$, die Orthogonalität der zugehörigen Eigenvektoren (q.e.d.).

A.18 Aufgaben zu Kapitel 18

Gegeben sei die Ebene $E(x,y) = x + y$, sowie die Funktionen
$f(x,y) = -x^2 - y^2$, $g(x,y) = -4x^2 - (y-1)^2$,
$h(x,y) = x^2 - y^2$ und $k(x,y) = 3 + 4x + 2y + x^2 - y^2$ von $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

---

1. (Funktionen mehrerer Variabler) **Niveaulinien**

Berechnen und skizzieren sie (soweit existent) die Niveaulinien $z(x,y) = c$ der vier Funktionen $E(x,y)$, $f(x,y)$, $g(x,y)$ und $h(x,y)$ für (i) $c_1 = 0$, (ii) $c_2 = 1$ und (iii) $c_3 = -1$.

Lösung:

Für $E(x,y) = x + y \Rightarrow x + y = c \Leftrightarrow y = -x + c$ ergibt sich eine Gerade mit Steigung -1 und y–Achsenabschnitt c.

$c_1 = 0:\quad y = -x$
$c_2 = 1:\quad y = -x + 1$
$c_3 = -1:\quad y = -x - 1$.

Für $f(x,y) = -x^2 - y^2 \Rightarrow -x^2 - y^2 = c \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{-x^2 - c}$ erhält man für $c > 0$ keine reellen Lösungen, für $c = 0$ eine Punktlösung bei $(0,0)$ und für $c < 0$ Kreise mit Radius $\sqrt{-c}$:

$c_1 = 0:\quad y = \pm\sqrt{-x^2} \Rightarrow (0,0)$

$c_2 = 1:\quad y = \pm\sqrt{-x^2 - 1} \Rightarrow$ keine Lösung in $\mathbf{R}$

$c_3 = -1:\quad y = \pm\sqrt{1 - x^2} \Rightarrow$ Kreis mit Radius Eins um den Ursprung.

Für $g(x,y) = -4x^2 - (y-1)^2 \Rightarrow -4x^2 - (y-1)^2 = c \Leftrightarrow y = 1 \pm \sqrt{-c - 4x^2}$

Trick: Sei $\tilde{x} = 2x$ und $\tilde{y} = y - 1 \Rightarrow \tilde{g}(\tilde{x},\tilde{y}) = -\tilde{x}^2 - \tilde{y}^2 = f(\tilde{x},\tilde{y})$ wie zuvor

$\Rightarrow$ die Niveaulinien von g erhält man aus den Niveaulinien von f durch Verschieben um $+1$ entlang der y–Achse und Umskalieren der x–Achse $\Rightarrow$ Ellipsen für $c < 0$, Punkt für $c = 0$ bei (0,1) und keine Lösung für $c > 0$.

$c_1 = 0:\quad y = 1 \pm \sqrt{-4x^2} \Rightarrow (0,1)$

$c_2 = 1:\quad y = 1 \pm \sqrt{-1 - 4x^2} \Rightarrow$ keine Lösung in $\mathbf{R}$

$c_3 = -1:\quad y = 1 \pm \sqrt{1 - 4x^2}$ für $|x| \leq \frac{1}{2}$ (Ellipse)

Für $h(x,y) = x^2 - y^2 \Rightarrow x^2 - y^2 = c \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{x^2 - c}$ ergeben sich Hyberbeln (außer für $c = 0$):

$c_1 = 0:\quad y = \pm\, x,\quad x \in \mathbf{R}$ (zwei Geraden)

$c_2 = 1:\quad y = \pm\sqrt{x^2 - 1}$, für $|x| \geq 1$ (zwei Hyperbeläste)

$c_3 = -1: y = \pm\sqrt{x^2 + 1},\quad x \in \mathbf{R}$ (ebenfalls zwei Hyperbeläste)

---

2. (Partielle Ableitungen)

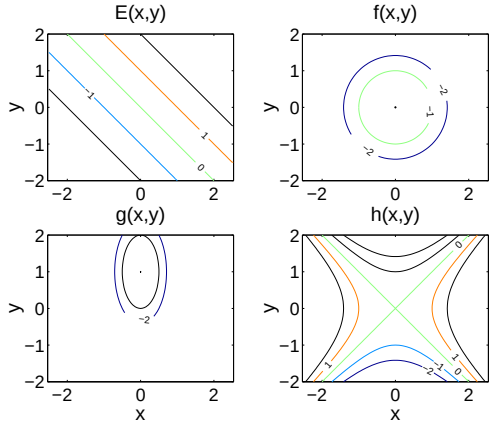


Abbildung A.46: Niveaulinien der vier Funktionen $E(x,y) = x+y$, $f(x,y) = -x^2-y^2$, $g(x,y) = -4x^2-(y-1)^2$ und $h(x,y) = x^2-y^2$

Bilden sie folgende partielle Ableitungen:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}, \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}, \frac{\partial k(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial k(x,y)}{\partial y},$$
$$\frac{\partial^2 k(x,y)}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 k(x,y)}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 k(x,y)}{\partial x \partial y} \text{ und } \frac{\partial^2 k(x,y)}{\partial y \partial x}.$$

Lösung:

Mit $f(x,y) = -x^2 - y^2$ und $k(x,y) = 3 + 4x + 2y + x^2 - y^2$ ergibt sich

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2x, \frac{\partial f}{\partial y} = -2y, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0, \frac{\partial k}{\partial x} = 4 + 2x,$$
$$\frac{\partial k}{\partial y} = 2 - 2y, \frac{\partial^2 k}{\partial x^2} = 2, \frac{\partial^2 k}{\partial y^2} = -2, \frac{\partial^2 k}{\partial x \partial y} = 0 \text{ und } \frac{\partial^2 k}{\partial y \partial x} = 0.$$

---

3. (Partielle Ableitungen) **Taylorentwicklung**

Entwickeln sie die Funktionen $f(x,y)$ und $k(x,y)$ bis zur quadratischen Ordnung um die Punkte $P_1 = (0,0)$ und $P_2 = (-2,1)$ nach Taylor.

Lösung:

Vorbemerkung: Da sowohl f als auch k quadratische Funktionen in x und y sind, muss eine Taylorentwicklung bis zur quadratischen Ordnung die Funktion selbst unabhängig vom Entwicklungspunkt reproduzieren.

Taylorformel: $f(\vec{r}) = f(\vec{r}_0) + \nabla f(\vec{r}_0) \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) + \frac{1}{2}(\vec{r} - \vec{r}_0)^T \mathbf{H}(\vec{r}_0)(\vec{r} - \vec{r}_0) + \ldots$

mit $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, $\nabla f(\vec{r}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$ und der Hessematrix $\mathbf{H}$ ausgewertet am Entwicklungspunkt.

Damit ist $f(x,y)$ um $(0,0)$ bis zur quadratischen Ordnung entwickelt

$$\begin{aligned} f_{\text{quad}}(x,y) &= f(0,0) + < \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} > \\ &\quad + \frac{1}{2} < \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} > \\ &= 0 + < \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} > + \frac{1}{2} < \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} > \\ &= 0 + 0 + \frac{1}{2} < \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \end{pmatrix} > \\ &= -x^2 - y^2 \end{aligned}$$

und um den Punkt $(-2,1)$ ergibt sich

$$\begin{aligned} f_{\text{quad}}(x,y) &= f(-2,1) + < \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(-2,1) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(-2,1) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x+2 \\ y-1 \end{pmatrix} > \\ &\quad + \frac{1}{2} < \begin{pmatrix} x+2 \\ y-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-2,1) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-2,1) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(-2,1) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-2,1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x+2 \\ y-1 \end{pmatrix} > \\ &= -5 + < \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x+2 \\ y-1 \end{pmatrix} > + \frac{1}{2} < \begin{pmatrix} x+2 \\ y-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x+2 \\ y-1 \end{pmatrix} > \\ &= -5 + 4x + 8 - 2y + 2 - (x+2)^2 - (y-1)^2 \\ &= -x^2 - y^2 \,. \end{aligned}$$

Für $k(x,y)$ um $(0,0)$ ergibt sich bis zur quadratischen Ordnung

$$\begin{aligned} k_{\text{quad}}(x,y) &= k(0,0) + < \begin{pmatrix} \frac{\partial k}{\partial x}(0,0) \\ \frac{\partial k}{\partial y}(0,0) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} > + \frac{1}{2} < \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} > \\ &= 3 + < \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} > + < \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} > \\ &= 3 + 4x + 2y + x^2 - y^2 \,. \end{aligned}$$

und für $k(x,y)$ um $(-2,1)$ bis zur quadratischen Ordnung

$$\begin{aligned} k_{\text{quad}}(x,y) &= k(-2,1) + < \begin{pmatrix} \frac{\partial k}{\partial x}(-2,1) \\ \frac{\partial k}{\partial y}(-2,1) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x+2 \\ y-1 \end{pmatrix} > \\ &\quad + \frac{1}{2} < \begin{pmatrix} x+2 \\ y-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x+2 \\ y-1 \end{pmatrix} > \\ &= 0 + < \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x+2 \\ y-1 \end{pmatrix} > + < \begin{pmatrix} x+2 \\ y-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x+2 \\ y-1 \end{pmatrix} > \\ &= (x+2)^2 - (y-1)^2 \qquad (*) \\ &= 3 + 4x + 2y + x^2 - y^2 \,. \end{aligned}$$

In der vorletzten Zeile $(*)$ kann man erkennen, dass $k(x,y)$ einen Sattel wie $h(x,y)$ hat, aber verschoben zum Punkt $(-2,1)$.

4. (Partielle Ableitungen) **Gradient und Richtungsableitung**

Berechnen sie den Gradienten der vier Funktionen $f(x,y)$, $g(x,y)$, $h(x,y)$ und $k(x,y)$. Bestimmen sie nun noch die Richtungsableitungen dieser vier Funktionen entlang der Vektoren $\vec{v}_1 = (1,1)$ und $\vec{v}_2 = (1,-2)$.

Lösung:

Die Gradienten: $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \end{pmatrix}$, $\nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} -8x \\ -2y+2 \end{pmatrix}$,

$\nabla h(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \end{pmatrix}$ und $\nabla k(x,y) = \begin{pmatrix} 4+2x \\ 2-2y \end{pmatrix}$.

Die Richtungsableitungen entlang $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$: $< \nabla f, \vec{v}_1 >= -2x - 2y$,

$< \nabla g, \vec{v}_1 >= -8x - 2y + 2$, $< \nabla h, \vec{v}_1 >= 2x - 2y$, $< \nabla k, \vec{v}_1 >= 6 + 2x - 2y$ und entlang $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$: $< \nabla f, \vec{v}_2 >= -2x + 4y$, $< \nabla g, \vec{v}_2 >= -8x + 4y - 4$,

$< \nabla h, \vec{v}_2 >= 2x + 4y$ und $< \nabla k, \vec{v}_2 >= 2x + 4y$.

Bemerkung: Wir haben die Richtungsableitung ohne Normierung des Vektors definiert, auf den man den Gradienten projeziert, daher hängt der Wert der Richtungsableitung hier nicht nur davon ab, in welche Richtung man "geht", sondern auch davon "wie weit" (d.h. wie lang der Vektor ist). Alternativ kann man die Richtungsableitung so definieren, dass man genau eine Längeneinheit weit in die betrachtete Richtung geht. Dazu müßte man dann $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ vorher normieren.

---

5. (Partielle Ableitungen) **Lokale Extrema**

Bestimmen und klassifizieren (lokales Maximum, Minimum oder Sattelpunkt?) sie die stationären Punkte der vier Funktionen $f(x,y)$, $g(x,y)$, $h(x,y)$ und $k(x,y)$.

Lösung:

Eine Funktion $f(x,y)$ hat einen stationären Punkt bei (x_0,y_0), falls ihr Gradient dort verschwindet.

$$\begin{aligned}
\nabla f(x_0,y_0) = \vec{0} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2x_0 \\ -2y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_0 = 0 \text{ und } y_0 = 0 \\
\nabla g(x_0,y_0) = \vec{0} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -8x_0 \\ -2y_0+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_0 = 0 \text{ und } y_0 = 1 \\
\nabla h(x_0,y_0) = \vec{0} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2x_0 \\ -2y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_0 = 0 \text{ und } y_0 = 0 \\
\nabla k(x_0,y_0) = \vec{0} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4+2x_0 \\ 2-2y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_0 = -2 \text{ und } y_0 = 1
\end{aligned}$$

Klassifikation: f bei $(0,0)$: Die Hessematrix von f ist $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow D(\vec{r}_0) = 4 > 0$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\vec{r}_0) = -2 < 0$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\vec{r}_0) = -2 < 0 \Rightarrow$ lokales Maximum

g bei $(0,1)$: Die Hessematrix von g ist $\begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$ lokales Maximum (s.o.)

h bei $(0,0)$: Die Hessematrix von h ist $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = -4 < 0 \Rightarrow$ Sattelpunkt

k bei $(-2,1)$: Die Hessematrix von k ist $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Sattelpunkt (vgl h)

---

6. (Partielle Ableitungen) **Partielle Differentialgleichungen I: Wellengleichung**

Eine Gleichung der Form

$$\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2} = a \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2}$$

heißt Wellengleichung (oder d'Alembert–Gleichung).

(a) Unter welcher Bedingung erfüllt die Funktion $f(x,t) = \exp[\mathrm{i}(kx - \omega t)]$ die Wellengleichung?

Bilden sie dazu die partiellen Ableitungen $\dfrac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2}$ und $\dfrac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2}$ und setzen sie diese in die Wellengleichung ein.

(b) Zeigen sie: Jede Funktion der Form $y = f(x - ct)$ oder $y = f(x + ct)$ ist Lösung der Wellengleichung mit der Geschwindigkeit $c = \sqrt{a}$. Welche Geschwindigkeit erhalten sie somit für die in (a) gefundene Lösung?

Lösung:

(a) Für $f(x,t) = \exp(\mathrm{i}(kx - \omega t))$ ist
$\dfrac{\partial f}{\partial t} = -\mathrm{i}\omega \exp(\mathrm{i}(kx - \omega t)) \Rightarrow \dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2} = -\omega^2 \exp(\mathrm{i}(kx - \omega t)) = -\omega^2 f(x,t)$ und
$\dfrac{\partial f}{\partial x} = \mathrm{i}k \exp(\mathrm{i}(kx - \omega t)) \Rightarrow \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -k^2 \exp(\mathrm{i}(kx - \omega t)) = -k^2 f(x,t)$

Eingesetzt in die Wellengleichung ergibt sich $-\omega^2 f(x,t) = a \cdot (-k^2) f(x,t) \Rightarrow$ (weil $f(x,t) \neq 0$ für alle x und t) $\Rightarrow$ Für $\left(\dfrac{\omega}{k}\right)^2 = a$ erfüllt $f(x,t)$ die Wellengleichung.

(b) Sei $y(x,t) = f(x - ct)$ und sei weiter $u(x,t) = x - ct \Rightarrow y(x,t) = f(u) \Rightarrow$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \Rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \text{ und } \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} = -c\frac{\partial f}{\partial u} \Rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial f}{\partial u}$$

Einsetzen liefert: $c^2 \dfrac{\partial f}{\partial u} = a \dfrac{\partial f}{\partial u} \Rightarrow$ für $c = \sqrt{a}$ erfüllt $f(x - ct)$ die Wellengleichung.

Für $y(x,t) = f(x + ct)$ läuft die Argumentation genauso.

Die Geschwindigkeit der Welle in (a) ist wegen $\exp[\mathrm{i}(kx - \omega t)] = \exp[\mathrm{i}k(x - \dfrac{\omega}{k}t)]$ gleich ω/k.

---

7. (Funktionen mehrerer Variabler) **3–D Plot**

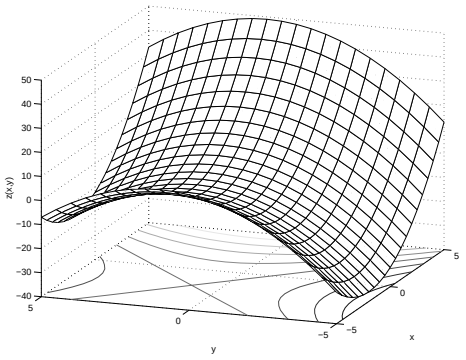


Abbildung A.47: Der Graph von $k(x,y) = 3 + 4x + 2y + x^2 - y^2$.

Betrachten sie den folgenden Graphen der Funktion $z(x,y)$. Stellt er eine der Funktionen f, g, h oder k dar oder nicht? Wenn ja, welche?

---

8. (Funktionen mehrerer Variabler)

Untersuchen sie die Funktionen $f(x,y) = (1+\sin(x))(1+y^2)$ und $g(x,y) = \exp(-x^2-y^2)$ auf Nullstellen und Extremwerte.

Lösung:

Zunächst zu $f(x,y) = (1+\sin(x))(1+y^2)$ von $\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$

Nullstellen: $f(x,y) = 0 \;\Leftrightarrow 1+\sin(x) = 0$, da $(1+y^2) > 0$ für alle $y \in \mathbf{R}$

$\Leftrightarrow \sin(x) = -1 \Leftrightarrow x = \arcsin(-1) \Rightarrow x = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}$

Da y für $x = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi$ jeweils beliebige Werte annehmen kann, gibt es unendlich viele Nullinien der Form $x = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$

Extremwerte: stationäre Punkte aus $\nabla f = \vec{0}$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(x)(1+y^2) \\ 2y[1+\sin(x)] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{ll} (1) & \cos(x) = 0 \\ (2) & 2y[1+\sin(x)] = 0 \end{array}$$

Aus (1) folgt $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$, damit in (2) ergibt y beliebig für $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$ und $y = 0$ für $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$

Hessematrix von f: $\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(x)(1+y^2) & 2y\cos(x) \\ 2y\cos(x) & 2[1+\sin(x)] \end{pmatrix}$

für $y = 0$ und $x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow \mathbf{H} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \det \mathbf{H} = -4 < 0 \Rightarrow$ Sattelpunkte

Für $y \in \mathbf{R}$ und $x = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow \mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1+y^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det \mathbf{H} = 0 \Rightarrow$ keine Aussage möglich.

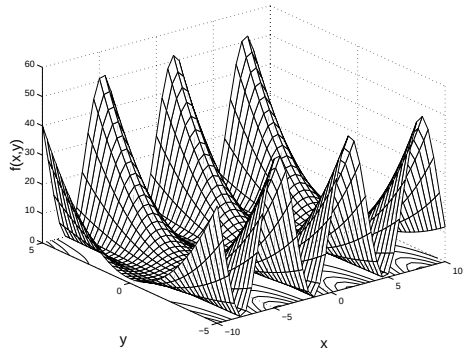


Abbildung A.48: Graph der Funktion $f(x,y) = (1+\sin(x))(1+y^2)$

Ein Blick auf die Skizze zeigt, dass die Nulllinien Minimallinien sind, aber es gibt keine isolierten lokalen oder globalen Minima. Dass die Nulllinien Minima sein müssen, erkennt man auch aus der Tatsache, dass $f(x,y) \geq 0$ für alle $x, y \in \mathbf{R}$ ist, da $(1+\sin(x)) \geq 0$ und $(1+y^2) > 0$

Nun zu $g(x,y) = \exp(-x^2-y^2)$

Nullstellen: keine, da $\exp(x) > 0$ für alle $x \in \mathbf{R}$.

Extremwerte: notwendige Bedingung: $\nabla g = \vec{0}$

$$\nabla g = \begin{pmatrix} -2x\exp(-x^2-y^2) \\ -2y\exp(-x^2-y^2) \end{pmatrix} = (-2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\exp(-x^2-y^2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist stationärer Punkt.

zur Hessenmatrix:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}[-2x\exp(-x^2-y^2)] \\ &= -2[\exp(-x^2-y^2) + x(-2x)\exp(-x^2-y^2)] \\ &= (4x^2-2)\exp(-x^2-y^2)\,. \end{aligned}$$

Analog ergibt sich $\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2} = (4y^2-2)\exp(-x^2-y^2)$ und $\dfrac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} = 4xy\exp(-x^2-y^2)\,.$

$$\Rightarrow \mathbf{H}_g(x,y) = \begin{pmatrix} 4x^2-2 & 4xy \\ 4xy & 4y^2-2 \end{pmatrix}\exp(-x^2-y^2) \Rightarrow \mathbf{H}_g(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$(0,0)$ ist Maximum.

---

9. (Partielle Ableitung) **Produktregel**

(a) Zeigen sie, dass für die Gradientenbildung des Produktes zweier skalarer Funktionen $f(x,y)$ und $g(x,y)$ folgende Produktregel gilt:

$$\vec{\nabla}(fg) = g\ \vec{\nabla} f + f\ \vec{\nabla} g\ .$$

(b) Berechnen sie damit den Gradienten von $h(x,y) = (x^2+y^2)\exp(-x^2-y^2)\,.$

Lösung: Sei $h(x,y) = f(x,y) \cdot g(x,y)$

(a) $\nabla h = \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial h}{\partial y} \end{pmatrix}$, wobei $\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot g + f \cdot \frac{\partial g}{\partial x}$ und $\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} \cdot g + f \cdot \frac{\partial g}{\partial y}$

$$\Rightarrow \nabla h = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \cdot g + f \cdot \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \cdot g + f \cdot \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} = g \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} + f \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} = g\nabla f + f\nabla g \qquad \text{(q.e.d.)}$$

(b) Mit $f(x,y) = x^2 + y^2$ und $g(x,y) = \exp(-x^2 - y^2) \Rightarrow$
$h(x,y) = (x^2 + y^2)\exp(-x^2 - y^2)$

$$\begin{aligned} \nabla h &= \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \exp(-x^2 - y^2) + (x^2 + y^2) \begin{pmatrix} -2x \exp(-x^2 - y^2) \\ -2y \exp(-x^2 - y^2) \end{pmatrix} \\ &= 2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \exp(-x^2 - y^2) - 2(x^2 + y^2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \exp(-x^2 - y^2) \\ &= 2(1 - x^2 - y^2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \exp(-x^2 - y^2)\,. \end{aligned}$$

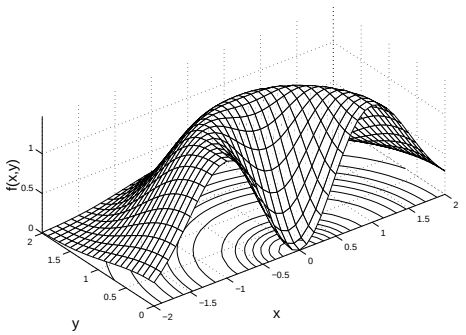


Abbildung A.49: Graph der Funktion $h(x,y) = (x^2 + y^2)\exp(-x^2 - y^2)$

10. (Partielle Ableitung) **Tangentialebene und Tangentengleichung**

Entwickeln sie die Funktion $z = f(x, y) = xy^2 - yx^3$ um den Punkt $(1, 2)$ bis zur linearen Ordnung nach Taylor. Geometrisch betrachtet, haben sie damit die Ebene gefunden, die die Funktion $f(x, y)$ im Punkt $(1, 2)$ bestmöglich approximiert. Dies ist die Tangentialebene T an f in $(1, 2)$. Wenn sie nun noch die Tangentialebene T mit der Ebene $z = 2$ schneiden, so erhalten sie die Tangente t an die Kurve $xy^2 - yx^3 = 2$. Ohne diese Beziehung nach x oder y aufzulösen, können sie somit die Gleichung der Tangente dieser Kurve im Punkt $(1, 2)$ bestimmen. Wie lautet sie?

Lösung:

$$f(x, y) = xy^2 - yx^3 \Rightarrow \nabla f = \begin{pmatrix} y^2 - 3yx^2 \\ 2xy - x^3 \end{pmatrix}$$

Entwicklung von f um $(1, 2)$ bis zur linearen Ordnung:

$$\begin{aligned} f_{\text{lin}}(x, y) &= f(1,2) + < \nabla f(1,2), \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix} > \\ &= 2 + < \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix} > \\ &= 2 - 2x + 2 + 3y - 6 \\ &= 3y - 2x - 2 \end{aligned}$$

d.h. die Ebene $2x - 3y + z = -2$ ist Tangentialebene an $f(x, y)$ im Punkt $(1, 2)$. Die Tangentialebene $2x - 3y + z = -2$ geschnitten mit der Ebene $z = 2$ ergibt $2x + 3y = -4 \Leftrightarrow y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$ die Tangente an $xy^2 - yx^3 = 2$.

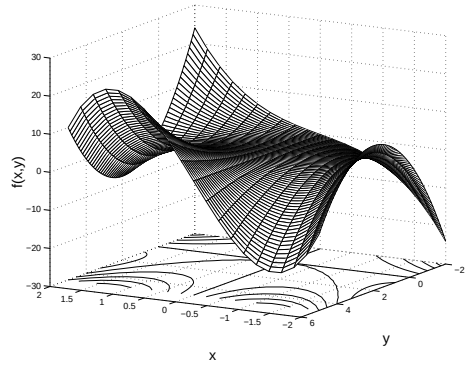


Abbildung A.50: Graph der Funktion $f(x, y) = xy^2 - yx^3$

11. (Partielle Ableitung) **Kugelsymmetrie**

(a) Berechnen sie für den Betrag des Ortsvektors $r = |\vec{r}| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ den Gradienten in 2, 3 und n Dimensionen.

(b) Zeigen sie: Falls $f(x, y)$ nur vom Abstand des Punktes (x, y) vom Ursprung abhängt, d.h. falls $f(x, y) = f(\sqrt{x^2 + y^2}) = f(r)$ mit $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ gilt, dann kann man den Gradienten wie folgt berechnen:

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\vec{r}}{r} \tag{1.23}$$

mit dem Ortsvektor $\vec{r} = \binom{x}{y}$. Hängt ihr Beweis der Beziehung (1.23) von der Zahl der Dimensionen (hier 2) ab, oder gilt (1.23) auch in n Dimensionen?

(c) Berechnen sie den Gradienten für $f(x,y) = \exp(-x^2 - y^2)$, sowie für das Coulombpotential in drei Dimensionen $\phi(x,y,z) = a/\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

Lösung:

(a) In zwei Dimensionen ist $r = r(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ der Betrag von $\vec{r} = \binom{x}{y}$.

$$\nabla r = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} \\ \frac{\partial r}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{\vec{r}}{r}$$

.

In drei Dimensionen ist $r = r(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ der Betrag von $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\nabla r = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} \\ \frac{\partial r}{\partial y} \\ \frac{\partial r}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \frac{2z}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{\vec{r}}{r}$$

Man erkennt, dass sich diese Berechnung auf beliebig viele Dimensionen verallgemeinern läßt $\Rightarrow \nabla r = \frac{\vec{r}}{r}$ für den n–dimensionalen Ortsvektor $\vec{r}$.

(b) Für $f(x,y) = f(r) \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial r}\dfrac{\partial r}{\partial x}$ und $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial r}\dfrac{\partial r}{\partial y}$ (Kettenregel!)

$$\Rightarrow \nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial r} \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} \\ \frac{\partial r}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial r} \nabla r = \frac{\partial f}{\partial r} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

Wieder ist offensichtlich, dass sich diese Beziehung für beliebige Dimensionszahlen verallgemeinern läßt.

(c) Da

$$f(x,y) = \exp(-x^2-y^2) = \exp[-(x^2+y^2)] = \exp[-(\sqrt{x^2+y^2})^2] = \exp(-r^2) \;\Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \nabla f &= \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\vec{r}}{r} = -2r\exp(-r^2)\frac{\vec{r}}{r} = -2\exp(-r^2)\vec{r} \\ &= -2\exp(-x^2-y^2)\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} f \end{aligned}$$

Und für $\varphi(x,y,z) = \dfrac{a}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \dfrac{a}{r}$ ist

$$\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial r}\cdot\frac{\vec{r}}{r} = -\frac{a}{r^3}\vec{r} = -\frac{a}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\frac{\vec{r}}{r^2}\varphi$$

---

12. (Partielle Ableitung) **Partielle Differentialgleichungen II: Diffusionsgleichung**

Eine Gleichung der Form

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} = D\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2}$$

heißt Diffusionsgleichung (oder Wärmeleitungsgleichung).

Für welche Diffusionskonstante D erfüllt die Funktion

$$f(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\exp(-\frac{x^2}{2t})$$

die Diffusionsgleichung? Skizzieren sie $f(x,t)$ für die Zeiten $t = 1$, 2, 3 und 4.

Lösung:

Für $f(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\exp(-\frac{x^2}{2t})$ ist

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{(-1)}{2\sqrt{t^3}}\exp(\frac{-x^2}{2t}) + \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\frac{x^2}{2t^2}\exp(-\frac{x^2}{2t}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\cdot\frac{1}{t}\left(-\frac{1}{2}+\frac{x^2}{2t}\right)\exp(\frac{x^2}{2t}) \\
&= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{t}+\frac{x^2}{t^2}\right)f(x,t) \qquad \text{und} \\
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{-2x}{2t\sqrt{2\pi t}}\exp(-\frac{x^2}{2t}) = -\frac{x}{t}f(x,y) \;\Rightarrow \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= -\frac{1}{t}f(x,t) - \frac{x}{t}\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{1}{t}f(x,y) + \frac{x^2}{t^2}f(x,t) \\
&= \left(-\frac{1}{t}+\frac{x^2}{t^2}\right)f(x,t)\,.
\end{aligned}$$

Einsetzen in die Diffusionsgleichung ergibt

$$\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{t}+\frac{x^2}{t^2}\right)f(x,t) = D\left(-\frac{1}{t}+\frac{x^2}{t^2}\right)f(x,t) \Rightarrow D = \frac{1}{2}$$

Dies ist eine zerfließende Gaußglocke deren Höhe proportional zu $\frac{1}{\sqrt{t}}$ abnimmt und deren Breite $\sigma(t) = \sqrt{t}$ mit $\sqrt{t}$ anwächst.

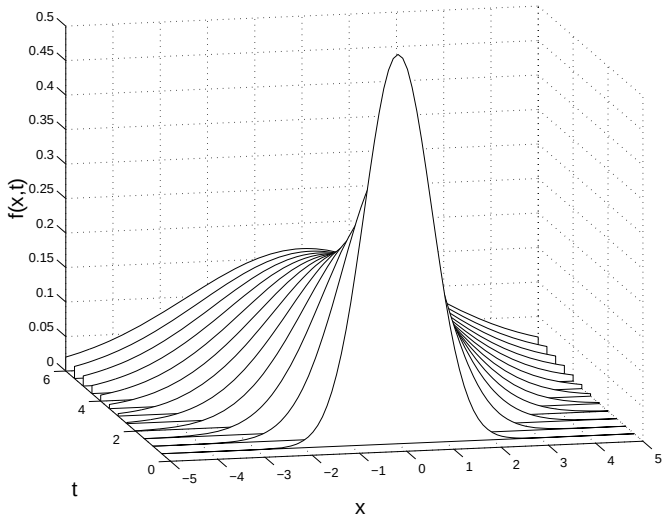


Abbildung A.51: Graph der Funktion $f(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp(-\frac{x^2}{2t})$